Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler

Matthias Künzer

Universität Stuttgart

21. März 2022

Inhalt

Vorwort

In der Vorlesung sollen grundlegende mathematische Fähigkeiten im Hinblick auf die Wirtschaftswissenschaften vermittelt werden. Vorausgesetzt wird Abiturwissen, wenn wir auch Teile davon wiederholen werden.

Kleingedruckte Bemerkungen sind nicht Teil des Pflichtstoffs.

Ein Dank geht an Jan Egidy, Oliver Kunzi und weitere Studenten, die mich auf Fehler in Skript und Übungen aufmerksam gemacht haben.

Ein Dank geht an Hanyuan Hang, Tillmann Jentsch und Kristina Kohls für Mitarbeit an den Übungen und für Korrekturen und Vereinfachungen.

Für weitere Hinweise auf Fehler und Unklarheiten bin ich dankbar.

Stuttgart, den 26.02.2012

Matthias Künzer

Kapitel 1

Zahlen

1.1 Reelle Zahlen

1.1.1 Begriff

Die Menge $\mathbf{R}$ der reellen Zahlen besteht aus den beliebigen Dezimalbrüchen, die

$$\pm a_n a_{n-1} \dots a_0 \, , \; a_{-1} a_{-2} a_{-3} \dots$$

mit ganzen Zahlen $0 \leqslant a_i \leqslant 9$ geschrieben werden, wobei $n \geqslant 0$. So z.B. sind $-2 = -2{,}00\dots$, $7/8 = 0{,}87500\dots$, $\sqrt{5} = 2{,}23606\dots$ und π $(= 3{,}14159\dots)$ reelle Zahlen.

Sind r, $s \in \mathbf{R}$, so können wir $r + s$, $r - s$, $r \cdot s$ und, falls $s \neq 0$, auch r/s in $\mathbf{R}$ bilden.

Reelle Zahlen können miteinander verglichen werden, ggf. ist $r \leqslant s$ resp. $r < s$.

1.1.2 Teilmengen von R

Für $a \in \mathbf{R}$ schreiben wir $\mathbf{R}_{>a} := \{x \in \mathbf{R} \,:\, x > a\}$. Etc.

Für a, $b \in \mathbf{R}$ schreiben wir die *Intervalle*

$$\begin{array}{rcl} [a,b] & := & \{x \in \mathbf{R} \,:\, a \leqslant x \leqslant b\} \\ [a,b) & := & \{x \in \mathbf{R} \,:\, a \leqslant x < b\} \\ (a,b] & := & \{x \in \mathbf{R} \,:\, a < x \leqslant b\} \\ (a,b) & := & \{x \in \mathbf{R} \,:\, a < x < b\} \, . \end{array}$$

Üblich ist auch $(a, \infty) := \mathbf{R}_{>a}$ für das unendliche Intervall, etc. Auch $\mathbf{R} = (-\infty, \infty)$ selbst gilt als Intervall.

Wir haben die Teilmengen

$$\mathbf{Z} \subseteq \mathbf{Q} \subseteq \mathbf{R} \, .$$

Hierbei besteht $\mathbf{Z}$ aus den ganzen Zahlen, d.h. den reellen Zahlen, deren Nachkommastellen gleich 0 sind.

Ferner besteht $\mathbf{Q}$ aus den rationalen Zahlen, d.h. den Brüchen ganzer Zahlen. Dies sind die abbrechenden oder aber periodischen Dezimalbrüche. Hierbei ist für $k \in \mathbf{Z}_{\geqslant 1}$

$$0,\overline{a_{-1}a_{-2}\dots a_{-k}} \;=\; \frac{a_{-1}a_{-2}\dots a_{-k}}{10^k - 1}\;.$$

Z.B. wird $0{,}4123123\cdots = 0{,}4\overline{123} = \frac{4}{10} + \frac{123}{9990} = \frac{1373}{3330}$.

1.1.3 Summennotation

Seien $k,\,\ell \in \mathbf{Z}$.

Ist $k \leqslant \ell$ und ist für $i \in \mathbf{Z}$ mit $k \leqslant i \leqslant \ell$ je eine reelle Zahl $x_i \in \mathbf{R}$ gegeben, so verwenden wir die Summennotation

$$\sum_{i=k}^{\ell} x_i \;:=\; x_k + x_{k+1} + x_{k+2} + \cdots + x_\ell\;.$$

Dazuhin setzen wir $\sum_{i=k}^{\ell} x_i := 0$ falls $k > \ell$.

Z.B. wird $\sum_{i=3}^{5} i^2 = 3^2 + 4^2 + 5^2 = 50$.

1.1.4 Potenzen

Ist $x \in \mathbf{R}$ und $k \in \mathbf{Z}$, so setzen wir

$$x^k \;:=\; \begin{cases} x \cdot x \cdots x & \text{mit } k \text{ Faktoren, falls } k \geqslant 1 \\ 1 & \text{falls } k = 0 \\ \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x} \cdots \frac{1}{x} & \text{mit } -k \text{ Faktoren, falls } x \neq 0 \text{ und } k \leqslant -1\;. \end{cases}$$

Insbesondere ist also $0^0 = 1$.

1.2 Betrag und Dreiecksungleichung

Von $r \in \mathbf{R}$ können wir den *Betrag*

$$|r| \;:=\; \begin{cases} r & \text{falls } r \geqslant 0 \\ -r & \text{falls } r < 0 \end{cases}$$

bilden.

Lemma (Dreiecksungleichung). Es ist $|r + s| \leqslant |r| + |s|$ für $r,\,s \in \mathbf{R}$.

Zum Beispiel ist $|-7 + 3| = 4 \leqslant 10 = |-7| + |3|$.

Denn es ist $|r+s| = \left\{ \begin{array}{ll} r+s & \text{falls } r+s \geqslant 0 \\ -r-s & \text{falls } r+s < 0 \end{array} \right\} \leqslant |r| + |s|$.

Lemma. Es ist $|r-s| \geqslant ||r|-|s||$ für $r,\ s\ \in \mathbf{R}$.

Denn es ist $|r| = |r-s+s| \overset{\text{D.U.}}{\leqslant} |r-s| + |s|$, und also $|r| - |s| \leqslant |r-s|$. Genauso folgt auch $|s| - |r| \leqslant |s-r| = |r-s|$. Insgesamt ist also $||r|-|s|| \leqslant |r-s|$.

1.3 Binomiales

1.3.1 Binomialkoeffizienten

Für $n \in \mathbf{Z}_{\geqslant 1}$ schreiben wir $n! := 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$, gesprochen "$n$ Fakultät". Ferner setzen wir $0! := 1$. Z.B. ist $4! = 24$.

Für $a,\ b\ \in \mathbf{Z}$ schreiben wir

$$\tbinom{a}{b} \;:=\; \begin{cases} \frac{a!}{b!(a-b)!} & \text{falls } 0 \leqslant b \leqslant a \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

gesprochen "a über b".

Z.B. ist $\binom{4}{2} = \frac{4!}{2!2!} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 1\cdot 2} = 6$.

Z.B. ist $\binom{a}{0} = \frac{a!}{0!a!} = 1$ und $\binom{a}{a} = \frac{a!}{a!0!} = 1$ für $a \geqslant 0$.

Für $0 \leqslant b \leqslant a$ ist $\binom{a}{b} = \frac{a!}{b!(a-b)!} = \binom{a}{a-b}$. Z.B. ist $\binom{5}{2} = \binom{5}{3} = \frac{5!}{2!3!} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 1\cdot 2\cdot 3} = 10$.

Ist $1 \leqslant b \leqslant a$, so ist

$$\tbinom{a}{b-1} + \tbinom{a}{b} \;=\; \tfrac{a!}{(b-1)!(a-b+1)!} + \tfrac{a!}{b!(a-b)!} \;=\; \tfrac{a!(b+(a-b+1))}{b!(a-b+1)!} \;=\; \tfrac{(a+1)!}{b!((a+1)-b)!} \;=\; \tbinom{a+1}{b}\;.$$

Ferner ist $\binom{a}{-1} + \binom{a}{0} = 0 + 1 = \binom{a+1}{0}$ und $\binom{a}{a} + \binom{a}{a+1} = 1 + 0 = \binom{a+1}{a+1}$.

Insgesamt ist also für $0 \leqslant b \leqslant a+1$

$$\tbinom{a}{b-1} + \tbinom{a}{b} \;=\; \tbinom{a+1}{b}\;.$$

Dies liefert das (links und rechts um Nullen ergänzte) *Pascalsche Dreieck*

$$\begin{array}{c} \tbinom{0}{-1}\tbinom{0}{0}\;\tbinom{0}{1} \\ \tbinom{1}{-1}\tbinom{1}{0}\;\tbinom{1}{1}\;\tbinom{1}{2} \\ \tbinom{2}{-1}\tbinom{2}{0}\;\tbinom{2}{1}\;\tbinom{2}{2}\;\tbinom{2}{3} \\ \tbinom{3}{-1}\tbinom{3}{0}\;\tbinom{3}{1}\;\tbinom{3}{2}\;\tbinom{3}{3}\;\tbinom{3}{4} \\ \tbinom{4}{-1}\tbinom{4}{0}\;\tbinom{4}{1}\;\tbinom{4}{2}\;\tbinom{4}{3}\;\tbinom{4}{4}\;\tbinom{4}{5} \\ \cdots \end{array} \quad = \quad \begin{array}{c} 0\;\;1\;\;0 \\ 0\;\;1\;\;1\;\;0 \\ 0\;\;1\;\;2\;\;1\;\;0 \\ 0\;\;1\;\;3\;\;3\;\;1\;\;0 \\ 0\;\;1\;\;4\;\;6\;\;4\;\;1\;\;0 \\ \cdots \end{array}$$

In diesem gibt die Summe aus je zwei horizontal benachbarten Einträgen den mittig darunterstehenden.

Korollar. Es ist $\binom{a}{b} \in \mathbf{Z}_{\geqslant 0}$ für $a,\, b \in \mathbf{Z}$.

Denn im Pascalschen Dreieck wird nur addiert.

1.3.2 Binomischer Lehrsatz

Lemma (Binomischer Lehrsatz). Seien $x,\, y \in \mathbf{R}$ und $n \in \mathbf{Z}_{\geqslant 0}$ gegeben. Dann ist

$$(x+y)^n \;=\; \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^{n-i} y^i \;=\; \binom{n}{0} x^n y^0 + \binom{n}{1} x^{n-1} y^1 + \binom{n}{2} x^{n-2} y^2 + \cdots + \binom{n}{n} x^0 y^n \;.$$

Z.B. ergibt sich folgendes.

$$\begin{array}{rclcl}
(x+y)^0 & = & \binom{0}{0} x^0 y^0 & = & 1 \\
(x+y)^1 & = & \binom{1}{0} x^1 y^0 + \binom{1}{1} x^0 y^1 & = & x+y \\
(x+y)^2 & = & \binom{2}{0} x^2 y^0 + \binom{2}{1} x^1 y^1 + \binom{2}{2} x^0 y^2 & = & x^2+2xy+y^2 \\
(x+y)^3 & = & \binom{3}{0} x^3 y^0 + \binom{3}{1} x^2 y^1 + \binom{3}{2} x^1 y^2 + \binom{3}{3} x^0 y^3 & = & x^3+3x^2y+3xy^2+y^3 \\
(x+y)^4 & = & \binom{4}{0} x^4 y^0 + \binom{4}{1} x^3 y^1 + \binom{4}{2} x^2 y^2 + \binom{4}{3} x^1 y^3 + \binom{4}{4} x^0 y^4 & = & x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+y^4
\end{array}$$

Dieses Lemma wollen wir mit *Induktion* zeigen. Bei diesem Verfahren liegt für ein $k \in \mathbf{Z}_{\geqslant 1}$ eine für alle ganzen Zahlen $n \geqslant k$ zu zeigende Aussage $A(n)$ vor; z.B. eine Gleichung, in welcher n vorkommt. Man zeigt hierzu zunächst in einem *Induktionsanfang*, daß $A(k)$ gilt. Sodann zeigt man in einem *Induktionsschritt*, daß für $n \geqslant k$ aus $A(n)$ folgt, daß auch $A(n+1)$ gilt; hierbei spielt $A(n)$ die Rolle einer *Induktionsvoraussetzung*. Somit gilt $A(k)$, also auch $A(k+1)$, also auch $A(k+2)$, usf. Insgesamt gilt dann $A(n)$ für alle $n \in \mathbf{Z}_{\geqslant k}$.

Beweis des Lemmas.

Induktionsanfang. Sei $n = 0$. Die linke Seite unserer zu zeigenden Gleichung gibt $(x+y)^0 = 1$. Die rechte Seite gibt $\sum_{i=0}^{0} \binom{0}{i} x^{0-i} y^i = \binom{0}{0} x^0 y^0 = 1$. Somit ist die Gleichung in diesem Fall erfüllt.

Induktionsschritt. Sei $n \geqslant 0$. Sei die Gleichung für n erfüllt, d.h. sei die Gleichheit $(x+y)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^{n-i} y^i$ bekannt (Induktionsvoraussetzung).

Wir haben zu zeigen, daß die Gleichung für $n+1$ erfüllt ist, d.h. daß

$$(x+y)^{n+1} \;\overset{!}{=}\; \sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} x^{n+1-i} y^i \;.$$

Dazu rechnen wir

$$\begin{aligned}
(x+y)^{n+1} &= (x+y)(x+y)^n \\
&\overset{\text{I.V.}}{=} (x+y)\Big(\textstyle\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}x^{n-i}y^i\Big) \\
&= \Big(\textstyle\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}x^{n-i+1}y^i\Big) + \Big(\textstyle\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}x^{n-i}y^{i+1}\Big) \\
&\overset{\text{Vereinb.}}{=} \Big(\textstyle\sum_{i=0}^{n+1}\binom{n}{i}x^{n-i+1}y^i\Big) + \Big(\textstyle\sum_{i=-1}^{n}\binom{n}{i}x^{n-i}y^{i+1}\Big) \\
&\overset{j:=i+1\text{ hinten}}{=} \Big(\textstyle\sum_{i=0}^{n+1}\binom{n}{i}x^{n-i+1}y^i\Big) + \Big(\textstyle\sum_{j=0}^{n+1}\binom{n}{j-1}x^{n-j+1}y^j\Big) \\
&= \Big(\textstyle\sum_{i=0}^{n+1}\binom{n}{i}x^{n-i+1}y^i\Big) + \Big(\textstyle\sum_{i=0}^{n+1}\binom{n}{i-1}x^{n-i+1}y^i\Big) \\
&= \textstyle\sum_{i=0}^{n+1}\big(\binom{n}{i}+\binom{n}{i-1}\big)x^{n-i+1}y^i \\
&\overset{\S 1.3.1}{=} \textstyle\sum_{i=0}^{n+1}\binom{n+1}{i}x^{n+1-i}y^i \ .
\end{aligned}$$

Somit ist unser Lemma bewiesen.

Kapitel 2

Abbildungen

2.1 Allgemeines

Seien X, Y und Z Mengen.

2.1.1 Begriffe

Es bezeichnet $\emptyset$ die leere Menge, die kein Element enthält.

Schreibe $X \times Y := \{(x,y) \ : \ x \in X, \ y \in Y\}$ für das *kartesische Produkt* von X und Y.

Schreibe $X^n = X \times \cdots \times X = \{(x_1\,, \, \ldots \,, \, x_n) \ : \ x_i \in X\}$ für das kartesische Produkt aus n Faktoren, wobei $n \in \mathbf{Z}_{\geqslant 1}$. Seine Elemente heißen n-*Tupel* aus Elementen von X. Wir setzen noch $X^0 := \{()\}$, mit dem leeren Tupel als einzigem Element.

So etwa bezeichnet $\mathbf{R}^n$ die Menge aller n-Tupel reeller Zahlen.

Eine Vorschrift f, die jedem Element $x \in X$ ein Element $f(x) \in Y$ zuordnet, heißt *Abbildung* oder *Funktion,* geschrieben $f : X \longrightarrow Y$, $x \longmapsto f(x)$.

Z.B. ist $q : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$, $x \longmapsto q(x) := x^2$ eine Abbildung.

Z.B. ist $h : \{1,2,3\} \longrightarrow \{1,2,3\}$, $1 \mapsto 1$, $2 \mapsto 1$, $3 \mapsto 3$ eine Abbildung.

Z.B. ist $k : \{1,2,3,4,5\} \longrightarrow \{1,2,3,4\}$, $1 \mapsto 3$, $2 \mapsto 1$, $3 \mapsto 4$, $4 \mapsto 4$, $5 \mapsto 3$ eine Abbildung.

Es heißt $\mathrm{id} = \mathrm{id}_X : X \longrightarrow X$, $x \longmapsto x$ die *identische* Abbildung.

Es heißt X die *Startmenge* oder der *Definitionsbereich* von $f : X \longrightarrow Y$.

Es heißt Y die *Zielmenge* oder der *Wertebereich* von $f : X \longrightarrow Y$.

Für $U \subseteq X$ schreiben wir $f(U) := \{f(u) \ : \ u \in U\} \subseteq Y$ für das *Bild von U unter f.*

Für $V \subseteq Y$ schreiben wir $f^{-1}(V) := \{x \in X \ : \ f(x) \in V\}$ für das *Urbild von V unter f.*

Z.B. ist $k(\{1,2,5\}) = \{1,3\}$. Z.B. ist $k^{-1}(\{1,2,4\}) = \{2,3,4\}$.

Sei $f : X \longrightarrow Y$ eine Abbildung. Seien $U \subseteq X$ und $V \subseteq Y$ mit $f(U) \subseteq V$ gegeben. Die dementsprechende *Einschränkung* von f ist als $f|_U^V : U \longrightarrow V$, $u \longmapsto f(u)$ definiert.

Ist $V = Y$, so schreiben wir auch $f|_U := f|_U^Y$.

Der *Graph* einer Abbildung $f : X \longrightarrow Y$ sei definiert als

$$\Gamma_f \;:=\; \{(x, f(x)) \;:\; x \in X\} \;\subseteq\; X \times Y\;.$$

Funktionen $f,\, g \,:\, X \longrightarrow \mathbf{R}$ werden punktweise addiert und multipliziert, $f+g : X \longrightarrow \mathbf{R}$, $(f+g)(x) := f(x) + g(x)$ und $fg = f \cdot g : X \longrightarrow \mathbf{R}$, $(f \cdot g)(x) := f(x) \cdot g(x)$.

2.1.2 Injektiv, surjektiv, bijektiv

Sei $f : X \longrightarrow Y$ eine Abbildung

Besteht $f^{-1}(\{y\})$ aus wenigstens einem Element für alle $y \in Y$, so heißt f *surjektiv.*

Besteht $f^{-1}(\{y\})$ aus höchstens einem Element für alle $y \in Y$, so heißt f *injektiv.*

Besteht $f^{-1}(\{y\})$ aus genau einem Element für alle $y \in Y$, so heißt f *bijektiv.*

Es ist also f genau dann surjektiv, wenn $f(X) = Y$. Es ist f genau dann injektiv, wenn verschiedene Elemente stets auf verschiedene Elemente abgebildet werden. Es ist f genau dann bijektiv, wenn f injektiv und surjektiv ist.

Ist $f : X \longrightarrow Y$ bijektiv, so gibt es die Umkehrabbildung $f^{-1} : Y \longrightarrow X$ mit der Eigenschaft, daß $f(x) = y$ genau dann gilt, wenn $x = f^{-1}(y)$.

Der Zusammenhang zur Urbildoperation ist diesenfalls: $f^{-1}(\{y\}) = \{f^{-1}(y)\}$.

Z.B. ist obiges h nicht surjektiv wegen $h^{-1}(\{2\}) = \emptyset$, d.h. wegen $2 \not\in h(\{1,2,3\})$. Ferner ist h nicht injektiv, da $h^{-1}(\{1\}) = \{1,2\}$ mehr als nur ein Element aufweist, d.h. da $1 \neq 2$, aber $h(1) = h(2)$.

Z.B. ist obiges q weder injektiv (z.B. da $q(-1) = q(1)$) noch surjektiv (z.B. da $-1 \not\in q(\mathbf{R})$), aber seine Einschränkung $q_+ := q|_{\mathbf{R}_{\geqslant 0}}^{\mathbf{R}_{\geqslant 0}}$ ist bijektiv, mit $(q_+)^{-1} : \mathbf{R}_{\geqslant 0} \longrightarrow \mathbf{R}_{\geqslant 0}$, $y \longmapsto \sqrt{y}$.

2.1.3 Schnitt und Vereinigung

Seien $A, B \;\subseteq\; X$ Teilmengen. Wir erinnern an den Begriff des Schnitts $A \cap B = \{\, x \in X \;:\; x \in A \text{ und } x \in B \,\}$, der Vereinigung $A \cup B = \{\, x \in X \;:\; x \in A \text{ oder } x \in B \,\}$ und der Differenz $A \smallsetminus B = \{\, x \in X \;:\; x \in A, \text{ aber } x \not\in B \,\}$.

Sei $f : X \longrightarrow Y$ eine Abbildung. Seien $U_1\,,\, U_2 \,\subseteq\, X$.

Es ist $f(U_1 \cup U_2) = f(U_1) \cup f(U_2)$.

Es ist $f(U_1 \cap U_2) \subseteq f(U_1) \cap f(U_2)$. Gleichheit gilt hier, falls f injektiv ist, sonst im allgemeinen nicht.

Seien $V_1, V_2 \subseteq Y$.

Es ist $f^{-1}(V_1 \cup V_2) = f^{-1}(V_1) \cup f^{-1}(V_2)$.

Es ist $f^{-1}(V_1 \cap V_2) = f^{-1}(V_1) \cap f^{-1}(V_2)$.

2.1.4 Kompositum

Seien $f : X \longrightarrow Y$ und $g : Y \longrightarrow Z$ Abbildungen. Ihr *Kompositum,* auch *Verkettung* genannt, ist durch

$$g \circ f \; : \; X \longrightarrow Z \, , \quad x \longmapsto (g \circ f)(x) \; := \; g(f(x))$$

definiert (gesprochen "g nach f").

2.2 Folgen und Grenzwerte

2.2.1 Folgen

Sei $k \in \mathbf{Z}$. Sei Y eine Menge. Eine Abbildung $f : \mathbf{Z}_{\geqslant k} \longrightarrow Y$ heißt auch eine *Folge* und wird auch

$$f \;=:\; (f(n))_{n \geqslant k} \;=\; (f_n)_{n \geqslant k} \;=\; (f_n)_n \;=\; (f_k\,,\, f_{k+1}\,,\, f_{k+2}\,,\, \dots)$$

geschrieben.

Ist $Y = \mathbf{R}$, so spricht man auch von einer *reellen Folge.*

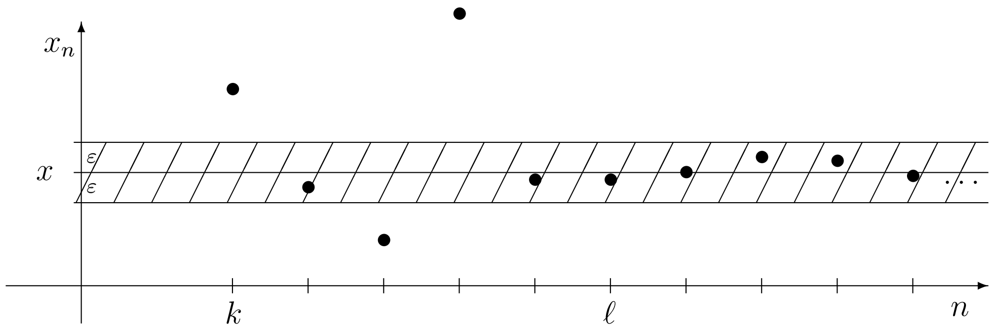
So z.B. ist $(1/n)_{n \geqslant 1} = (1/1, 1/2, 1/3, \dots)$ eine reelle Folge.

2.2.2 Grenzwerte

Sei $(x_n)_{n \geqslant k}$ eine reelle Folge. Es heißt $x \in \mathbf{R}$ ihr *Grenzwert* oder *Limes,* falls für alle $\varepsilon \in \mathbf{R}_{>0}$ ein $\ell \in \mathbf{Z}_{\geqslant k}$ mit $|x - x_n| < \varepsilon$ für $n \geqslant \ell$ existiert. Diesenfalls ist dieser eindeutig bestimmt und wird

$$\lim_{n \to \infty} x_n \;=\; \lim_n x_n \;:=\; x$$

geschrieben.



Es ist x also ein Grenzwert von $(x_n)_n$, falls für jede beliebig kleine Fehlerschranke ε eine Stelle ℓ gefunden werden kann, ab der der Abstand $|x - x_n|$ diese Fehlerschranke nicht mehr überschreitet.

Eine reelle Folge $(x_n)_n$ *konvergiert* oder *ist konvergent,* falls sie einen Grenzwert hat. Sie *divergiert* oder *ist divergent,* falls sie keinen Grenzwert hat.

Grenzwerte werden üblicherweise berechnet, indem man mittels Regeln die zu betrachtende Folge auf bekannte Beispiele zurückführt.

Beispiel.

(1) Für $x \in \mathbf{R}$ konvergiert die konstante Folge $(x)_n = (x, x, x, \ldots)$ gegen x, d.h. $\lim_{n\to\infty} x = x$.

(2) Sei $a \in \mathbf{Z}_{\geqslant 1}$. Es ist 0 der Grenzwert von $(n^{-a})_{n\geqslant 1}$, d.h. $\lim_{n\to\infty} n^{-a} = 0$. Denn für gegebenes $\varepsilon > 0$ ist $|n^{-a} - 0| < \varepsilon$, falls $n > 1/\sqrt[a]{\varepsilon}$. Als ℓ kann somit jede ganze Zahl $\geqslant 1/\sqrt[a]{\varepsilon}$ gewählt werden.

(3) Sei $q \in (-1, 1)$. Es ist 0 der Grenzwert von $(q^n)_{n\geqslant 0}$, d.h. $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$.

Dazu können wir $h := 1/|q| - 1 > 0$ setzen und erhalten $|q| = 1/(1 + h)$, gemäß binomischem Lehrsatz aus §1.3.2 also $|q^n - 0| = |q|^n = 1/(1+h)^n \leqslant 1/(1+nh)$. Daher erhalten wir für $\varepsilon > 0$ bereits $|q^n - 0| < 1/(1 + nh) < \varepsilon$, falls nur $n > (\varepsilon^{-1} - 1)/h$ ist, sodaß wir für ℓ jede ganze Zahl $\geqslant (\varepsilon^{-1} - 1)/h$ wählen können.

Bemerkung. Seien $(x_n)_n$ und $(y_n)_n$ konvergente reelle Folgen. Seien $\lambda,\ \mu \in \mathbf{R}$. Dann ist

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty}(\lambda x_n + \mu y_n) &= \lambda(\lim_{n\to\infty} x_n) + \mu(\lim_{n\to\infty} y_n) \\ \lim_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) &= (\lim_{n\to\infty} x_n) \cdot (\lim_{n\to\infty} y_n) \end{aligned}$$

Ist $\lim_{n\to\infty} y_n \neq 0$ und ist $y_n \neq 0$ stets, dann gilt auch

$$\frac{\lim_{n\to\infty} x_n}{\lim_{n\to\infty} y_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} .$$

So wird z.B.

$$\lim_n \frac{3n^2+4}{2n^2+3n} \;=\; \lim_n \frac{3+4n^{-2}}{2+3n^{-1}} \;=\; \frac{\lim_n 3 + 4\lim_n n^{-2}}{\lim_n 2 + 3\lim_n n^{-1}} \;=\; \frac{3}{2}\,.$$

Bemerkung. Sei $(x_n)_{n\geqslant k}$ eine reelle Folge mit Grenzwert x. Sei $\ell \geqslant k$. Dann ist auch die (vorne abgeschnittene) Folge $(x_n)_{n\geqslant \ell}$ konvergent und hat den Grenzwert x.

Lemma. Sei $(x_n)_n$ eine reelle Folge mit $x_n \leqslant x_{n+1}$ stets. Gibt es ein $s \in \mathbf{R}$ mit $x_n \leqslant s$ für alle n, dann konvergiert $(x_n)_n$.

Als Grenzwert ergibt sich hier der “minimale Wert, der nicht von Folgengliedern überlaufen wird”. Genauer kennen wir ihn aber im allgemeinen nicht!

Lemma (Sandwich). Seien $(x_n)_n$, $(y_n)_n$ und $(z_n)_n$ reelle Folgen. Sei $x_n \leqslant y_n \leqslant z_n$ stets. Seien $(x_n)_n$ und $(z_n)_n$ konvergent mit $\lim_n x_n = \lim_n z_n$. Dann ist auch $(y_n)_n$ konvergent, und es ist

$$\lim_n x_n \;=\; \lim_n y_n \;=\; \lim_n z_n\,.$$

Beispiel. Da $-\frac{1}{n} \leqslant \frac{\cos(n)}{n} \leqslant \frac{1}{n}$ stets, und da die äußeren beiden Folgen gegen 0 konvergieren, ist auch $\lim_n \frac{\cos(n)}{n} = 0$.

2.3 Reihen

2.3.1 Begriff

Sei $k \in \mathbf{Z}$. Eine *(reelle) Reihe* ist eine reelle Folge der Form

$$\textstyle\sum_{i\geqslant k} a_i \;:=\; (\sum_{i=k}^n a_i)_{n\geqslant k} \;=\; (a_k\,,\, a_k + a_{k+1}\,,\, a_k + a_{k+1} + a_{k+2}\,,\, \dots)\,,$$

wobei $a_i \in \mathbf{R}$ für $i \geqslant k$.

Es handelt sich also um eine Folge von Teilsummen der nun zu definierenden “unendlichen Summe”.

Existiert ihr Grenzwert, so schreiben wir diesen

$$\textstyle\sum_{i=k}^\infty a_i \;:=\; \lim\limits_{n\to\infty} \sum_{i=k}^n a_i \;=\; a_k + a_{k+1} + a_{k+2} + \cdots\,.$$

Lemma. Konvergiert $\sum_{i\geqslant k} |a_i|$, dann konvergiert auch $\sum_{i\geqslant k} a_i$.

2.3.2 Geometrische Summe, geometrische Reihe

Sei $q \in \mathbf{R} \smallsetminus \{1\}$. Wir haben die *geometrische Summe*

$$\sum_{i=0}^{n} q^i \;=\; \frac{1-q^{n+1}}{1-q}\;,$$

denn $(1-q)(\sum_{i=0}^{n} q^i) = (\sum_{i=0}^{n} q^i) - q(\sum_{i=0}^{n} q^i) = (\sum_{i=0}^{n} q^i) - (\sum_{i=1}^{n+1} q^i) = q^0 - q^{n+1}$.
Diese liefert für $q \in (-1,+1)$ die *geometrische Reihe* $\sum_{i\geqslant 0} q^i$ mit Grenzwert

$$\textstyle\sum_{i=0}^{\infty} q^i \;=\; \lim\limits_n \sum_{i=0}^{n} q^i \;=\; \lim\limits_n \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q} \;=\; \dfrac{1-\lim_n q^{n+1}}{1-q} \;=\; \dfrac{1}{1-q}\;.$$

So z.B. ist $\sum_{i=0}^{\infty} (1/2)^i = 1 + 1/2 + 1/4 + \cdots = \dfrac{1}{1-1/2} = 2$.

2.3.3 Exponentialfunktion

Für $x \in \mathbf{R}$ konvergiert die Reihe $\sum_{n\geqslant 0} x^n/n!$, sodaß wir die *Exponentialfunktion* $\exp : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ durch *die Exponentialreihe*

$$\mathrm{e}^x \;=\; \exp(x) \;:=\; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \;=\; 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \cdots$$

definieren können.

Begründen wir die Konvergenz.

Sei $x \in \mathbf{R}_{>0}$. Sei $n \in \mathbf{Z}$ mit $|x| < n$ gewählt. Für $m \in \mathbf{Z}_{\geqslant n}$ ist

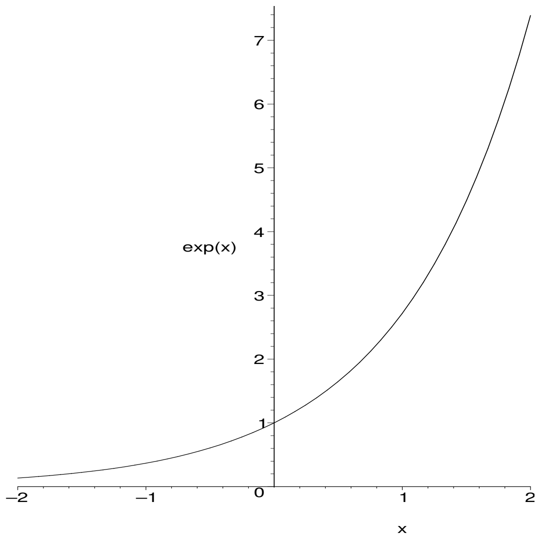
$$\frac{|x^{m+1}/(m+1)!|}{|x^m/m!|} \;=\; |x|/(m+1) \;<\; |x|/n \;=:\; q\;.$$

Die Summanden wachsen von n an also langsamer als die der Reihe $\sum_{m\geqslant n} q^n c$ mit $c \in \mathbf{R}_{>0}$ konstant. Da letztere konvergiert, konvergiert auch erstere; vgl. §2.3.2 und erstes Lemma in §2.2.2.

Für allgemeines $x \in \mathbf{R}$ vgl. nun das Lemma aus §2.3.1.

Z.B. ist $\mathrm{e}^0 = 1$. Es ist $\mathrm{e} := \mathrm{e}^1 = \exp(1) = 2{,}71828182845\ldots$.

Der Graph der Exponentialfunktion exp hat folgende Gestalt.



Um die Exponentenschreibweise e^x zu rechtfertigen, sollten wir begründen, daß

$$\mathrm{e}^{x+y} \; = \; \mathrm{e}^x \cdot \mathrm{e}^y$$

ist für $x,\, y \in \mathbf{R}$. Dazu rechnen wir

$$\begin{array}{rcl}
\mathrm{e}^x \cdot \mathrm{e}^y & = & \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{m!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!}\right) \\
& = & \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^m}{m!}\,\frac{y^n}{n!} \\
& \overset{k\,:=\,m+n}{=} & \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{k} \frac{x^m}{m!}\,\frac{y^{k-m}}{(k-m)!} \\
& = & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{m=0}^{k} \frac{k!}{m!(k-m)!}\, x^m y^{k-m} \\
& = & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{m=0}^{k} \binom{k}{m}\, x^m y^{k-m} \\
& \overset{\S 1.3.2}{=} & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(x+y)^k \\
& = & \mathrm{e}^{x+y}\;.
\end{array}$$

Um die Gültigkeit dieser Rechnung zu belegen, müßte man sich noch die Erlaubnis zu diesem Umsortieren der Summanden besorgen.

Nun folgt $\mathrm{e}^x \cdot \mathrm{e}^{-x} = \mathrm{e}^{x+(-x)} = \mathrm{e}^0 = 1$, und somit $\mathrm{e}^{-x} = (\mathrm{e}^x)^{-1}$.

Insbesondere ist e^z für $z \in \mathbf{Z}$ in der Tat die z-te Potenz von e im üblichen Sinne.

Es folgt auch, daß $\mathrm{e}^x > 0$ ist für $x \in \mathbf{R}$. Denn ist $x \geqslant 0$, so entnimmt man dies der Definition. Ist dagegen $x < 0$, so ist $\mathrm{e}^x = 1/\mathrm{e}^{-x} > 0$.

Die die Exponentialfunktion definierende Reihe ist ein Beispiel einer *Potenzreihe*. Einiges mehr dazu in §8.1 und §11.2.1.

2.4 Stetigkeit

2.4.1 Abstände im $\mathbf{R}^n$

Sei $n \geqslant 1$. Wir schreiben $\underline{x} := (x_1\,,\,\ldots\,,\,x_n) \in \mathbf{R}^n$. Solche Tupel sollen eintragsweise addiert und subtrahiert werden, also

$$\begin{array}{rcl} \underline{x} + \underline{y} & := & (x_1 + y_1\,,\,\ldots\,,\,x_n + y_n)\;, \\ \underline{x} - \underline{y} & := & (x_1 - y_1\,,\,\ldots\,,\,x_n - y_n) \end{array}$$

für $\underline{x}$, $\underline{y} \in \mathbf{R}^n$.

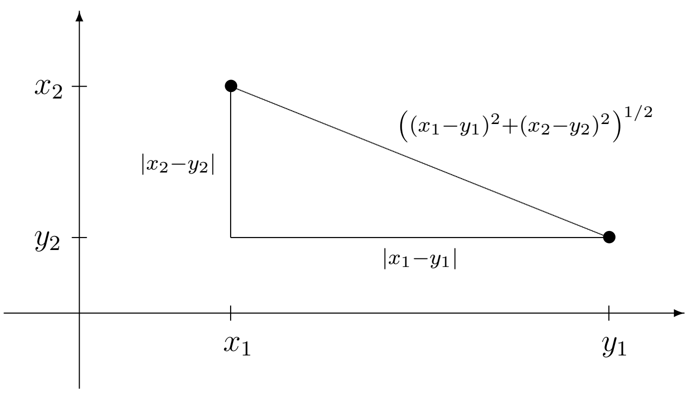
Wir schreiben

$$\|\underline{x}\| \;=\; \|(x_1\,,\,\ldots\,,\,x_n)\| \;:=\; (x_1^2 + \cdots + x_n^2)^{1/2}\;.$$

für die *Norm* von $\underline{x}$. Es ist

$$\|\underline{x} - \underline{y}\| \;=\; \big((x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2\big)^{1/2}$$

der *Abstand* von $\underline{x}$ und $\underline{y}$ in $\mathbf{R}^n$.



Z.B. ist der Abstand von $(-1, 2, 3)$ und $(1, 1, 1)$ gleich

$$\|(-1-1,\; 2-1,\; 3-1)\| \;=\; \sqrt{(-2)^2 + 1^2 + 2^2} \;=\; \sqrt{9} \;=\; 3\;.$$

Wir identifizieren $\mathbf{R}$ auch mit $\mathbf{R}^1$, indem wir kurz $x_1 := (x_1)$ schreiben für das einelementige Tupel mit dem Eintrag $x_1 \in \mathbf{R}$. Es wird $\|(x_1)\| = |x_1|$.

2.4.2 Stetigkeit von Funktionen in einer oder mehreren Variablen

Sei $n \geqslant 1$. Sei $D \subseteq \mathbf{R}^n$. Sei $f : D \longrightarrow \mathbf{R}$, $(x_1\,,\,\ldots\,,\,x_n) \longmapsto f(x_1\,,\,\ldots\,,\,x_n)$ eine auf dem Definitionsbereich D erklärte Abbildung. Es ist f also eine Funktion in n Veränderlichen.

Beispiel. Das Volumen eines Kegels mit Höhe h und kreisförmiger Grundfläche mit Radius r berechnet sich zu $V(r, h) = \frac{1}{3}\pi r^2 h$. Es ist $V : \mathbf{R}_{\geqslant 0} \times \mathbf{R}_{\geqslant 0} \longrightarrow \mathbf{R}$ also eine Funktion in den beiden Veränderlichen r und h; erklärt nur auf $(r,h) \in \mathbf{R}_{\geqslant 0} \times \mathbf{R}_{\geqslant 0}$, damit das noch einen geometrischen Sinn hat.

Unsere Funktion f wollen wir als stetig bezeichnen, wenn "keine Sprünge" auftreten, d.h. keine plötzlichen Änderungen des Funktionswertes. Was also vermieden werden sollte, ist, daß bei einer kleinen Änderung der Veränderlichen eine unmäßig große Änderung des Wertes von f auftritt. Dies formalisiert man wie folgt.

Definition. Es heiße f *stetig* an der Stelle $\underline{x} = (x_1\,, \ldots\,, x_n) \in D$, wenn für alle $\varepsilon \in \mathbf{R}_{>0}$ ein $\delta \in \mathbf{R}_{>0}$ so existiert, daß für alle $\underline{\tilde{x}} \in D$ mit $\|\underline{\tilde{x}} - \underline{x}\| < \delta$ auch

$$|f(\underline{\tilde{x}}) - f(\underline{x})| \;=\; |f(\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_n) - f(x_1\,, \ldots\,, x_n)| \;<\; \varepsilon$$

ist.

Umformuliert lautet die Bedingung, daß für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existieren soll mit

$$f(\{\underline{\tilde{x}} \in \mathbf{R}^n \;:\; \|\underline{\tilde{x}} - \underline{x}\| < \delta\}) \;\subseteq\; \{\, y \in \mathbf{R} \;:\; |y - f(\underline{x})| < \varepsilon \,\}\;.$$

Ist also $\underline{\tilde{x}}$ nur nahe genug bei $\underline{x}$ (Abstand $< \delta$), so sollte auch $f(\underline{\tilde{x}})$ nahe bei $f(\underline{x})$ sein (Abstand $< \varepsilon$).

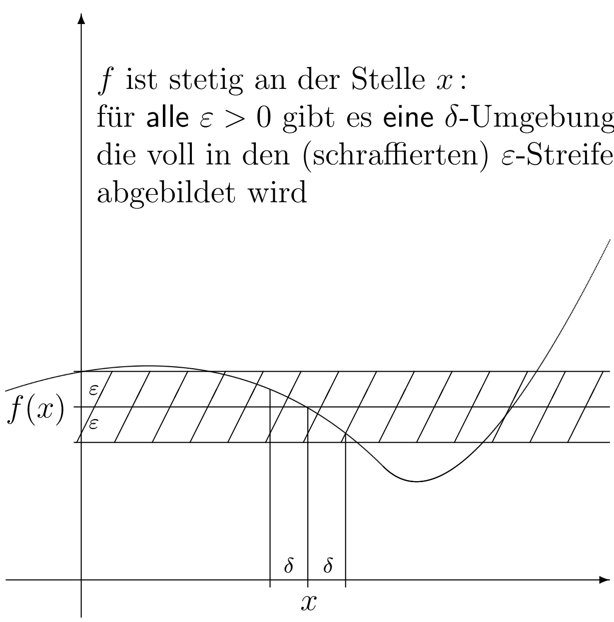
Umgekehrt ist f also nicht stetig an der Stelle $\underline{x} = (x_1\,, \ldots\,, x_n)$, wenn es ein $\varepsilon \in \mathbf{R}_{>0}$ so gibt, daß für alle $\delta \in \mathbf{R}_{>0}$ ein $\underline{\tilde{x}} \in D$ mit $\|\underline{\tilde{x}} - \underline{x}\| < \delta$ so existiert, daß

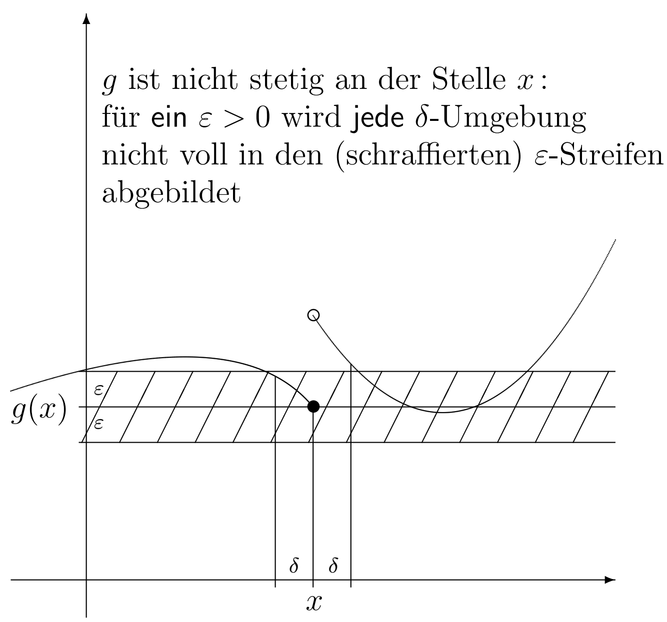
$$|f(\underline{\tilde{x}}) - f(\underline{x})| \;\geqslant\; \varepsilon$$

ist.

Dies sollte man wie folgt lesen. Es gibt eine Fehlerschranke ε so, daß für jeden noch so kleinen Wert δ diese Fehlerschranke im Abstand $< \delta$ von $\underline{x}$ nicht eingehalten wird. Bei der Stelle $\underline{x}$ liegt also ein Sprung um mindestens ε vor, da für $\underline{\tilde{x}}$ beliebig nahe bei $\underline{x}$ plötzlich eine Änderung von $\geqslant \varepsilon$ auftritt.

Ist $n = 1$, so wird hierbei $\|\underline{\tilde{x}} - \underline{x}\|$ zu $|\tilde{x} - x|$.





Definition. Es heißt $f : D \longrightarrow \mathbf{R}$ *stetig,* wenn f an jeder Stelle $\underline{x} \in D$ stetig ist.

Ist $f : D \longrightarrow \mathbf{R}$ stetig und ist $E \subseteq D$, so ist mit also auch die Einschränkung $f|_E : E \longrightarrow \mathbf{R}$ stetig.

Im Falle $n = 1$ und eines Intervalls $D \subseteq \mathbf{R}$ ist, anschaulich gesprochen, eine Funktion $f : D \to \mathbf{R}$, $x \mapsto f(x)$ stetig, falls man ihren Graph zeichnen kann, ohne den Stift abzusetzen.

Bemerkung.

(1) Sei $y_0 \in \mathbf{R}$ konstant. Es definiert $f(\underline{x}) = f(x_1, \dots, x_n) := y_0$ eine stetige Funktion $f : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}$.

(2) Sei $1 \leqslant i \leqslant n$. Es definiert $f(\underline{x}) = f(x_1, \dots, x_n) := x_i$ eine stetige Funktion $f : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}$.

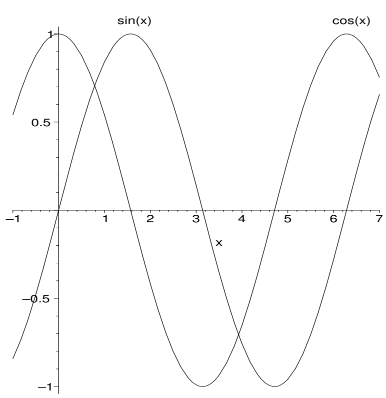
(3) Produkte und Summen stetiger Funktionen sind stetig.

(4) Es ist $f : \mathbf{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbf{R}$, $x \longmapsto f(x) = 1/x$ stetig.

(5) Es ist $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$, $x \longmapsto f(x) = \mathrm{e}^x$ stetig.

(6) Es ist $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$, $x \longmapsto f(x) = \sin(x)$ stetig.

(7) Es ist $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$, $x \longmapsto f(x) = \cos(x)$ stetig.



(8) Sei $D \subseteq \mathbf{R}^n$. Sei $E \subseteq \mathbf{R}$.

Sei $f : D \longrightarrow \mathbf{R}$ stetig. Sei $f(D) \subseteq E$.

Sei $g : E \longrightarrow \mathbf{R}$ stetig.

Dann ist $g \circ (f|_D^E) : D \longrightarrow \mathbf{R}$, $\underline{x} \longmapsto g(f(\underline{x}))$ stetig.

(9) Sei $D \subseteq \mathbf{R}$ ein Intervall. Sei $f : D \longrightarrow \mathbf{R}$ injektiv.

Es ist $f|_D^{f(D)}$ bijektiv; ihre Umkehrabbildung heiße $g : f(D) \longrightarrow D$.

Ist f stetig, so ist $f(D)$ ein Intervall und die Abbildung $f(D) \longrightarrow \mathbf{R}$, $x \longmapsto g(x)$ stetig.

Damit kann man nun zusammensetzen.

Beispiel.

(1) Es sind mit (1), (2), (3) alle Polynome stetig, wie etwa

$$f : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R} : \underline{x} \longmapsto f(\underline{x}) = f(x_1\,,\, x_2\,,\, x_3) := x_1^4 x_3 - 5x_1x_2 + 1\;.$$

(2) Es definiert $f(x) := \mathrm{e}^{1/x^2}$ eine stetige Funktion von $\mathbf{R} \smallsetminus \{0\}$ nach $\mathbf{R}$.

Denn mit (4) und (3) ist $f : \mathbf{R} \smallsetminus \{0\} \longrightarrow \mathbf{R}$, $x \longmapsto 1/x^2$ stetig.

Mit (5) ist $g : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$, $x \longmapsto \mathrm{e}^x$ stetig.

Mit (8) ist also auch

$$g \circ f : \mathbf{R} \smallsetminus \{0\} \longrightarrow \mathbf{R}\,,\;\; x \;\longmapsto\; g(f(x)) \;=\; g(1/x^2) \;=\; \mathrm{e}^{1/x^2}$$

stetig.

(3) Es definiert $f(x,y) := \frac{x^2+y^2}{xy-1}$ eine stetige Funktion von $D := \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \;:\; xy \neq 1\}$ nach $\mathbf{R}$. Wir haben in (8) also das D dem E durch Urbildnahme angepaßt und dann noch (3) angewandt.

(4) Es ist mit $f : \mathbf{R}_{\geqslant 0} \longrightarrow \mathbf{R}$, $x \longmapsto f(x) = x^2$ dank (9) auch

$$g : \mathbf{R}_{\geqslant 0} \longrightarrow \mathbf{R},\; x \longmapsto g(x) \;:=\; \sqrt{x}$$

stetig.

Bemerkung. Sei $D \subseteq \mathbf{R}$. Sei $f : D \longrightarrow \mathbf{R}$ stetig. Ist $(x_n)_n$ eine konvergente reelle Folge mit $x_n \in D$ stets und Grenzwert in D, so ist $(f(x_n))_n$ konvergent mit

$$\lim_n f(x_n) \;=\; f(\lim_n x_n)\;.$$

Schreibe hierzu $x := \lim_n x_n \in D$. Wir wollen zeigen, daß $\lim_n f(x_n) \overset{!}{=} f(x)$ ist. Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Da f an der Stelle x stetig ist, gibt es ein $\delta > 0$ so, daß für $\tilde{x} \in D$ mit $|\tilde{x} - x| < \delta$ noch $|f(\tilde{x}) - f(x)| < \varepsilon$ ist. Da $(x_n)_n$ gegen x konvergiert, gibt es ein ℓ mit $|x_n - x| < \delta$ für $n \geqslant \ell$. Nach Wahl von δ ist dann aber auch $|f(x_n) - f(x)| < \varepsilon$ für $n \geqslant \ell$. Damit ist gezeigt, daß $(f(x_n))_n$ gegen $f(x)$ konvergiert, wie gewünscht.

Beispiel. Zusammen mit (4) aus dem vorigen Beispiel gibt diese Bemerkung

$$\lim_n \sqrt{1 + \tfrac{1}{n}} \;=\; \sqrt{\lim_n (1 + \tfrac{1}{n})} \;=\; \sqrt{1} \;=\; 1\;.$$

Das gilt für nichtstetige Funktionen nicht. Sei etwa $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$, $f(x) := \begin{cases} 0 & \text{für } x \leqslant 0 \\ 1 & \text{für } x > 0 \end{cases}$.
Diese Funktion ist an der Stelle 0 nicht stetig, da für $\varepsilon = \frac{1}{2}$ für alle $\delta > 0$ sicher $f((-\delta, +\delta)) = \{0,1\} \not\subseteq (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ ist. Desweiteren konvergiert die Folge $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \dots)$ gegen 0, während die Folge der Bildpunkte $(f(-\frac{1}{2}), f(\frac{1}{2}), f(-\frac{1}{3}), f(\frac{1}{3}), f(-\frac{1}{4}), f(\frac{1}{4}), \dots) = (0,1,0,1,0,1,\dots)$ divergiert.

Bemerkung. Sei $D \subseteq \mathbf{R}$. Sei $f : D \longrightarrow \mathbf{R}$ stetig. Sei $I \subseteq D$ ein Intervall. Dann ist auch $f(I) \subseteq \mathbf{R}$ ein Intervall.

2.4.3 Funktionsgrenzwerte an endlichen Stellen

Sei $n \geqslant 1$. Sei $D \subseteq \mathbf{R}^n$. Sei $\underline{x} \in D$. Sei $f : D \smallsetminus \{\underline{x}\} \longrightarrow \mathbf{R}$.

Für $y \in \mathbf{R}$ setzen wir

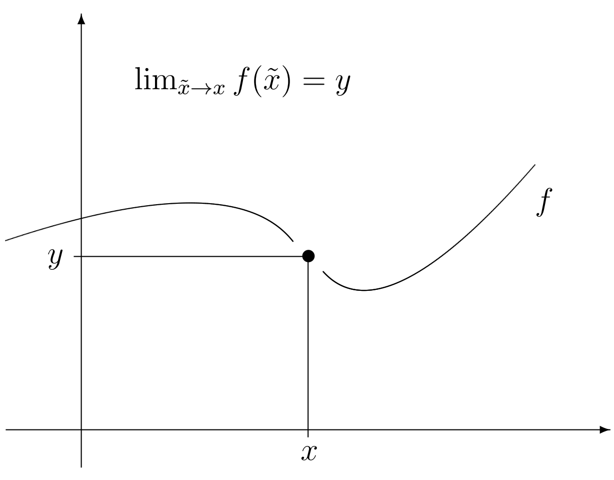
$$\begin{array}{rcl} \hat{f} \;:\; D & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ \underline{\tilde{x}} & \longmapsto & \begin{cases} f(\underline{\tilde{x}}) & \text{falls } \underline{\tilde{x}} \in D \smallsetminus \{\underline{x}\} \\ y & \text{falls } \underline{\tilde{x}} = \underline{x}\ . \end{cases} \end{array}$$

Definition. Ist $\hat{f}$ stetig in $\underline{x}$ für ein $y \in \mathbf{R}$, so heißt f *konvergent* an der Stelle $\underline{x}$, und es heißt y der *Grenzwert* (oder *Limes*) von f für $\underline{\tilde{x}} \to \underline{x}$, geschrieben

$$y \;=:\; \lim_{\underline{\tilde{x}} \to \underline{x}} f(\underline{\tilde{x}})\ .$$

Anschaulich gesprochen füllt dann der Punkt $(\underline{x}, y)$ die Lücke des Graphen von f bei $\underline{x}$.

Skizze im Fall $n = 1$:



Umgekehrt gesprochen ist eine Abbildung $g : D \longrightarrow \mathbf{R}$ genau dann stetig in $\underline{x} \in D$, falls $g(\underline{x}) = \lim_{\underline{\tilde{x}} \to \underline{x}} g|_{D \smallsetminus \{\underline{x}\}}(\underline{\tilde{x}})$. Ist g stetig an einer Stelle $\underline{x} \in D$, so stimmen dort insbesondere Grenz- und Funktionswert überein.

Mehr Beispiele als nur mit den folgenden Regeln werden wir rechnen können, sobald wir die Regel von de l'Hôpital kennen, für die wir noch den Ableitungsbegriff brauchen.

Bemerkung. Seien $f,\, g : D \smallsetminus \{\underline{x}\} \longrightarrow \mathbf{R}$ konvergent in $\underline{x}$. Seien $\lambda,\, \mu \in \mathbf{R}$. Dann ist

$$\begin{aligned} \lim_{\tilde{\underline{x}}\to\underline{x}}(\lambda f(\tilde{\underline{x}}) + \mu g(\tilde{\underline{x}})) &= \lambda \lim_{\tilde{\underline{x}}\to\underline{x}} f(\tilde{\underline{x}}) + \mu \lim_{\tilde{\underline{x}}\to\underline{x}} g(\tilde{\underline{x}}) \\ \lim_{\tilde{\underline{x}}\to\underline{x}}(f(\tilde{\underline{x}}) \cdot g(\tilde{\underline{x}})) &= (\lim_{\tilde{\underline{x}}\to\underline{x}} f(\tilde{\underline{x}})) \cdot (\lim_{\tilde{\underline{x}}\to\underline{x}} g(\tilde{\underline{x}})) \end{aligned}$$

Ist $\lim_{\tilde{\underline{x}}\to\underline{x}} g(\tilde{\underline{x}}) \neq 0$ und ist $g(\tilde{\underline{x}}) \neq 0$ stets, so ist

$$\lim_{\tilde{\underline{x}}\to\underline{x}}(f(\tilde{\underline{x}})/g(\tilde{\underline{x}})) \;=\; (\lim_{\tilde{\underline{x}}\to\underline{x}} f(\tilde{\underline{x}}))/(\lim_{\tilde{\underline{x}}\to\underline{x}} g(\tilde{\underline{x}}))\;.$$

Ist $E \subseteq \mathbf{R}$ derart, daß $f(D \smallsetminus \{\underline{x}\}) \subseteq E$ und $\lim_{\tilde{\underline{x}}\to\underline{x}} f(\tilde{\underline{x}}) \in E$ ist, und ist $h : E \longrightarrow \mathbf{R}$ stetig, so ist

$$\lim_{\tilde{\underline{x}}\to\underline{x}} h(f(\tilde{\underline{x}})) \;=\; h(\lim_{\tilde{\underline{x}}\to\underline{x}} f(\tilde{\underline{x}}))\;.$$

2.4.4 Funktionsgrenzwerte an unendlichen Stellen

Sei $D \subseteq \mathbf{R}$. Sei $f : D \longrightarrow \mathbf{R}$. Sei $y \in \mathbf{R}$.

Sei $D = \mathbf{R}$ oder $D = (a, \infty)$ für ein $a \in \mathbf{R}$. Es ist $y = \lim_{x\to\infty} f(x)$, falls für alle $\varepsilon \in \mathbf{R}_{>0}$ ein $s \in D$ so existiert, daß

$$|f(x) - y| \;<\; \varepsilon$$

ist für alle $x \in (s\,,\,\infty)$.

Sei $D = \mathbf{R}$ oder $D = (-\infty, a)$ für ein $a \in \mathbf{R}$. Es ist $y = \lim_{x\to-\infty} f(x)$, falls für alle $\varepsilon \in \mathbf{R}_{>0}$ ein $s \in D$ so existiert, daß

$$|f(x) - y| \;<\; \varepsilon$$

ist für alle $x \in (-\infty, s)$.

Die Regeln entsprechen denen für Grenzwerte an endlichen Stellen.

Beispiel. Es ist

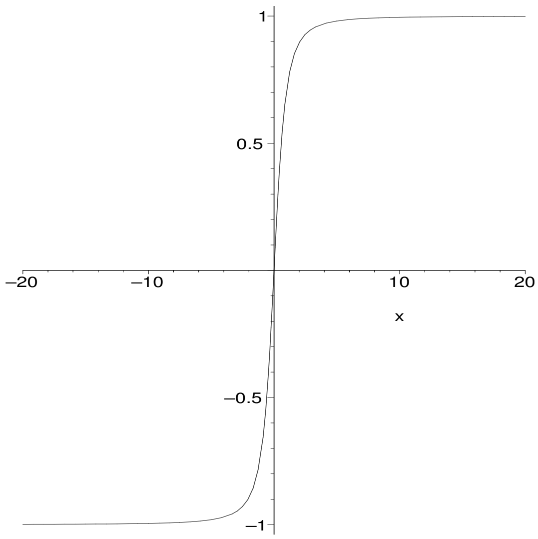
$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \;=\; \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2}}{\sqrt{1+x^2}} \;=\; \lim_{x\to\infty} \sqrt{\frac{x^2}{1+x^2}} \;=\; \sqrt{\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{1+x^2}} \;=\; 1$$

(wobei beim Umformen $x > 0$ verwandt wurde, um auf $x = \sqrt{x^2}$ zu schließen) und

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \;=\; \lim_{x\to-\infty} \frac{-\sqrt{x^2}}{\sqrt{1+x^2}} \;=\; -\lim_{x\to\infty} \sqrt{\frac{x^2}{1+x^2}} \;=\; -\sqrt{\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{1+x^2}} \;=\; -1$$

(wobei beim Umformen $x < 0$ verwandt wurde, um auf $x = -\sqrt{x^2}$ zu schließen).

In der Tat hat der Graph dieser Funktion folgende Gestalt.



Kapitel 3

Differentialrechnung

3.1 Innere Punkte und Offenheit

Sei $n \geqslant 1$. Sei $D \subseteq \mathbf{R}^n$. Ein Element $\underline{x} \in D$ heißt *inner,* wenn ein $\varepsilon > 0$ so existiert, daß

$$\{ \underline{\tilde{x}} \in \mathbf{R}^n \,:\, \|\underline{\tilde{x}} - \underline{x}\| < \varepsilon \} \;\subseteq\; D\,.$$

Eine Teilmenge $D \subseteq \mathbf{R}^n$ heißt *offen,* falls alle ihre Elemente inner sind.

Anschaulich gesprochen, eine offene Teilmenge enthält keine Randpunkte.

Z.B. ist $(a, b) \subseteq \mathbf{R}$ offen in $\mathbf{R}$, wobei $a < b$.

Dagegen ist $(a, b]$ nicht offen in $\mathbf{R}$, da b kein innerer Punkt ist. Denn es ist $(b-\varepsilon, b+\varepsilon) \not\subseteq (a, b]$, wie klein man $\varepsilon \in \mathbf{R}_{>0}$ auch wählt.

Z.B. ist die offene Kreisscheibe $\{ (x, y) \in \mathbf{R}^2 \,:\, x^2 + y^2 < 1 \}$ von Radius 1 offen in $\mathbf{R}^2$.

3.2 Funktionen in einer Variablen

3.2.1 Ableitung

Sei $D \subseteq \mathbf{R}$. Sei $f : D \longrightarrow \mathbf{R}$.

Definition. Sei $x \in D$ ein innerer Punkt.

Falls existent, so schreiben wir

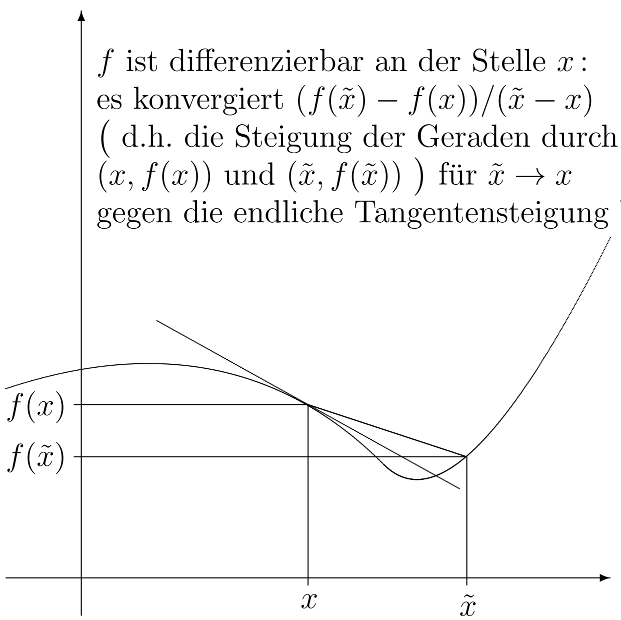
$$f'(x) \;:=\; \lim_{\tilde{x} \to x} \frac{f(\tilde{x}) - f(x)}{\tilde{x} - x} \;\overset{t := \tilde{x} - x}{=}\; \lim_{t \to 0} \frac{f(x+t) - f(x)}{t}\,.$$

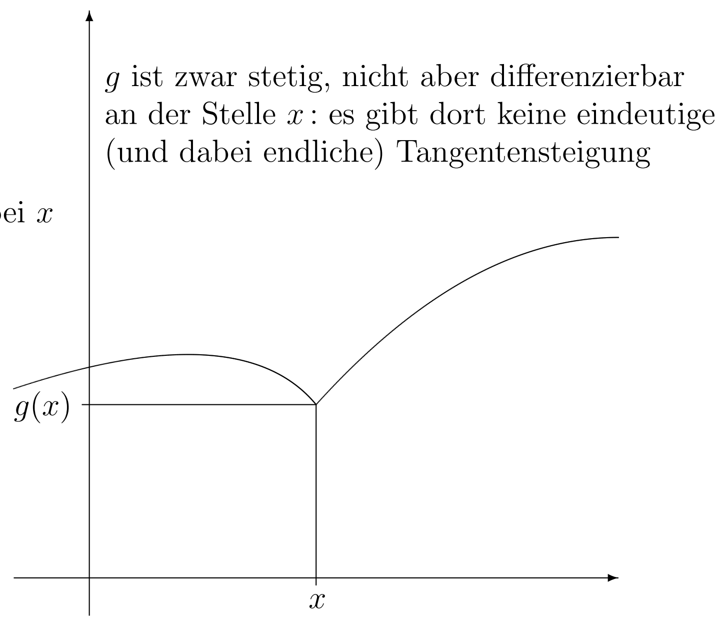
Diesenfalls heißt f *differenzierbar* an der Stelle x.

Ist f differenzierbar an der Stelle x, so ist f dort auch stetig.

Da $\frac{f(\tilde{x})-f(x)}{\tilde{x}-x}$ die Steigung der Geraden durch die Punkte $(x, f(x))$ und $(\tilde{x}, f(\tilde{x}))$ ist, wird daraus nach Grenzübergang $\tilde{x} \to x$, daß $f'(x)$ die Steigung der Tangenten an den Graphen von f im Punkte $(x, f(x))$ ist.

Ist f stetig an der Stelle x, so lautet die Merkregel: f ist differenzierbar an der Stelle x, wenn der Graph von f dort keinen Knick und keine vertikale Tangente hat.





Definition. Ist $D \subseteq \mathbf{R}$ offen und ist f differenzierbar an jeder Stelle $x \in D$, so heißt f *differenzierbar.* Es heißt $f' : D \longrightarrow \mathbf{R}$, $x \longmapsto f'(x)$ die (erste) *Ableitung* von f. Man schreibt auch $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} := f'$.

Ist f' wieder differenzierbar, so heißt $f'' := (f')'$ die *zweite Ableitung* von f. Usf.

Gebräuchlich ist auch die etwas laxe Schreibweise $(f(x))' := f'(x)$, also z.B. $(x^2)' = 2x$.

Bemerkung.

Sei $D \subseteq \mathbf{R}$ offen. Seien f, g : $D \longrightarrow \mathbf{R}$ differenzierbar. Seien λ, $\mu \in \mathbf{R}$.

(1) Ist D ein Intervall, so ist $f'(x) = 0$ für alle $x \in D$ genau dann, wenn f konstant ist, d.h. wenn es ein $c \in \mathbf{R}$ gibt mit $f(x) = c$ für $x \in D$.

(2) Es ist $\lambda f + \mu g : D \longrightarrow \mathbf{R}$, $x \longmapsto \lambda f(x) + \mu g(x)$ differenzierbar. Es ist

$$(\lambda f + \mu g)' \;=\; \lambda f' + \mu g' \,.$$

(3) Es ist $f \cdot g : D \longrightarrow \mathbf{R}$, $x \longmapsto f(x) \cdot g(x)$ differenzierbar. Die *Produktregel* besagt, daß

$$(f \cdot g)' \;=\; f' \cdot g + f \cdot g' \,.$$

(4) Sei $g(x) \neq 0$ für alle $x \in D$. Es ist $f/g : D \longrightarrow \mathbf{R}$, $x \longmapsto f(x)/g(x)$ differenzierbar. Die *Quotientenregel* besagt

$$\left(\frac{f}{g}\right)' \;=\; \frac{f'g - fg'}{g^2}\;.$$

Merksatz: "Zähler zuerst ableiten."

(5) Sei $f : D \longrightarrow \mathbf{R}$ differenzierbar. Sei $E \subseteq \mathbf{R}$ offen mit $f(D) \subseteq E$. Sei $h : E \longrightarrow \mathbf{R}$ differenzierbar. Die *Kettenregel* besagt

$$(h \circ (f|_D^E))' \;=\; (h' \circ (f|_D^E)) \cdot f'\;.$$

Etwas lax ausgedrückt ist also

$$(h(f(x)))' \;=\; h'(f(x)) \cdot f'(x)\;.$$

Den ersten Faktor, $h'(f(x))$, nennt man hierbei die *äußere* Ableitung, den zweiten, $f'(x)$, die *innere* Ableitung.

(6) Ist $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$, $x \longmapsto f(x) = \mathrm{e}^x$, so ist auch $f'(x) = \mathrm{e}^x$.

Kurz, $\exp' = \exp$, d.h. $(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$.

(7) Ist $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$, $x \longmapsto f(x) = \sin(x)$, so ist $f'(x) = \cos(x)$.

Kurz, $\sin(x)' = \cos(x)$. Noch kürzer, $\sin' = \cos$.

(8) Ist $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$, $x \longmapsto f(x) = \cos(x)$, so ist $f'(x) = -\sin(x)$.

Kurz, $\cos(x)' = -\sin(x)$. Noch kürzer, $\cos' = -\sin$.

Ist $n \in \mathbf{Z}_{\geqslant 2}$ und sind $f_1\,,\ f_2\,,\ \dots,\ f_n\ :\ D \longrightarrow \mathbf{R}$ differenzierbar, so wird

$$(f_1 \cdot f_2 \cdots f_n)' \;=\; \sum_{i=1}^{n} f_1 \cdots f_{i-1} \cdot f_i' \cdot f_{i+1} \cdots f_n\;.$$

Denn mit (3) und Induktion folgt

$$\begin{array}{rcl}
(f_1 \cdot f_2 \cdots f_n)' & = & (f_1 \cdot (f_2 \cdots f_n))' \\
& = & f_1' \cdot (f_2 \cdots f_n) + f_1 \cdot (f_2 \cdots f_n)' \\
& \overset{\text{I.V.}}{=} & f_1' \cdot (f_2 \cdots f_n) + f_1 \cdot \left(\sum_{i=2}^n f_2 \cdots f_{i-1} \cdot f_i' \cdot f_{i+1} \cdots f_n\right) \\
& = & \sum_{i=1}^n f_1 \cdots f_{i-1} \cdot f_i' \cdot f_{i+1} \cdots f_n\;.
\end{array}$$

Für $n \in \mathbf{Z}_{\geqslant 2}$ folgt insbesondere aus $x' = 1$ die Ableitung

$$(*) \qquad (x^n)' \;=\; nx^{n-1}\;.$$

Für Polynome ergibt sich mit (2) also

$$(a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x^1 + a_0 x^0)' \;=\; a_n n x^{n-1} + a_{n-1}(n-1)x^{n-2} + \dots + a_1 \cdot 1 \cdot x^0\;,$$

wobei $a_i \in \mathbf{R}$.

Für $n \in \mathbf{Z}_{\geqslant 1}$ wird mit (4) auch $(x^{-n})' = (\frac{1}{x^n})' = \frac{-(x^n)'}{x^{2n}} = \frac{-nx^{n-1}}{x^{2n}} = -nx^{-n-1}$. Dies zeigt die Gültigkeit von $(*)$ für $n \in \mathbf{Z}$, da diese Formel für $n = 0$ und $n = 1$ ohnehin gilt.

Begründen wir die Produktregel. Es wird

$$\begin{aligned}
(f\cdot g)'(x) &= \lim_{t\to 0}\frac{f(x+t)g(x+t)-f(x)g(x)}{t}\\
&= \lim_{t\to 0}\frac{f(x+t)g(x+t)-f(x+t)g(x)+f(x+t)g(x)-f(x)g(x)}{t}\\
&= \big(\lim_{t\to 0}\frac{f(x+t)g(x+t)-f(x+t)g(x)}{t}\big)+\big(\lim_{t\to 0}\frac{f(x+t)g(x)-f(x)g(x)}{t}\big)\\
&= (\lim_{t\to 0} f(x+t))\cdot\big(\lim_{t\to 0}\frac{g(x+t)-g(x)}{t}\big)+\big(\lim_{t\to 0}\frac{f(x+t)-f(x)}{t}\big)\cdot g(x)\\
&= f(x)\cdot g'(x)+f'(x)\cdot g(x)\ .
\end{aligned}$$

Begründen wir die Kettenregel im Falle $E=\mathbf{R}$. Es wird

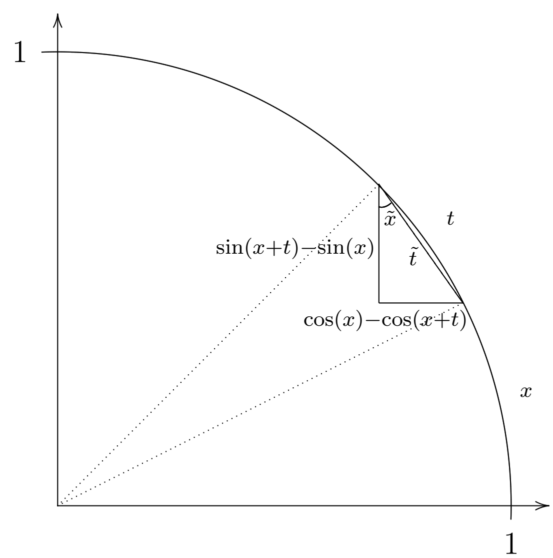
$$\begin{aligned}
(h\circ f)'(x) &= \lim_{\tilde{x}\to x}\frac{h(f(\tilde{x}))-h(f(x))}{\tilde{x}-x}\\
&= \lim_{\tilde{x}\to x}\frac{h(f(\tilde{x}))-h(f(x))}{f(\tilde{x})-f(x)}\cdot\frac{f(\tilde{x})-f(x)}{\tilde{x}-x}\\
&= \big(\lim_{\tilde{x}\to x}\frac{h(f(\tilde{x}))-h(f(x))}{f(\tilde{x})-f(x)}\big)\big(\lim_{\tilde{x}\to x}\frac{f(\tilde{x})-f(x)}{\tilde{x}-x}\big)\\
&\overset{\tilde{y}=f(\tilde{x}),\ y=f(x)}{=} \big(\lim_{\tilde{y}\to y}\frac{h(\tilde{y})-h(y)}{\tilde{y}-y}\big)\cdot\big(\lim_{\tilde{x}\to x}\frac{f(\tilde{x})-f(x)}{\tilde{x}-x}\big)\\
&= h'(y)\cdot f'(x)\\
&= h'(f(x))\cdot f'(x)\ .
\end{aligned}$$

Begründen wir, daß $(\mathrm{e}^x)'=\mathrm{e}^x$ ist. Es wird

$$(\mathrm{e}^x)' = \big(\textstyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\big)' = \sum_{n=0}^{\infty}\big(\frac{x^n}{n!}\big)' = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx^{n-1}}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} = \mathrm{e}^x\ .$$

Die Vertauschbarkeit von Ableitung und $\sum_{n=0}^{\infty}$ müßte man hierzu noch rechtfertigen.

Anhand folgender Skizze kann man sich die Ableitungen von $\sin(x)$ und $\cos(x)$ plausibel machen.



Es ist
$$\frac{\sin(x+t)-\sin(x)}{t} \;\approx\; \frac{\sin(x+t)-\sin(x)}{\tilde{t}} \;=\; \cos(\tilde{x}) \;\approx\; \cos(x)$$
und
$$\frac{\cos(x+t)-\cos(x)}{t} \;\approx\; -\frac{\cos(x)-\cos(x+t)}{\tilde{t}} \;=\; -\sin(\tilde{x}) \;\approx\; -\sin(x)\;,$$
wobei die Näherungen umso besser sind, je kleiner $|t|$ ist.

Beispiel.

Es ist $(x^4+3x^2+2x-1)' = 4x^3+6x+2$.

Es ist $(1/x)' = -1/x^2$.

Es ist $(1/x^3)' = -3/x^4$.

Es ist $\left(\frac{x+1}{x^2+1}\right)' = \frac{(x+1)'(x^2+1)-(x+1)(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} = \frac{(x^2+1)-(x+1)\cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{-x^2-2x+1}{(x^2+1)^2}$ nach Quotientenregel.

Es ist $(x\mathrm{e}^x)' = (x+1)\mathrm{e}^x$ nach Produktregel.

Es ist $(\mathrm{e}^{(x^2)})' = \mathrm{e}^{(x^2)}\cdot 2x$ nach Kettenregel.

Es ist $(\sin(1/x))' = \cos(1/x)\cdot(-1/x^2)$ nach Kettenregel, wobei $D = \mathbf{R}\smallsetminus\{0\}$.

3.2.2 Monotonie

Sei $D \subseteq \mathbf{R}$ ein offenes Intervall. Sei $f : D \longrightarrow \mathbf{R}$ differenzierbar.

Lemma.

(1) Es ist $f'(x) \geqslant 0$ für alle $x \in D$ genau dann, wenn $f(x_1) \leqslant f(x_2)$ ist für alle $x_1\,,\,x_2 \in D$ mit $x_1 < x_2$. Diesenfalls nennt man f *monoton wachsend.*

(2) Es ist $f'(x) \leqslant 0$ für alle $x \in D$ genau dann, wenn $f(x_1) \geqslant f(x_2)$ ist für alle $x_1\,,\,x_2 \in D$ mit $x_1 < x_2$. Diesenfalls nennt man f *monoton fallend.*

Lemma.

(1) Ist $f'(x) > 0$ für alle $x \in D$, so ist $f(x_1) < f(x_2)$ für alle $x_1\,,\,x_2 \in D$ mit $x_1 < x_2$; kurz, f ist *streng monoton wachsend.*

(2) Ist $f'(x) < 0$ für alle $x \in D$, so ist $f(x_1) > f(x_2)$ für alle $x_1\,,\,x_2 \in D$ mit $x_1 < x_2$; kurz, f ist *streng monoton fallend.*

Die Umkehrung gilt nicht. Denn z.B. ist $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$, $x \longmapsto f(x) = x^3$ streng monoton wachsend, aber $f'(x) = 3x^2$, und also $f'(0) = 0$.

Beispiel. Es ist $\cos(x)$ streng monoton fallend auf $(0,\pi)$, da $\cos(x)' = -\sin(x)$ dort negative Werte aufweist.

3.2.3 Lokale Extremstellen

3.2.3.1 Definition

Sei $n \geqslant 1$. Sei $D \subseteq \mathbf{R}^n$ offen. Sei $f : D \longrightarrow \mathbf{R}$ eine Abbildung. Sei $\underline{\hat{x}} \in D$.

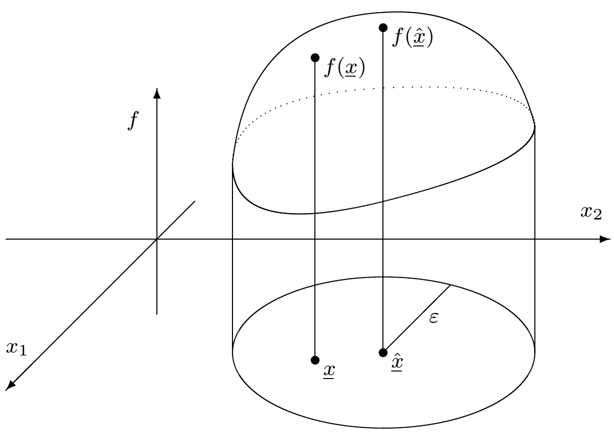
Definition.

(1) Es heißt $\underline{\hat{x}}$ eine *lokale Maximalstelle* von f, falls es ein $\varepsilon \in \mathbf{R}_{>0}$ so gibt, daß $f(\underline{\hat{x}}) \geqslant f(\underline{x})$ ist für alle $\underline{x} \in D$ mit $\|\underline{x} - \underline{\hat{x}}\| < \varepsilon$.

(2) Es heißt $\underline{\hat{x}}$ eine *lokale Minimalstelle* von f, falls es ein $\varepsilon \in \mathbf{R}_{>0}$ so gibt, daß $f(\underline{\hat{x}}) \leqslant f(\underline{x})$ ist für alle $\underline{x} \in D$ mit $\|\underline{x} - \underline{\hat{x}}\| < \varepsilon$.

(3) Es heißt $\underline{\hat{x}}$ eine *lokale Extremstelle* von f, falls $\underline{\hat{x}}$ eine lokale Maximal- oder Minimalstelle von f ist.

Skizze einer lokalen Maximalstelle $\underline{\hat{x}}$ von f im Fall $n = 2$.



3.2.3.2 Lokale Extremstellen in einer Variablen

Sei $D \subseteq \mathbf{R}$ offen. Sei $f : D \longrightarrow \mathbf{R}$ differenzierbar. Sei $x_0 \in D$.

Definition. Ist $f'(x_0) = 0$, so heißt x_0 eine *Flachstelle* von f.

Bemerkung. Ist x_0 eine lokale Extremstelle von f, so ist x_0 eine Flachstelle von f.

Lemma. Sei auch $f' : D \longrightarrow \mathbf{R}$ differenzierbar.

(1) Ist $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) < 0$, so ist x_0 eine lokale Maximalstelle von f.

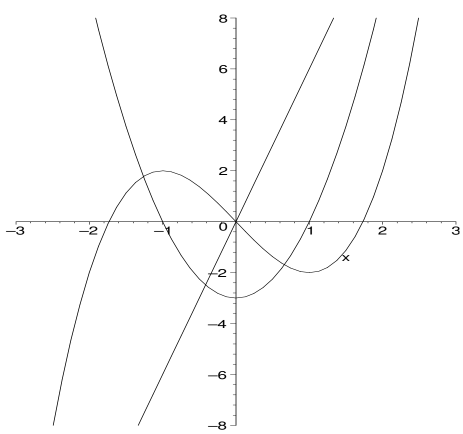
(2) Ist $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) > 0$, so ist x_0 eine lokale Minimalstelle von f.

Es genügt im allgemeinen nicht, $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) \geqslant 0$ zu haben, um auf eine lokale Minimalstelle schließen zu können. Denn z.B. ist für $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$, $x \longmapsto f(x) = x^3$ durchaus $f'(0) = 0$ und $f''(0) = 0 \geqslant 0$, aber 0 ist keine lokale Minimalstelle.

Anschaulich sollte bei einer Maximalstelle die Tangentensteigung links davon positiv und rechts davon negativ sein. Also sollte f' in einer Maximalstelle das Vorzeichen von + (links) nach − (rechts) wechseln. Somit sollte f' an einer Maximalstelle den Wert 0 haben und fallen, d.h. ihrerseits negative Tangentensteigung haben. Dies wiederum bedeutet, daß f'' an dieser Stelle negativ sein sollte.

Beispiel. Sei $f(x) = x^3 - 3x$. Es ist $f'(x) = 3x^2 - 3$, mit Nullstellen bei -1 und bei 1. Dies sind die beiden Flachstellen von f. Es ist $f''(x) = 6x$. Also ist $f''(-1) = -6 < 0$, und mithin ist -1 eine lokale Maximalstelle. Nur lokal, weil der Wert $f(-1) = 2$ bei -1 ja für genügend große x noch übertroffen wird. Aber immerhin wird der Wert bei -1 in der unmittelbaren Umgebung von -1 nicht übertroffen. Desweiteren ist $f''(1) = 6$, und also 1 eine lokale Minimalstelle.

Skizze von f, f' und f'' :



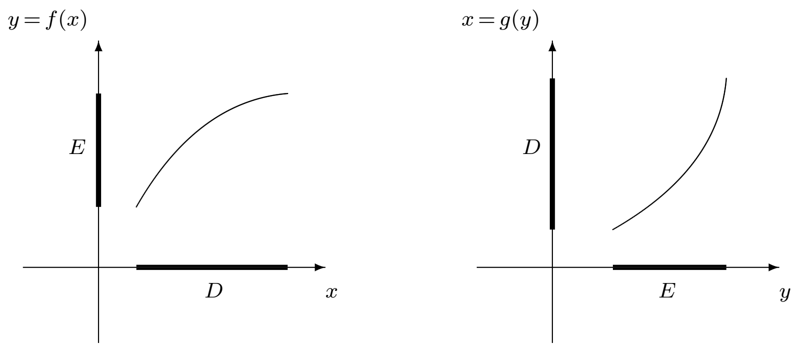
3.2.4 Umkehrabbildung, Logarithmus

3.2.4.1 Ableitung der Umkehrabbildung

Sei $D \subseteq \mathbf{R}$ ein offenes Intervall. Sei $f : D \longrightarrow \mathbf{R}$ differenzierbar. Sei $f'(x) > 0$ für alle $x \in D$ (resp. $f'(x) < 0$ für alle $x \in D$). Dann ist f streng monoton wachsend (resp. streng monoton fallend), vgl. zweites Lemma in §3.2.2. Insbesondere ist f injektiv. Es ist $E := f(D) \subseteq \mathbf{R}$ ein offenes Intervall, und es ist $f|_D^E$ bijektiv. Sei

$$\begin{array}{rcrcl} g & : & E & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ & & y & \longmapsto & g(y) := (f|_D^E)^{-1}(y) \; . \end{array}$$

Es ist also $g(f(x)) = x$ für $x \in D$ und $f(g(y)) = y$ für $y \in E$.

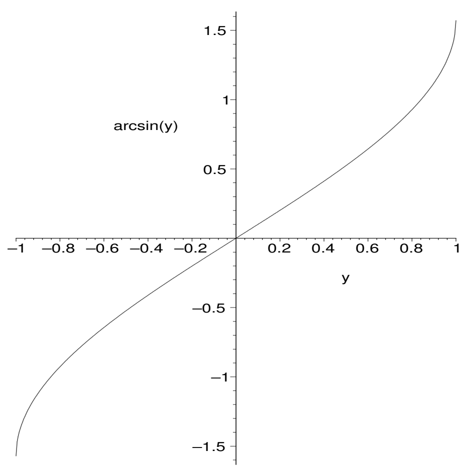


Bemerkung. Sei $x \in D$. Sei $y := f(x)$. Es ist $g'(y) = 1/f'(x) = 1/f'(g(y))$.

Denn aus $g(f(x)) = x$ für $x \in D$ folgt mit der Kettenregel, daß $g'(f(x)) \cdot f'(x) = 1$ ist.

Beispiel. Sei $D := (-\pi/2, \pi/2)$. Sei $f(x) := \sin(x)$. In obigen Bezeichnungen wird $E = (-1, 1)$ und $g(y) =: \arcsin(y)$. Für $y = \sin(x)$ wird

$$\arcsin(y)' \;=\; g'(y) \;=\; \frac{1}{f'(x)} \;=\; \frac{1}{\cos(x)} \;=\; \frac{1}{\sqrt{1-\sin(x)^2}} \;=\; \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\;.$$



3.2.4.2 Natürlicher Logarithmus

Definition. Für $\exp : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ ist $\exp(x)' = \exp(x) > 0$ für alle $x \in \mathbf{R}$, sowie $\exp(\mathbf{R}) = \mathbf{R}_{>0}$; vgl. §2.3.3.

Für letzteres kann man $\exp(x) \geqslant 1 + x$ für $x \geqslant 0$ und $\exp(-x) = 1/\exp(x)$ anführen.

Sei, in den Bezeichnungen von §3.2.4.1, $D = \mathbf{R}$, $E = \mathbf{R}_{>0}$ und $g(y) =: \ln(y)$ $(= \log(y))$ für $y \in \mathbf{R}_{>0}$. Dies liefert die Abbildung

$$\ln \;:\; \mathbf{R}_{>0} \longrightarrow \mathbf{R}\,, \quad y \longmapsto \ln(y)\,, \qquad \text{genannt } \textit{natürlicher Logarithmus.}$$

Es ist also $\ln(\exp(x)) = \ln(\mathrm{e}^x) = x$ für $x \in \mathbf{R}$ und $\exp(\ln(y)) = \mathrm{e}^{\ln(y)} = y$ für $y \in \mathbf{R}_{>0}$.

Speziell ist $\ln(1) = \ln \mathrm{e}^0 = 0$ und $\ln(\mathrm{e}) = \ln(\mathrm{e}^1) = 1$.

Für $y,\, \tilde{y} \,>\, 0$ ist

$$\ln(y\tilde{y}) \;=\; \ln(y) + \ln(\tilde{y}) \;,$$

da $\mathrm{e}^{\ln(y\tilde{y})} = y\tilde{y} = \mathrm{e}^{\ln(y)}\mathrm{e}^{\ln(\tilde{y})} = \mathrm{e}^{\ln(y)+\ln(\tilde{y})}$ und exp injektiv ist.

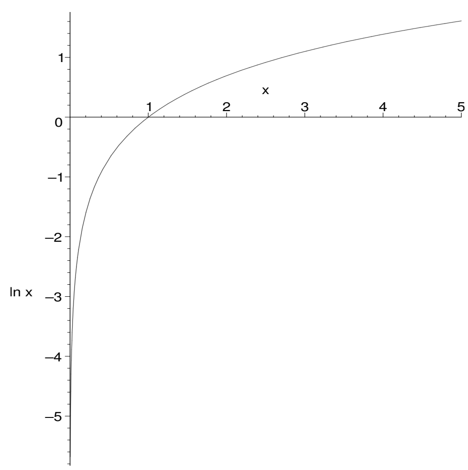
Bemerkung. Für $\ln : \mathbf{R}_{>0} \longrightarrow \mathbf{R},\; y \longmapsto \ln(y)$ ist, mit $y = \mathrm{e}^x$,

$$\ln(y)' \;=\; g(y)' \;=\; \frac{1}{f(x)'} \;=\; \frac{1}{(\mathrm{e}^x)'} \;=\; \frac{1}{\mathrm{e}^x} \;=\; \frac{1}{y}\;;$$

vgl. Bemerkung in §3.2.4.1.

Kurz, und wieder in gewohnter Variablenbezeichnung,

$$\ln(x)' \;=\; \frac{1}{x} \qquad \text{für } x > 0\;.$$



3.2.4.3 Potenz- und Logarithmenregeln

3.2.4.3.1 Potenzregeln

Seien $a,\, b \in \mathbf{R}_{>0}$. Seien $x,\, y \,\in\, \mathbf{R}$.

Definition. Sei $a^x := \mathrm{e}^{x\ln(a)}$.

Es ist $a^0 = 1$ und $a^1 = \mathrm{e}^{\ln(a)} = a$.

Es ist $a^{x+y} = a^x a^y$, da $a^{x+y} = \mathrm{e}^{(x+y)\ln(a)} = \mathrm{e}^{x\ln(a)}\mathrm{e}^{y\ln(a)} \;=\; a^x a^y$.

Insbesondere ist $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n \text{ Faktoren}}$ für $n \in \mathbf{Z}_{\geqslant 1}$.

Es ist $(a^x)^y = a^{xy}$, da $(a^x)^y = (\mathrm{e}^{x\ln(a)})^y = \mathrm{e}^{y\ln(\mathrm{e}^{x\ln(a)})} = \mathrm{e}^{yx\ln(a)} = a^{xy}$.

Es ist $(a^x)(b^x) = (ab)^x$, da $(a^x)(b^x) = \mathrm{e}^{x\ln(a)}\mathrm{e}^{x\ln(b)} = \mathrm{e}^{x(\ln(a)+\ln(b))} = \mathrm{e}^{x\ln(ab)} = (ab)^x$.

Bemerkung. Sei $\lambda \in \mathbf{R}$. Setze $f : \mathbf{R}_{>0} \longrightarrow \mathbf{R}$, $x \longmapsto f(x) := x^\lambda$. Dann ist $f'(x) = \lambda x^{\lambda-1}$ für $x \in \mathbf{R}_{>0}$. Kurz,

$$(x^\lambda)' \;=\; \lambda x^{\lambda-1} \qquad \text{gilt für jedes } \lambda \in \mathbf{R}\ .$$

Denn $(x^\lambda)' = (\mathrm{e}^{\lambda\ln(x)})' = \mathrm{e}^{\lambda\ln(x)} \cdot \frac{\lambda}{x} = \lambda\,\mathrm{e}^{\lambda\ln(x)}\mathrm{e}^{-\ln(x)} = \lambda\,\mathrm{e}^{(\lambda-1)\ln(x)} = \lambda x^{\lambda-1}$.

Bemerkung. Auf $\mathbf{R}_{>0}$ ist $(a^t)' = (\mathrm{e}^{t\ln(a)})' = \mathrm{e}^{t\ln(a)}\ln(a) = a^t\ln(a)$.

3.2.4.3.2 Logarithmenregeln

Seien $a,\, b \in \mathbf{R}_{>0} \smallsetminus \{1\}$. Seien $x,\, y \,\in\, \mathbf{R}_{>0}$. Sei $z \in \mathbf{R}$.

Definition. Sei $\log_a(x) := \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$ (Logarithmus zur Basis a).

Insbesondere ist $\log_{\mathrm{e}}(x) = \ln(x)$.

Für die folgenden Aussagen vergleiche man Aufgabe 41.

Es ist $\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$.

Es ist $a^{\log_a(x)} = x$.

Es ist $\log_a(a^z) = z$.

Ist $x \neq 1$, so ist $\frac{\log_a(x)}{\log_b(x)} = \frac{\ln(b)}{\ln(a)} = \log_a(b) = \frac{1}{\log_b(a)}$.

3.2.5 L'Hôpital

Lemma. Sei $D \subseteq \mathbf{R}$ offen. Sei $x_0 \in D$. Seien $f,\, g \,:\, D \longrightarrow \mathbf{R}$ differenzierbar.

Sei $f(x_0) = 0$ und $g(x_0) = 0$.

Dann ist

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \;=\; \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}\ ,$$

vorausgesetzt, die rechte Seite konvergiert.

Dies ist nicht mit der Quotientenregel aus §3.2.1 zu verwechseln.

Beispiel. Wir wollen $\lim_{x\to1} \frac{\ln(x)}{x-1}$ berechnen. Zähler und Nenner sind auf $(0,\infty)$ differenzierbar und haben beide Funktionswert 0 bei $x = 1$. Also ist

$$\lim_{x\to1} \frac{\ln(x)}{x-1} \;=\; \lim_{x\to1} \frac{\ln(x)'}{(x-1)'} \;=\; \lim_{x\to1} \frac{1/x}{1}\ ,$$

sofern letzterer Grenzwert existiert. Dies ist wegen $1/x$ stetig an der Stelle $x = 1$ der Fall. Wir erhalten $\lim_{x\to 1} \frac{1}{x} = 1$. Insgesamt ergibt sich also

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln(x)}{x-1} \;=\; 1\,.$$

Sei $\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty$, falls es für alle $s \in \mathbf{R}$ ein $\varepsilon > 0$ gibt mit $f(\,(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \cap D\,) \subseteq (s, \infty)$.

Enthalte D ein Intervall (u, ∞) für ein $u \in \mathbf{R}$. Dann sei $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$, falls es für alle $s \in \mathbf{R}$ ein $t \in \mathbf{R}_{>u}$ gibt mit $f(\,(t, \infty)\,) \subseteq (s, \infty)$.

Etc.

Bemerkung. Die obige Regel von l'Hôpital gilt genauso im Falle $\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty$ und $\lim_{x\to x_0} g(x) = \infty$.

Bemerkung. Die Regel von l'Hôpital gilt genauso für ∞ anstelle von x_0. Entsprechend auch für $-\infty$ anstelle von x_0.

Dies schließt auch vorstehende Bemerkung ein.

3.3 Partielle Ableitungen von Funktionen in mehreren Variablen

Sei $n \geqslant 1$. Sei $D \subseteq \mathbf{R}^n$ offen. Sei $f : D \longrightarrow \mathbf{R}$ eine Abbildung.

3.3.1 Definition

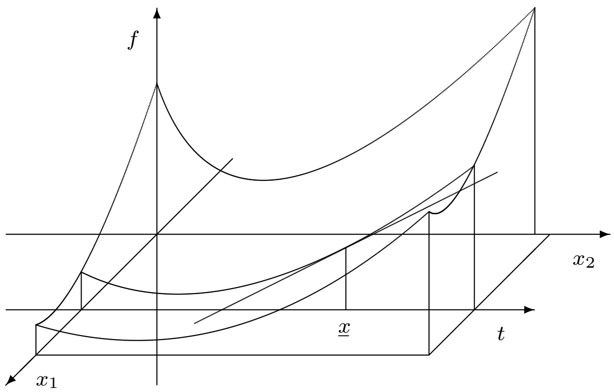
Definition. Sei $\underline{x} = (x_1\,, \ldots\,, x_n) \in D$.

Sei $1 \leqslant i \leqslant n$. Sei $D_i := \{t \in \mathbf{R} \,:\, (x_1\,, \ldots\,, x_{i-1}\,, t\,, x_{i+1}\,, \ldots\,, x_n) \in D\}$.

Betrachte die Funktion $D_i \longrightarrow \mathbf{R}$, $t \longmapsto f(x_1\,, \ldots\,, x_{i-1}\,, t\,, x_{i+1}\,, \ldots\,, x_n)$. Falls die Ableitung dieser Funktion an der Stelle $t = x_i$ existiert, so heißt f *partiell nach* x_i *differenzierbar an der Stelle* $\underline{x}$; den Wert dieser Ableitung bezeichnen wir mit

$$f_{x_i}(x_1\,, \ldots\,, x_n)\;,$$

genannt die *partielle Ableitung von* f *nach* x_i an der Stelle $\underline{x}$.



Die Steigung der eingezeichneten Tangente ist $f_{x_2}(\underline{x})$.

Ist f partiell nach x_i differenzierbar an jeder Stelle $\underline{x} \in D$, so heißt f *partiell differenzierbar nach* x_i . Diesenfalls resultiert die partielle Ableitung $f_{x_i} : D \longrightarrow \mathbf{R}$. Man schreibt auch $\frac{\partial f}{\partial x_i} := f_{x_i}$.

In anderen Worten, die partielle Ableitung nach x_i erhält man, indem man alle anderen Variablen $x_1 , \dots, x_{i-1} , x_{i+1} , \dots, x_n$ als konstant betrachtet, nur x_i als variabel, und dann die Funktion in dieser verbliebenen Variablen x_i ableitet.

Beispiel. Sei $f(x_1 , x_2 , x_3) = x_1^2 \, x_2^3 \, x_3^7$ auf $\mathbf{R}^3$. Es ist

$$\begin{array}{rcl} f_{x_1}(x_1 , x_2 , x_3) & = & 2x_1 \, x_2^3 \, x_3^7 \\ f_{x_2}(x_1 , x_2 , x_3) & = & 3x_1^2 \, x_2^2 \, x_3^7 \\ f_{x_3}(x_1 , x_2 , x_3) & = & 7x_1^2 \, x_2^3 \, x_3^6 \, . \end{array}$$

3.3.2 Schwarz

Ist nun die partielle Ableitung f_{x_i} selbst wieder partiell differenzierbar nach x_j für bestimmte $1 \leqslant i, j \leqslant n$, so bezeichnen wir die partielle Ableitung von f_{x_i} nach x_j mit

$$f_{x_i x_j} \; := \; (f_{x_i})_{x_j} \; .$$

Usf.

Lemma (Schwarz). Sei $f_{x_i x_j} : D \longrightarrow \mathbf{R}$ existent und stetig für alle $1 \leqslant i, j \leqslant n$. Dann ist

$$f_{x_i x_j} \; = \; f_{x_j x_i}$$

für alle $1 \leqslant i, j \leqslant n$.

Beispiel. Sei $f(x, y, z) = \mathrm{e}^{x^2+y^2+xyz}$ auf $\mathbf{R}^3$. Es ist

$$\begin{array}{rcl} f_x(x, y, z) & = & (2x + yz)\mathrm{e}^{x^2+y^2+xyz} \\ f_{xz}(x, y, z) & = & (y + 2x^2 y + xy^2 z)\mathrm{e}^{x^2+y^2+xyz} \\ f_z(x, y, z) & = & xy\mathrm{e}^{x^2+y^2+xyz} \\ f_{zx}(x, y, z) & = & (y + 2x^2 y + xy^2 z)\mathrm{e}^{x^2+y^2+xyz} \end{array}$$

Also ist $f_{xz} = f_{zx}$.

3.3.3 Kettenregel

Sei $E \subseteq \mathbf{R}$ offen. Sei $g_i : E \longrightarrow \mathbf{R}$ differenzierbar für $1 \leqslant i \leqslant n$. Wir setzen

$$\begin{array}{rcccl} (g_1\,,\,\ldots\,,\,g_n) & : & E & \longrightarrow & \mathbf{R}^n \\ & & t & \longmapsto & (g_1\,,\,\ldots\,,\,g_n)(t) \;:=\; (g_1(t),\ldots,g_n(t))\;. \end{array}$$

Sei $(g_1\,,\,\ldots\,,\,g_n)(E) \subseteq D$. Sei $f : D \longrightarrow \mathbf{R}$ partiell differenzierbar nach x_i für $1 \leqslant i \leqslant n$.

Lemma (Kettenregel). Es ist

$$(f \circ (g_1\,,\,\ldots\,,\,g_n)|_E^D)' \;=\; \sum_{i=1}^{n} (f_{x_i} \circ (g_1\,,\,\ldots\,,\,g_n)|_E^D) \cdot g_i'\;.$$

In anderen Worten, für $t \in E$ ist

$$\big(f(g_1(t),\ldots,g_n(t))\big)' \;=\; \sum_{i=1}^{n} f_{x_i}(g_1(t),\ldots,g_n(t)) \cdot g_i'(t)\;.$$

Im Fall $n = 1$ wird dies zur bereits aus §3.2.1 bekannten Kettenregel.

Beispiel. Sei $f(x,y) = x^2y$ auf $\mathbf{R}^2$. Es ist $f_x(x,y) = 2xy$. Es ist $f_y(x,y) = x^2$. Mit der Kettenregel wird also

$$(f(\mathrm{e}^t,\sin(t)))' \;=\; f_x(\mathrm{e}^t,\sin(t))\mathrm{e}^t + f_y(\mathrm{e}^t,\sin(t))\cos(t) \;=\; 2\mathrm{e}^{2t}\sin(t) + \mathrm{e}^{2t}\cos(t)\;.$$

Eine direkte Rechnung gibt ebenfalls

$$(f(\mathrm{e}^t,\sin(t)))' \;=\; (\mathrm{e}^{2t}\sin(t))' \;=\; 2\mathrm{e}^{2t}\sin(t) + \mathrm{e}^{2t}\cos(t)\;.$$

3.4 Lokale Extremstellen in 2 Variablen

Sei $D \subseteq \mathbf{R}^2$ offen. Sei $f : D \longrightarrow \mathbf{R}$ mit $f_{xx}\,,\,f_{xy}\,,\,f_{yx}\,,\,f_{yy} : D \longrightarrow \mathbf{R}$ existent und stetig.

Wir erinnern an die Begriffe der lokalen Maximal-, Minimal- und Extremstelle von f aus §3.2.3.1.

Definition. Ist $f_x(x_0\,,y_0) = 0$ und $f_y(x_0\,,y_0) = 0$, so heißt $(x_0\,,y_0)$ eine *Flachstelle* von f.

Bemerkung. Ist $(x_0\,,y_0) \in D$ eine lokale Extremstelle von f, so ist $(x_0\,,y_0)$ eine Flachstelle von f.

Lemma. Sei $(x_0\,,y_0) \in D$.

(1) Ist an der Stelle $(x_0\,,y_0)$ zum einen $f_x = 0$ und $f_y = 0$, und zum anderen $f_{xx} < 0$ und $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 > 0$, so ist $(x_0\,,y_0)$ eine lokale Maximalstelle von f.

(2) Ist an der Stelle $(x_0\,, y_0)$ zum einen $f_x = 0$ und $f_y = 0$, und zum anderen $f_{xx} > 0$ und $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 > 0$, so ist $(x_0\,, y_0)$ eine lokale Minimalstelle von f.

(3) Ist an der Stelle $(x_0\,, y_0)$ zum einen $f_x = 0$ und $f_y = 0$, zum anderen aber $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 < 0$, so ist $(x_0\,, y_0)$ keine lokale Extremstelle von f, sondern eine *Sattelstelle* von f.

Bei einem anderen Verhalten der zweiten partiellen Ableitungen an einer Flachstelle machen wir keine Aussage über das Vorliegen einer lokalen Extremstelle.

In (1) darf statt $f_{xx} < 0$ äquivalent auch $f_{yy} < 0$ verwandt werden.

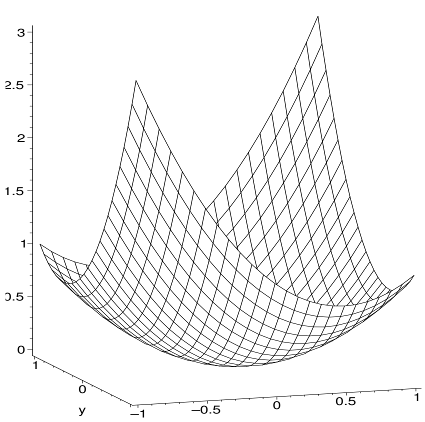
In (2) darf statt $f_{xx} > 0$ äquivalent auch $f_{yy} > 0$ verwandt werden.

Beispiel. Sei $f(x, y) = x^2 + y^2 + xy$, definiert auf $D = \mathbf{R}^2$. Wir wollen die lokalen Extremstellen von f bestimmen.

Notwendig ist $f_x(x, y) = 2x + y \overset{!}{=} 0$ und $f_y(x, y) = 2y + x \overset{!}{=} 0$. Aus der ersten Gleichung erhalten wir $y = -2x$, dies eingesetzt in die zweite Gleichung gibt $-3x = 0$, also insgesamt $(x, y) = (0, 0)$.

Es bleibt also zu untersuchen, ob die einzige Flachstelle $(0, 0)$ von f eine lokale Extremstelle ist.

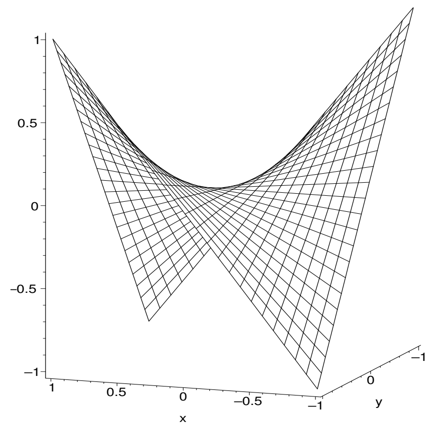
Es ist $f_{xx}(x, y) = 2$, $f_{xy}(x, y) = 1$ und $f_{yy}(x, y) = 2$ (in unserem einfachen Beispiel alle konstant). Da speziell $f_{xx}(0, 0) = 2 > 0$ und $(f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2)(0, 0) = 3 > 0$ ist, liegt in $(0, 0)$ eine lokale Minimalstelle vor.



Beispiel. Sei $f(x, y) = xy$, definiert auf $D = \mathbf{R}^2$. Wir wollen die lokalen Extremstellen von f bestimmen.

Notwendig ist $f_x(x, y) = y \overset{!}{=} 0$ und $f_y(x, y) = x \overset{!}{=} 0$. Also ist $(x, y) = (0, 0)$ die einzige Flachstelle von f.

Es ist $f_{xx}(0, 0) = 0$, $f_{yy}(0, 0) = 0$ und $f_{xy}(0, 0) = 1$. Also ist $(f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2)(0, 0) = -1$, und somit liegt keine lokale Extremstelle, sondern eine Sattelstelle vor. Woher dieser Name kommt, entnehme man folgender Skizze des Graphen von f.



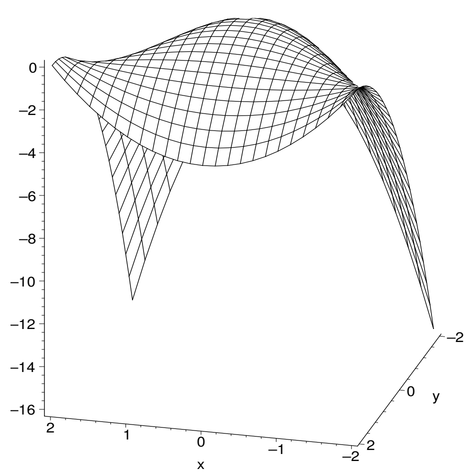
Beispiel. Sei $f(x,y) = x^2y - x^2 - y^2$, definiert auf $D = \mathbf{R}^2$. Wir wollen die lokalen Extremstellen von f bestimmen.

Notwendig ist $f_x(x,y) = 2xy - 2x \stackrel{!}{=} 0$ und $f_y(x,y) = x^2 - 2y \stackrel{!}{=} 0$. Aus ersterer Gleichung entnehmen wir $x = 0$ oder $y = 1$. Zweite Gleichung liefert für $x = 0$ die Flachstelle $(0,0)$, und für $y = 1$ die Flachstellen $(-\sqrt{2},1)$ und $(\sqrt{2},1)$.

Es ist $f_{xx}(x,y) = 2y - 2$, $f_{xy}(x,y) = 2x$ und $f_{yy}(x,y) = -2$.

Es ist $f_{yy}(0,0) = -2 < 0$ und $(f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2)(0,0) = 4 > 0$. Also ist $(0,0)$ eine lokale Maximalstelle von f.

Es ist $(f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2)(\pm\sqrt{2},1) = -8 < 0$. Also sind $(-\sqrt{2},1)$ und $(\sqrt{2},1)$ Sattelstellen von f.



Kapitel 4

Kapitalentwicklung

4.1 Kapitalentwicklung mit Zinsen und Raten

- Sei K_0 das Startkapital zum Zeitpunkt 0.

  Wir lassen $K_0 \in \mathbf{R}$ zu; ein negativer Wert bezieht sich auf eine Schuld zum Zeitpunkt 0.

- Das Kapital werde in jeder festen Zeitspanne T mit p Prozent verzinst.

  Wir lassen $p \in \mathbf{R} \smallsetminus \{0\}$ zu; ein negativer Wert bezieht sich auf eine Abschreibung, d.h. auf eine prozentuale Reduktion des Kapitals aufgrund von Abnutzung u.dgl.

  Es heiße
  $$q \ := \ 1 + \frac{p}{100}$$
  der *Zinsfaktor.*

  Die Zeitintervalle $[0, T]$, $[T, 2T]$, $[2T, 3T]$, $\dots$ heißen *Zinsperioden.*

- Bei *vorschüssiger* (bzw. *nachschüssiger*) Zahlung werde am Anfang (bzw. am Ende) jeder Zinsperiode eine *Rate* R eingezahlt.

  Wir lassen $R \in \mathbf{R}$ zu; ein negativer Wert bezieht sich auf eine regelmäßige Kapitalentnahme.

- Sei K_n das entstandene Kapital zum Zeitpunkt nT, wobei $n \in \mathbf{Z}_{\geqslant 0}$.

Lemma.

(1) Bei vorschüssiger Zahlung ist
$$K_n \ = \ q^n \cdot K_0 + q \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} \cdot R \ .$$
für $n \in \mathbf{Z}_{\geqslant 0}$.

(2) Bei nachschüssiger Zahlung ist

$$K_n \;=\; q^n \cdot K_0 + \frac{q^n - 1}{q - 1} \cdot R\,.$$

für $n \in \mathbf{Z}_{\geqslant 0}$.

(3) Ohne Zinsen wird, vor- wie nachschüssig,

$$K_n \;=\; K_0 + n \cdot R$$

für $n \in \mathbf{Z}_{\geqslant 0}$. (Das ist der oben nicht zugelassene Fall $p = 0$ und also $q = 1$.)

Mit l'Hôpital ergibt sich übrigens $\lim\limits_{q\to 1} \frac{q^n-1}{q-1} = \lim\limits_{q\to 1} \frac{nq^{n-1}}{1} = n$ (auch richtig für $n = 0$).

Beweis von (1) *für* $n \geqslant 0$. Wir wollen die Aussage mit Induktion beweisen.

Induktionsanfang $n = 0$. Auf der rechten Seite ergibt sich in der Tat

$$q^0 \cdot K_0 + q \cdot \frac{q^0 - 1}{q - 1} \cdot R \;=\; 1 \cdot K_0 + q \cdot 0 \cdot R \;=\; K_0\,.$$

Induktionsschritt. Sei die Gleichung für $n \geqslant 0$ bekannt. Wir haben sie für $n+1$ zu zeigen.

Da das zum Zeitpunkt nT vorhandene Kapital K_n mit p Prozent verzinst wird, fallen Zinsen vom Betrag $\frac{p}{100} \cdot K_n$ auf dieses Kapital für die Zinsperiode $[nT, (n+1)T]$ an.

Ferner wird zu Beginn der Zinsperiode $[nT, (n+1)T]$ die Rate R eingezahlt. Auf die Rate R fallen ferner Zinsen vom Betrag $\frac{p}{100} \cdot R$ an.

Somit ist

$$K_{n+1} \;=\; K_n + \frac{p}{100} \cdot K_n + R + \frac{p}{100} \cdot R \;=\; q \cdot K_n + q \cdot R\,.$$

Unter Verwendung der Induktionsvoraussetzung wird also

$$\begin{array}{rcl} K_{n+1} & = & q \cdot K_n + q \cdot R \\ & \overset{\text{I.V.}}{=} & q \cdot \big(q^n \cdot K_0 + q \cdot \frac{q^n-1}{q-1} \cdot R) + q \cdot R \\ & = & q^{n+1} \cdot K_0 + q \cdot (q \cdot \frac{q^n-1}{q-1} + 1) \cdot R \\ & = & q^{n+1} \cdot K_0 + q \cdot \frac{(q^{n+1}-q)+(q-1)}{q-1} \cdot R \\ & = & q^{n+1} \cdot K_0 + q \cdot \frac{q^{n+1}-1}{q-1} \cdot R\,. \end{array}$$

Damit ist Teil (1) unseres Lemmas bewiesen.

Zu (1) und (2) vgl. man auch die geometrische Summe aus §2.3.2.

Beispiel.

(1) Seien $K_0 = 1000$ Euro mit 6% Jahreszins für 4 Jahre verzinst. Es ist also $T = 1$ Jahr. Es mögen keine Ratenzahlungen stattfinden. Es ist $q = 1{,}06$. Nach Ablauf von 4 Jahren erhalten wir ein Kapital von

$$K_4 \;=\; 1{,}06^4 \cdot 1000 \;\approx\; 1262{,}48$$

Euro.

(2) Sei nun $K_0 = 1000$ Euro mit 0,5% Monatszins für 4 Jahre verzinst. Es ist also $T = 1$ Monat. Es mögen ebenfalls keine Ratenzahlungen stattfinden. Es ist $q = 1{,}005$. Nach Ablauf von 4 Jahren = 48 Monaten erhalten wir ein Kapital von

$$K_{48} \;=\; 1{,}005^{48} \cdot 1000 \;\approx\; 1270{,}49$$

Euro.

Beispiel.

(1) Sei in einem Sparvertrag $K_0 = 5000$ Euro angelegt, mit 1,8% Jahreszins und einer am Ende jeden Jahres einzuzahlenden Sparrate von $R = 500$ Euro. Es ist also $q = 1{,}018$. Nach Ablauf von 5 Jahren erhalten wir ein Kapital von

$$K_5 \;=\; 1{,}018^5 \cdot 5000 + \frac{1{,}018^5 - 1}{1{,}018 - 1} \cdot 500 \;\approx\; 8058{,}13$$

Euro.

(2) Bei vorschüssiger Zahlung hätte sich sogar ein Kapital von

$$K_5 \;=\; 1{,}018^5 \cdot 5000 + 1{,}018 \cdot \frac{1{,}018^5 - 1}{1{,}018 - 1} \cdot 500 \;\approx\; 8104{,}78$$

Euro ergeben.

(3) Ohne Zinsen hätten sich nur

$$K_5 \;=\; 5000 + 5 \cdot 500 \;=\; 7500$$

Euro ergeben.

Beispiel. Sei zum Zeitpunkt 0 ein Kredit über 100.000 Euro aufgenommen worden. Es ist also $K_0 = -100.000$. Die Kreditzinsen betragen 12% jährlich. Es ist also $q = 1{,}12$. Es wird eine Rate von jährlich 10.000 Euro zum Ende jeder Zinsperiode (nachschüssig) vereinbart. Es ist also $R = 10.000$. Nach Ablauf von 5 Jahren wird

$$K_5 \;=\; 1{,}12^5 \cdot (-100.000) + \frac{1{,}12^5 - 1}{1{,}12 - 1} \cdot 10.000 \;\approx\; -112.705{,}69\,.$$

Die Restschuld beläuft sich also auf 112.705,69 Euro. Die Rate war im Vergleich zu den Zinsen zu niedrig vereinbart.

Zuweilen ist auch das Kapital zum Zeitpunkt nT vorgegeben, und man möchte bei bekannten Konditionen auf das benötigte Kapital zum Zeitpunkt 0 zurückschließen.

Ähnlich hierzu möchte man auch bei jeweilig bekannten sonstigen Daten auf den Zinssatz, auf die Rate, auf die Dauer usf. schließen können.

Bemerkung. Sei durchweg nachschüssige Zahlung vereinbart.

(1) Seien n, K_n, q und R bekannt. Dann wird

$$K_0 \;=\; q^{-n}\big(K_n - \frac{q^n - 1}{q - 1}\,R\big)\;.$$

(2) Seien n, K_0, K_n und $R = 0$ bekannt. Dann wird

$$q \;=\; (K_n/K_0)^{1/n}$$

und $p = 100 \cdot (q - 1)$.

(3) Seien $n \geqslant 1$, K_0, K_n und q bekannt. Dann wird

$$R \;=\; \frac{q-1}{q^n - 1}(K_n - q^n K_0)\;.$$

(4) Seien K_0, K_n, R und q bekannt. Dann wird

$$n \;=\; \log_q\left(\frac{K_n + \frac{R}{q-1}}{K_0 + \frac{R}{q-1}}\right) \;=\; \ln\left(\frac{K_n + \frac{R}{q-1}}{K_0 + \frac{R}{q-1}}\right) / \ln(q)\;.$$

Dieses n, eine ganze Zahl oder nicht, gibt in der Praxis die nötige Mindestlaufzeit, um ein festgelegtes K_n zu erreichen.

Begründen wir (4). Es ist

$$K_n \;=\; q^n \cdot (K_0 + \frac{1}{q-1} \cdot R) - \frac{1}{q-1} \cdot R\;,$$

also

$$q^n \;=\; \frac{K_n + \frac{R}{q-1}}{K_0 + \frac{R}{q-1}}\;,$$

und somit

$$n \;=\; \log_q(q^n) \;=\; \log_q\left(\frac{K_n + \frac{R}{q-1}}{K_0 + \frac{R}{q-1}}\right)\;.$$

Beispiel. Seien 1000 Euro zu 2% jährlich verzinst. Seien keine weiteren Sparraten vereinbart. Es dauert mindestens

$$\log_{1,02}\left(\frac{2000}{1000}\right) \approx 35{,}003$$

Jahre, in der Praxis also mindestens 36 Jahre, bis die Summe von 2000 Euro erreicht ist.

Mit einer zusätzlichen Sparrate von 10 Euro jährlich, zahlbar jeweils am Jahresende, dauert es nur noch mindestens

$$\log_{1,02}\left(\frac{2000+\frac{10}{0{,}02}}{1000+\frac{10}{0{,}02}}\right) \approx 25{,}796$$

Jahre, in der Praxis also mindestens 26 Jahre, bis die gewünschte Summe von 2000 Euro erreicht ist.

Ohne Zinsen hätte es bei dieser Sparrate 100 Jahre gedauert.

4.2 Investitionsrechnung

- Wir tätigen eine Investition. Wir wählen eine Zeitspanne T und wollen die Investition in den Zeitintervallen $[0, T]$, $[T, 2T]$, ..., $[(n-1)T, nT]$ planen, für ein $n \geqslant 1$.
- Sei $0 \leqslant i \leqslant n$. Zum Zeitpunkt iT haben wir Ausgaben und Einnahmen, die sich zur Kapitalbewegung $E_i \in \mathbf{R}$ addieren. Ist E_i negativ, so heißt dies, daß zum Zeitpunkt iT (bzw. im vorangegangenen Zeitintervall) mehr ausgegeben werden mußte, als eingenommen werden konnte.
- Wir gehen davon aus, daß allgemein Geld im Zeitintervall der Länge T mit p Prozent, also mit Zinsfaktor $q = 1 + \frac{p}{100}$, verzinst wird.

Unsere Investition wird am Ende

$$\sum_{i=0}^{n} q^{n-i} E_i$$

eingebracht haben, da die Kapitalbewegung E_i über eine Zeitspanne $(n-i)T$ zu verzinsen ist (in der Regel als mehr oder minder abbezahltes Darlehen).

Eine Summe K wächst bei Festanlage über eine Zeitspanne nT auf

$$q^n K$$

an. Unsere Investition wird also genausoviel abwerfen wie eine Festanlage, wenn

$$q^n K = \sum_{i=0}^{n} q^{n-i} E_i ,$$

d.h. wenn

$$K = \sum_{i=0}^{n} q^{-i} E_i \; .$$

Dieses K heißt der *Kapitalwert* unserer Investition.

Eine Investition lohnt sich, falls $K > 0$.

Der kritische Zinsfaktor, ab dem sich eine Investition lohnt, ist also das q_{int} mit

$$K = \sum_{i=0}^{n} q_{\text{int}}^{-i} E_i = 0 \; .$$

Der zugehörige kritische Zinssatz p_{int} heißt auch *interner Zinssatz.* Diesen sollte man zu unterschreiten suchen, wenn man mit der Bank über Darlehenszinsen verhandelt.

Sei x_0 die graphisch näherungsweise ermittelte Nullstelle von $f(x) := \sum_{i=0}^{n} x^i E_i$ auf dem Intervall $(0, 1)$. Dann ist

$$q_{\text{int}} = x_0^{-1} \qquad \text{und, entsprechend,} \qquad p_{\text{int}} = 100(x_0^{-1} - 1) \; .$$

Beispiel. Sei $q = 1{,}05$. Wir planen eine Investition, die zu Beginn 10.000 Euro kosten wird, nach einem Jahr noch einen Zuschuß von 5.000 Euro benötigt, und in den Folgejahren jeweils 7.000 Euro abwirft, vom zweiten bis zum fünften Jahr.

Es sei also $n = 5$, sowie $E_0 = -10.000$, $E_1 = -5.000$, $E_2 = 7.000$, $E_3 = 7.000$, $E_4 = 7.000$ und $E_5 = 7.000$.

Der Kapitalwert unserer Investition beläuft sich auf

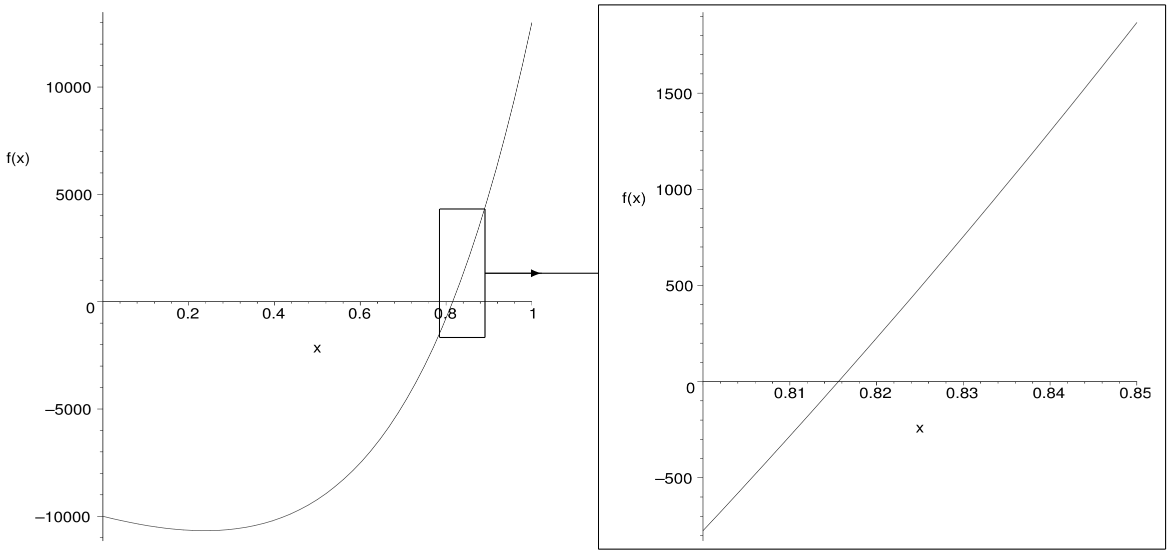
$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n} q^{-i} E_i &= (1{,}05)^0 \cdot (-10.000) + (1{,}05)^{-1} \cdot (-5.000) + (1{,}05)^{-2} \cdot 7.000 \\ &\quad + (1{,}05)^{-3} \cdot 7.000 + (1{,}05)^{-4} \cdot 7.000 + (1{,}05)^{-5} \cdot 7.000 \\ &\approx 8.877{,}77 \end{aligned}$$

Euro.

Für den internen Zinssatz unserer Investition bestimmen wir graphisch die Nullstelle von

$$f(x) := \sum_{i=0}^{n} x^i E_i = -10.000\, x^0 - 5.000\, x^1 + 7.000\, x^2 + 7.000\, x^3 + 7.000\, x^4 + 7.000\, x^5$$

auf dem Intervall $(0, 1)$.



Es ist $x_0 \approx 0{,}816$. Also ist $q_{\text{int}} = x_0^{-1} \approx 1{,}225$.

Die Investition ist also, zumindest gemäß Plan, unkritisch, es sei denn man hat eine Bank, die 22,5% oder mehr an jährlichen Darlehenszinsen verlangt.

Kapitel 5

Vektoren

5.1 Matrizen

Seien m, n, p, $q \geqslant 0$.

Definition. Eine (*reellwertige*) $m \times n$*-Matrix*

$$A \;=\; (\alpha_{i,j})_{1 \leqslant i \leqslant m,\, 1 \leqslant j \leqslant n} \;=\; (\alpha_{i,j})_{i,j} \;=\; \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & \alpha_{1,3} & \cdots & \alpha_{1,n-1} & \alpha_{1,n} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} & \alpha_{2,3} & \cdots & \alpha_{2,n-1} & \alpha_{2,n} \\ \alpha_{3,1} & \alpha_{3,2} & \alpha_{3,3} & \cdots & \alpha_{3,n-1} & \alpha_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \alpha_{m-1,1} & \alpha_{m-1,2} & \alpha_{m-1,3} & \cdots & \alpha_{m-1,n-1} & \alpha_{m-1,n} \\ \alpha_{m,1} & \alpha_{m,2} & \alpha_{m,3} & \cdots & \alpha_{m,n-1} & \alpha_{m,n} \end{pmatrix}$$

ist eine rechteckige Tafel aus reellen Zahlen mit m Zeilen und n Spalten.

Es heiße $\alpha_{i,j}$ der *Eintrag* von A an *Position* (i, j).

Die Menge aller $m \times n$-Matrizen werde

$$\mathbf{R}^{m \times n} \;:=\; \{\, (\alpha_{i,j})_{i,j} \;:\; \alpha_{i,j} \in \mathbf{R} \text{ für } 1 \leqslant i \leqslant m \text{ und } 1 \leqslant j \leqslant n \,\}$$

geschrieben.

Formal ist eine solche Matrix eine Abbildung von $\{1, \ldots, m\} \times \{1, \ldots, n\}$ nach $\mathbf{R}$.

Bei den Indizes merke man sich “Zeilenzähler zuerst, Spaltenzähler später”.

Z.B. ist $\left(\begin{smallmatrix} 7 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbf{R}^{2\times 3}$.

Wir identifizieren $\mathbf{R}$ mit $\mathbf{R}^{1\times 1}$, schreiben also $\alpha_{1,1} = (\alpha_{1,1})$.

Wir identifizieren $\mathbf{R}^n$ mit $\mathbf{R}^{1\times n}$, schreiben also $(\alpha_{1,1}\,,\, \ldots\,,\, \alpha_{1,n}) = (\alpha_{1,1} \cdots \alpha_{1,n})$; vgl. §2.4.1.

Definition. Sei $A = (\alpha_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant m,\, 1\leqslant j\leqslant n} \in \mathbf{R}^{m\times n}$. Sei $A' = (\alpha'_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant m,\, 1\leqslant j\leqslant n} \in \mathbf{R}^{m\times n}$. Sei $B = (\beta_{j,k})_{1\leqslant j\leqslant n,\, 1\leqslant k\leqslant p} \in \mathbf{R}^{n\times p}$. Sei $\lambda \in \mathbf{R}$.

Wir setzen

$$\begin{array}{rcll} A + A' & := & (\alpha_{i,j} + \alpha'_{i,j})_{1 \leqslant i \leqslant m,\, 1 \leqslant j \leqslant n} & \in \mathbf{R}^{m \times n} \\ \lambda A \;=\; \lambda \cdot A & := & (\lambda \alpha_{i,j})_{1 \leqslant i \leqslant m,\, 1 \leqslant j \leqslant n} & \in \mathbf{R}^{m \times n} \\ AB \;=\; A \cdot B & := & \left(\sum_{j=1}^n \alpha_{i,j} \cdot \beta_{j,k} \right)_{1 \leqslant i \leqslant m,\, 1 \leqslant k \leqslant p} & \in \mathbf{R}^{m \times p}\,. \end{array}$$

Wir setzen

$$\mathrm{E} \;=\; \mathrm{E}_n \;:=\; \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ & & \ddots & & \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \;\in\; \mathbf{R}^{n \times n}\,, \quad 0 \;=\; 0_{m \times n} \;:=\; \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \;\in\; \mathbf{R}^{m \times n}\,.$$

Einheitsmatrix *Nullmatrix*

Für $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$ setzt man noch $A^0 := \mathrm{E}_n$ und $A^k := A \cdot A \cdots A$ (k Faktoren) für $k \geqslant 1$.

Beispiel.

Es ist $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -2 & 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 5 & 0 \\ -1 & 4 & -3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 12 & 7 & 16 \\ 4 & 13 & 16 & 4 \end{pmatrix}$.

Es ist $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{E}_2\,$.

Es ist $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 10$. Es ist $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Es ist $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ nicht definiert.

Definition. Ist $A = (\alpha_{i,j})_{i,j} \in \mathbf{R}^{m \times n}$, so sei $A^{\mathrm{t}} := (\alpha_{i,j})_{j,i} \in \mathbf{R}^{n \times m}$ ihre *Transponierte.*

Beispiel. Es ist $\begin{pmatrix} 1 & 7 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{\mathrm{t}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.

Bemerkung. Seien A, A', $A'' \in \mathbf{R}^{m \times n}$. Seien B, $B' \in \mathbf{R}^{n \times p}$. Sei $C \in \mathbf{R}^{p \times q}$. Seien λ, λ', μ, $\mu' \in \mathbf{R}$.

Es ist

$$\begin{array}{rcl} A + A' & = & A' + A \\ A + 0_{m \times n} & = & A \\ A + A' + A'' & = & (A + A') + A'' \;=\; A + (A' + A'') \\ (\lambda A + \lambda' A')(\mu B + \mu' B') & = & \lambda\mu AB + \lambda'\mu A'B + \lambda\mu' AB' + \lambda'\mu' A'B' \end{array}$$

$$\begin{array}{rcccl} A\,\mathrm{E}_n & = & \mathrm{E}_m\,A & = & A \\ A\,0_{n \times p} & = & 0_{m \times n}\,B & = & 0_{m \times p} \\ ABC & := & (AB)C & = & A(BC) \\ (AB)^{\mathrm{t}} & = & B^{\mathrm{t}}A^{\mathrm{t}}\,. & & \end{array}$$

Bemerkung. Sind A, $B \in \mathbf{R}^{n \times n}$ von quadratischer Form und ist $AB = \mathrm{E}_n$, dann ist auch $BA = \mathrm{E}_n$. Diesenfalls ist B durch A eindeutig bestimmt, und wir schreiben auch $A^{-1} := B$, genannt die *inverse* Matrix von A. Zur Berechnung der Inversen siehe §5.3, Bemerkung sowie Beispiel, (3).

Beispiel. Sei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^{2 \times 2}$. Sei $ad - bc \neq 0$. Sei $B := \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$. Dann ist $AB = \mathrm{E}_2$ und also $B = A^{-1}$.

5.2 Vektoren im Standardraum

Sei $n \geqslant 0$.

5.2.1 Geometrische Interpretation

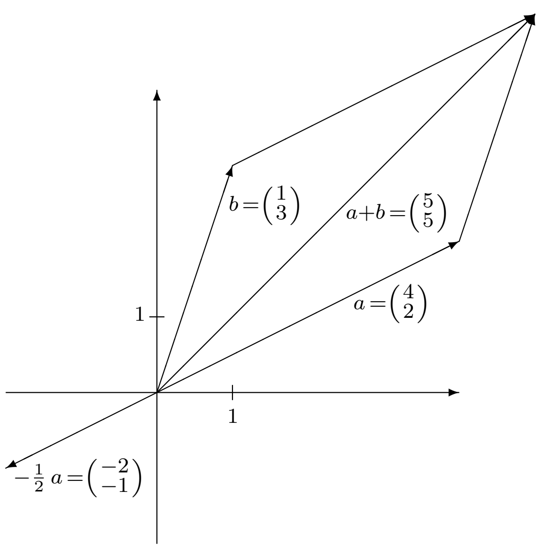
Eine Matrix in $\mathbf{R}^{n\times 1}$ wird oft $a = (\alpha_i)_i = (\alpha_i)_{1\leqslant i\leqslant n} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^{n\times 1}$ geschrieben und oft als *Vektor* in $\mathbf{R}^{n\times 1}$ bezeichnet.

Die geometrische Interpretation eines solchen Vektors ist die eines Pfeils von $(0, \ldots, 0)$ nach $(\alpha_1\,, \ldots\,, \alpha_n)$ in $\mathbf{R}^n$.

Die geometrische Interpretation der Vektoraddition ist das Aneinandersetzen von Pfeilen.

Die geometrische Interpretation des λ-fachen eines Vektors ist das Strecken um den Faktor λ (Richtungsumkehr, falls $\lambda < 0$).

Beispiel. Sei $n = 2$.



5.2.2 Skalarprodukt

Seien $a = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^{n\times 1}$.

Definition. Das Produkt $a^{\mathrm{t}}\, b = a^{\mathrm{t}} \cdot b \in \mathbf{R}$ heißt *Skalarprodukt* von a und b.

Es ist $a^{\mathrm{t}}\, b = \alpha_1\beta_1 + \cdots + \alpha_n\beta_n \;=\; b^{\mathrm{t}}\, a$.

Die *Norm* oder *Länge* von a ist als $\|a\| := (a^{\mathrm{t}}\, a)^{1/2} = (\alpha_1^2 + \cdots + \alpha_n^2)^{1/2}$ definiert. Vgl. §2.4.1.

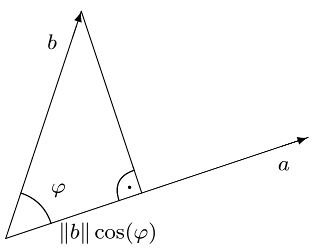
Lemma (Cauchy-Schwarz). Es ist $|a^{\mathrm{t}}\, b| \leqslant \|a\| \cdot \|b\|$.

Bemerkung. Seien a, $b \neq 0$. Ist φ der von a und b eingeschlossene Winkel, so ist

$$a^{\mathrm{t}}\, b \;=\; \|a\| \cdot \|b\| \cdot \cos(\varphi)\ .$$

Es ist also $\varphi = \arccos(\frac{a^{\mathrm{t}}\, b}{\|a\| \cdot \|b\|})$.

Insbesondere stehen a und b genau dann orthogonal aufeinander, wenn $a^{\mathrm{t}}\, b = 0$.



Beispiel. Es ist $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}^{\mathrm{t}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$. Also stehen $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ orthogonal, d.h. senkrecht, aufeinander.

Beispiel. Sei $a = \binom{3}{2}$. Sei $b = \binom{1}{1}$. Es ist $a^{\mathrm{t}}\, b = 5$. Also ist der von a und b eingeschlossene Winkel gleich $\arccos(\frac{a^{\mathrm{t}}\, b}{\|a\|\|b\|}) = \arccos(\frac{5}{\sqrt{13} \cdot \sqrt{2}}) \approx \arccos(0{,}98058) \approx 0{,}19740 \approx 11.310°$ (erstere Winkelangabe im Bogenmaß).

Beispiel. Sei $D \subseteq \mathbf{R}^2$ offen. Sei $f : D \longrightarrow \mathbf{R}$, $(x, y) \longmapsto f(x, y)$ partiell differenzierbar nach x und nach y. Sei $(x_0\,, y_0) \in D$.

Sei $E \subseteq \mathbf{R}$ offen. Sei $s_0 \in E$. Sei $(g, h) : E \longrightarrow D$ so, daß $(g(s_0), h(s_0)) = (x_0\,, y_0)$, und so, daß $f(g(s), h(s))$ konstant ist, d.h. nicht von s abhängt. In anderen Worten, die Abbildung (g, h) bilde E in eine *Höhenlinie* oder *Isoquante* von f durch $(x_0\,, y_0)$ ab.

Mit der Kettenregel aus §3.3.1 wird

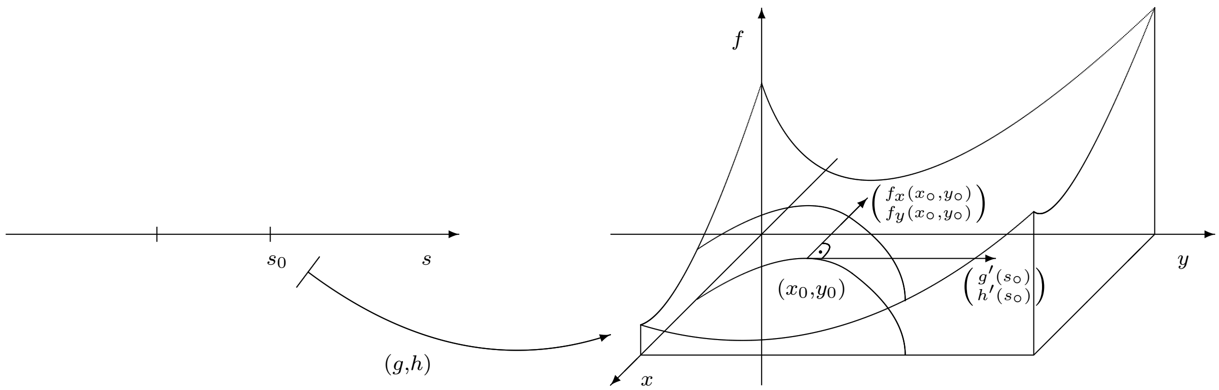
$$0 \;=\; \big(f(g(s), h(s))\big)' \;=\; f_x(g(s), h(s)) \cdot g'(s) + f_y(g(s), h(s)) \cdot h'(s)\ .$$

Dies trifft insbesondere für $s = s_0$ zu. Dort wird also

$$0 \;=\; f_x(x_0\,, y_0) \cdot g'(s_0) + f_y(x_0\,, y_0) \cdot h'(s_0) \;=\; \begin{pmatrix} f_x(x_0,y_0) \\ f_y(x_0,y_0) \end{pmatrix}^{\mathrm{t}} \begin{pmatrix} g'(s_0) \\ h'(s_0) \end{pmatrix}\ .$$

Der Vektor $\binom{g'(s_0)}{h'(s_0)}$ zeigt bei (x_0, y_0) tangential in Richtung der von (g, h) beschriebenen Kurve in D. Darauf steht der Vektor $\binom{f_x(x_0,y_0)}{f_y(x_0,y_0)}$, *Gradient* genannt, also senkrecht.

Der Gradient von f bei $(x_0\,, y_0)$ steht somit senkrecht auf der Richtung der Höhenlinie von f bei $(x_0\,, y_0)$. Er zeigt in Richtung des stärksten Anstiegs von f.



Beachte in dieser Skizze die perspektivische Verzerrung des rechten Winkels, den $\binom{f_x(x_0,y_0)}{f_y(x_0,y_0)}$ und der Tangentenvektor $\binom{g'(s_0)}{h'(s_0)}$ an die Bildkurve von (g,h) einschließen.

5.2.3 Kreuzprodukt

Seien $a = \begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \beta_3\end{pmatrix} \in \mathbf{R}^{3\times 1}$.

Das *Kreuzprodukt* von a und b ist definiert durch

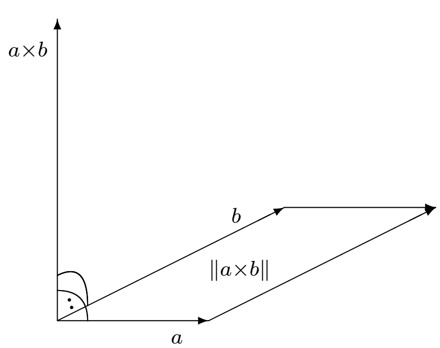
$$a \times b \;=\; \begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \beta_3\end{pmatrix} \;:=\; \begin{pmatrix}\alpha_2\beta_3-\alpha_3\beta_2\\ \alpha_3\beta_1-\alpha_1\beta_3\\ \alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1\end{pmatrix}\,.$$

Bemerkung.

(1) Es steht $a \times b$ orthogonal auf a und auf b; vgl. Aufgabe 75.(2).

(2) Es ist $\|a \times b\|$ der Flächeninhalt des von a und b aufgespannten Parallelogramms. Insbesondere ist $a \times a = 0$.

Wenn, wie üblich, die x_1-Achse bzw. die x_2-Achse bzw. die x_3-Achse in Richtung des Daumens bzw. Mittelfingers bzw. Zeigefingers der linken Hand eingezeichnet werden, und a bzw. b in Richtung des Daumens bzw. Mittelfingers der linken Hand zeigt, dann zeigt $a \times b$ in Richtung des Zeigefingers.



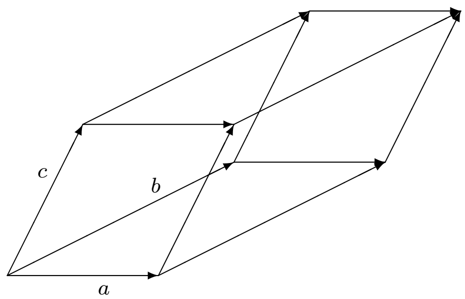
Bemerkung. Seien a, a', b, b', $c \in \mathbf{R}^{3\times 1}$. Seien λ, λ', μ, $\mu' \in \mathbf{R}$.

(1) Es ist $(\lambda a + \lambda' a') \times (\mu b + \mu' b') = \lambda\mu(a \times b) + \lambda'\mu(a' \times b) + \lambda\mu'(a \times b') + \lambda'\mu'(a' \times b')$.

(2) Es ist $a \times b = -(b \times a)$; vgl. Aufgabe 75.(1).

(3) Es ist $a \times (b \times c) + b \times (c \times a) + c \times (a \times b) = 0$; vgl. Aufgabe 75.(3).

(4) Es ist $|a^{\mathrm{t}}\,(b \times c)|$ der Rauminhalt des von a, b und c aufgespannten Parallelepipeds.



Denn dieser Rauminhalt ist gleich der Grundfläche $\|b \times c\|$, multipliziert mit der Höhe $|a^{\mathrm{t}}\,(b \times c)|/\|b \times c\|$ des Parallelepipeds.

Beispiel.

(1) Es ist $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 2 - 5\cdot 1 \\ 5\cdot 3 - 3\cdot 2 \\ 3\cdot 1 - 2\cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 9 \\ -3 \end{pmatrix}$.

(2) Seien $\binom{\alpha_1}{\alpha_2}$, $\binom{\beta_1}{\beta_2} \in \mathbf{R}^{2\times 1}$. Das von $\binom{\alpha_1}{\alpha_2}$ und $\binom{\beta_1}{\beta_2}$ aufgespannte Parallelogramm hat den Flächeninhalt $\left\| \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 \end{pmatrix} \right\| = |\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1|$.

5.3 Lineare Gleichungssysteme – Zeilenstufenform

Seien m, $n \geqslant 0$. Sei $A = (\alpha_{i,j})_{i,j} \in \mathbf{R}^{m\times n}$. Sei $b = (\beta_i)_i \in \mathbf{R}^{m\times 1}$. Wir wollen die Lösungsmenge

$$\{\, x \in \mathbf{R}^{n\times 1} \; : \; Ax = b \,\}$$

bestimmen.

Ist $b = 0$, so spricht man von einem *homogenen linearen Gleichungssystem.*

Ist $b \neq 0$, so spricht man von einem *inhomogenen linearen Gleichungssystem.*

Sei allgemein $C = (\gamma_{i,j})_{i,j} \in \mathbf{R}^{m\times(n+1)}$ gegeben. Seien $1 \leqslant k \leqslant m$ und $1 \leqslant \ell \leqslant n$ so, daß $\gamma_{k,\ell} \neq 0$. Wir *säubern* mit dem Eintrag an Position (k,ℓ) *die ℓ-te Spalte* von C, indem wir die k-te Zeile mit $\gamma_{k,\ell}^{-1}$ multiplizieren und dann das $\gamma_{i,\ell}$-fache der entstandenen k-ten Zeile von der i-ten Zeile subtrahieren für alle $1 \leqslant i \leqslant m$ mit $i \neq k$. Wir erreichen so, daß die ℓ-te Spalte der umgeformten Matrix bei (k,ℓ) den Eintrag 1 hat, und ansonsten Nullen.

Algorithmus. Es entstehe die Matrix $(A|b) \in \mathbf{R}^{m\times(n+1)}$ durch Anfügen von b an A als $(n+1)$-te Spalte. Wir wollen $(A|b)$ schrittweise umformen.

Sei $1 \leqslant \ell_1 \leqslant n$ minimal so, daß unsere Matrix einen Eintrag ungleich 0 in der ℓ_1-ten Spalte besitzt. Wähle einen solchen. Vertausche die Zeile mit diesem Eintrag mit der ersten Zeile. Säubere mit dem Eintrag an Position $(1, \ell_1)$ die ℓ_1-te Spalte.

Sei $1 \leqslant \ell_2 \leqslant n$ minimal so, daß unsere Matrix einen Eintrag ungleich 0 in der ℓ_2-ten Spalte besitzt, der nicht in der ersten Zeile sitzt. Wähle einen solchen. Vertausche die Zeile mit diesem Eintrag mit der zweiten Zeile. Säubere mit dem Eintrag an Position $(2, \ell_2)$ die ℓ_2-te Spalte.

Sei $1 \leqslant \ell_3 \leqslant n$ minimal so, daß unsere Matrix einen Eintrag ungleich 0 in der ℓ_3-ten Spalte besitzt, der nicht in den Zeilen 1 bis 2 sitzt. Wähle einen solchen. Vertausche die Zeile mit diesem Eintrag mit der dritten Zeile. Säubere mit dem Eintrag an Position $(3, \ell_3)$ die ℓ_3-te Spalte.

Sei $1 \leqslant \ell_4 \leqslant n$ minimal so, daß unsere Matrix einen Eintrag ungleich 0 in der ℓ_4-ten Spalte besitzt, der nicht in den Zeilen 1 bis 3 sitzt. Wähle einen solchen. Vertausche die Zeile mit diesem Eintrag mit der vierten Zeile. Säubere mit dem Eintrag an Position $(4, \ell_4)$ die ℓ_4-te Spalte.

Fahre so fort, bis ℓ_{s+1} nicht mehr existiert; was dann der Fall ist, wenn $s+1 > m$ ist oder aber die Zeilen $s+1$ bis m unserer Matrix nur Nulleinträge in den Spalten 1 bis n aufweisen.

Wir haben also insgesamt die Spalten $\ell_1, \ldots, \ell_s$ gesäubert. Numeriere die anderen Spalten aufsteigend durch mit $\ell'_1, \ell'_2, \ldots, \ell'_{n-s}$.

Die umgeformte Matrix heiße $(\tilde{A}|\tilde{b})$. Man sagt, $\tilde{A}$ ist in *Zeilenstufenform.* Die *Stufen* von $\tilde{A}$ befinden sich in den Spalten $\ell_1, \ldots, \ell_s$.

Falls $\tilde{b}$ einen Eintrag ungleich 0 an einer Position $s+1$ bis m hat, dann ist

$$\{\, x \in \mathbf{R}^{n\times 1} \,:\, Ax = b \,\} \;=\; \emptyset$$

Falls $\tilde{b}$ nur Nulleinträge an den Positionen $s+1$ bis m hat, dann verfahre wie folgt.

Lies das $x_0 \in \mathbf{R}^{n\times 1}$ mit Eintrag 0 an Position ℓ'_j für alle $1 \leqslant j \leqslant n-s$ ab, das $\tilde{A}x_0 = \tilde{b}$ erfüllt.

Lies für $1 \leqslant i \leqslant n-s$ das $x_i \in \mathbf{R}^{n\times 1}$ mit Eintrag 1 an Position ℓ'_i und Eintrag 0 an Position ℓ'_j für $1 \leqslant j \leqslant n-s$ mit $j \neq i$ ab, das $\tilde{A}x_i = 0$ erfüllt.

Dann ist

$$\{\, x \in \mathbf{R}^{n\times 1} \,:\, Ax = b \,\} \;=\; \{\, x_0 + \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_{n-s} x_{n-s} \,:\, \lambda_i \in \mathbf{R} \text{ für } 1 \leqslant i \leqslant n-s \,\}$$

Ist $b = 0$, so ist auch $x_0 = 0$.

Bemerkung. Dieselbe Umformung, angewandt auf $n \geqslant 0$, $A \in \mathbf{R}^{n\times n}$ und $(A|\mathrm{E}_n)$, gibt $(\mathrm{E}_n|A^{-1})$, falls die Umformung eine solche Matrix liefert, und ansonsten die Aussage, daß A nicht invertierbar ist.

Bemerkung. Eine Matrix $C = (\gamma_{i,j})_{i,j} \in \mathbf{R}^{m\times n}$ ist also in Zeilenstufenform, falls es für ein $1 \leqslant k \leqslant n$ Stufenspalten mit den Nummern $1 \leqslant \ell_1 < \ell_2 < \cdots < \ell_k \leqslant n$ gibt, für welche die Bedingungen $(1,2)$ gelten.

Sei hierzu noch $\ell_0 := 0$ und $\ell_{k+1} = n+1$.

(1) Sei $1 \leqslant i \leqslant k$, sei also ℓ_i die Nummer einer Stufenspalte. Dann ist $\gamma_{i,\ell_i} = 1$. Es ist $\gamma_{s,\ell_i} = 0$ für $1 \leqslant s \leqslant i-1$ und für $i+1 \leqslant s \leqslant m$.

(2) Sei $1 \leqslant j \leqslant n$ die Nummer einer Nichtstufenspalte, sei also $\ell_i < j < \ell_{i+1}$ für ein $0 \leqslant i \leqslant k$. Dann ist $\gamma_{s,j} = 0$ für $i+1 \leqslant s \leqslant m$.

Beispiel.

(1) Sei $A = \left(\begin{smallmatrix} 0&0&2&2\\ 2&2&4&6\\ 2&2&3&5 \end{smallmatrix}\right)$, sei $b = \left(\begin{smallmatrix} 0\\2\\0 \end{smallmatrix}\right)$.

Wir wollen $\{\, x \in \mathbf{R}^{4\times 1} \;:\; Ax = b \,\}$ und zugleich auch noch $\{\, x \in \mathbf{R}^{4\times 1} \;:\; Ax = 0 \,\}$ bestimmen.

Zunächst bilden wir

$$(A|b) \;=\; \left(\begin{array}{cccc|c} 0&0&2&2&0\\ 2&2&4&6&2\\ 2&2&3&5&0 \end{array}\right)$$

durch Nebeneinanderstellen.

Es ist $\ell_1 = 1$. Wir säubern mit dem Eintrag an Position $(2,1)$ die erste Spalte, indem wir die zweite Zeile mit $1/2$ multiplizieren und sodann ihr 2-faches von der dritten Zeile subtrahieren. Schließlich wird noch die zweite Zeile in die erste getauscht. Das gibt :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1&1&2&3&1\\ 0&0&2&2&0\\ 0&0&-1&-1&-2 \end{array}\right) .$$

Die zweite Spalte muß nun übersprungen werden, da die Einträge an den Positionen $(2,2)$ und $(3,2)$ null sind, hier also nicht gesäubert werden kann.

Es wird $\ell_2 = 3$. Wir säubern mit dem Eintrag an Position $(3,3)$ die dritte Spalte, indem wir die dritte Zeile mit -1 multiplizieren und ihr mit 2-faches von der ersten Zeile und von der zweiten Zeile subtrahieren. Schließlich wird noch die dritte Zeile in die zweite getauscht. Das gibt :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1&1&0&1&-3\\ 0&0&1&1&2\\ 0&0&0&0&-4 \end{array}\right) \;=:\; (\tilde{A}|\tilde{b}) .$$

Die Umformungen sind beendet. Die dabei nicht gesäuberten Spalten von A werden durchnumeriert mit $\ell'_1 := 2$ und $\ell'_2 := 4$.

Wir lesen ab, daß

$$\{\, x \in \mathbf{R}^{4\times 1} \;:\; Ax = b \,\} \;=\; \{\, x \in \mathbf{R}^{4\times 1} \;:\; \tilde{A}x = \tilde{b} \,\} \;=\; \emptyset$$

ist, da die dritte Zeile nicht erfüllbar ist.

Ferner lesen wir ab, daß

$$\{\, x \in \mathbf{R}^{4\times 1} \;:\; Ax = 0 \,\} \;=\; \{\, x \in \mathbf{R}^{4\times 1} \;:\; \tilde{A}x = 0 \,\} \;=\; \left\{\, \lambda_1 \begin{pmatrix} -1 \\ \boxed{1} \\ 0 \\ \boxed{0} \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -1 \\ \boxed{0} \\ -1 \\ \boxed{1} \end{pmatrix} \;:\; \lambda_1\,,\, \lambda_2 \,\in\, \mathbf{R} \,\right\}$$

ist, wobei wir an den Positionen ℓ'_i (also in die Kästchen) jeweils eine 1 und ansonsten Nullen eingesetzt und dann so ergänzt haben, daß jeweils $\tilde{A}x = 0$ ist.

Eine Probe macht man, indem man in die ursprüngliche Gleichung einsetzt.

(2) Wir suchen alle $q,\, r,\, s,\, t,\, u,\, v,\, w \,\in\, \mathbf{R}$, welche das inhomogene lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcrcrcl} 0q & + & 2r & + & 4s & + & 6t & + & 0u & + & 8v & + & 4w & = & 0 \\ 0q & + & r & + & 2s & + & 3t & + & u & + & 9v & + & 3w & = & 0 \\ 0q & + & r & + & 2s & + & 3t & + & 0u & + & 4v & + & 3w & = & 1 \\ 0q & + & (-1)r & + & (-2)s & + & (-3)t & + & 0u & + & (-4)v & + & (-2)w & = & 0 \end{array}$$

erfüllen. In anderen Worten, wir suchen $\left\{\, x := \left(\begin{smallmatrix} q \\ r \\ s \\ t \\ u \\ v \\ w \end{smallmatrix}\right) \;\in\; \mathbf{R}^{7\times 1} \;:\; Ax \;=\; b \,\right\}$ für

$(A|b) := \left(\begin{array}{rrrrrrr|r} 0 & 2 & 4 & 6 & 0 & 8 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 1 & 9 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & 0 & -4 & -2 & 0 \end{array}\right)$. Dazu formen wir wie folgt um.

$$\begin{array}{cccc} (A|b) & \overset{\text{säubern mit } (2,2)}{\rightsquigarrow} & \left(\begin{array}{rrrrrrr|r} 0 & 1 & 2 & 3 & 1 & 9 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -10 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -5 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & 1 & 0 \end{array}\right) & \overset{\text{säubern mit } (4,5)}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{rrrrrrr|r} 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \\ & \overset{\text{säubern mit } (4,7)}{\rightsquigarrow} & \left(\begin{array}{rrrrrrr|r} 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 4 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) & =: \qquad (\tilde{A}|\tilde{b}) \end{array}$$

Wir erhalten

$$\begin{array}{rl} & \{\, x \in \mathbf{R}^{7\times 1} \;:\; Ax = b \,\} \;=\; \{\, x \in \mathbf{R}^{7\times 1} \;:\; \tilde{A}x = \tilde{b} \,\} \\ = & \left\{ \begin{pmatrix} \boxed{0} \\ -2 \\ \boxed{0} \\ \boxed{0} \\ -1 \\ \boxed{0} \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} \boxed{1} \\ 0 \\ \boxed{0} \\ \boxed{0} \\ 0 \\ \boxed{0} \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} \boxed{0} \\ -2 \\ \boxed{1} \\ \boxed{0} \\ 0 \\ \boxed{0} \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} \boxed{0} \\ -3 \\ \boxed{0} \\ \boxed{1} \\ 0 \\ \boxed{0} \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_4 \begin{pmatrix} \boxed{0} \\ -4 \\ \boxed{0} \\ \boxed{0} \\ -5 \\ \boxed{1} \\ 0 \end{pmatrix} \;:\; \lambda_i \in \mathbf{R} \text{ für } 1 \leqslant i \leqslant 4 \right\} . \end{array}$$

(3) Für $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ wird

$$\left(\begin{array}{rr|rr} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \;\rightsquigarrow\; \left(\begin{array}{rr|rr} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) ,$$

und also ist A nicht invertierbar.

Für $A = \left(\begin{smallmatrix} 1&0&1 \\ 1&1&1 \\ 1&1&0 \end{smallmatrix}\right)$ wird

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1&0&1&1&0&0 \\ 1&1&1&0&1&0 \\ 1&1&0&0&0&1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1&0&1&1&0&0 \\ 0&1&0&-1&1&0 \\ 0&1&-1&-1&0&1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1&0&1&1&0&0 \\ 0&1&0&-1&1&0 \\ 0&0&-1&0&-1&1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1&0&0&1&-1&1 \\ 0&1&0&-1&1&0 \\ 0&0&1&0&1&-1 \end{array}\right),$$

und also $A^{-1} = \left(\begin{smallmatrix} 1&-1&1 \\ -1&1&0 \\ 0&1&-1 \end{smallmatrix}\right)$.

Eine Probe macht man jeweils, indem man $A \cdot A^{-1}$ (oder $A^{-1} \cdot A$) berechnet.

Wer keine Probe macht, ist selbst schuld.

5.4 Vektorräume

5.4.1 Definition

Definition. Ein ($\mathbf{R}$-) *Vektorraum* ist eine Menge V, zusammen mit Abbildungen

$$\begin{array}{rcrclcrcl} (+) & : & V \times V & \longrightarrow & V\,, & (v,w) & \longmapsto & v+w\,, \\ (\cdot) & : & \mathbf{R} \times V & \longrightarrow & V\,, & (\lambda,v) & \longmapsto & \lambda \cdot v =: \lambda v\,, \end{array}$$

derart, daß folgende Eigenschaften (V 1–7) gelten.

(V 1) Es gibt ein Element $0 \in V$ mit $v + 0 = v$ für $v \in V$.

(V 2) Für alle $v \in V$ gibt es ein Element $-v \in V$ mit $v + (-v) = 0$.

(V 3) Es ist $v + w = w + v$ für $v,\, w \in V$.

(V 4) Es ist $v + w + x := (v + w) + x = v + (w + x)$ für $v,\, w,\, x \in V$.

(V 5) Es ist $1 \cdot v = v$ für $v \in V$.

(V 6) Es ist $(\lambda + \mu) \cdot (v + w) = \lambda \cdot v + \lambda \cdot w + \mu \cdot v + \mu \cdot w$ für $\lambda,\, \mu \in \mathbf{R}$ und $v,\, w \in V$.

(V 7) Es ist $\lambda \cdot \mu \cdot v := (\lambda \cdot \mu) \cdot v = \lambda \cdot (\mu \cdot v)$ für $\lambda,\, \mu \in \mathbf{R}$ und $v \in V$.

Die Elemente eines Vektorraums heißen *Vektoren,* in Verallgemeinerung des bisherigen Begriffs; vgl. Beispiel, (1).

Wir schreiben auch $v - w = v + (-w)$ für $v,\, w \in V$.

Beispiel.

(1) Seien $m,\, n \geqslant 0$. Es ist $\mathbf{R}^{m\times n}$, zusammen mit der in §5.1 eingeführten Matrixaddition und der Multiplikation von Elementen aus $\mathbf{R}$ mit Matrizen, ein Vektorraum.

Insbesondere ist der Standardraum $\mathbf{R}^{m\times 1}$ ein Vektorraum.

(2) Sei M eine Menge. Sei $\mathbf{R}^M := \{f : M \longrightarrow \mathbf{R} \,:\, f \text{ ist eine Abbildung}\}$. Setze

$$\begin{array}{rcl} (f+g)(m) & := & f(m)+g(m) \\ (\lambda \cdot f)(m) & := & \lambda \cdot f(m) \end{array}$$

für $f,\, g \in \mathbf{R}^M$, $\lambda \in \mathbf{R}$ und $m \in M$; vgl. §2.1.1. Damit wird $\mathbf{R}^M$ zu einem Vektorraum.

Bemerkung. Sei V ein Vektorraum, sei $\lambda \in \mathbf{R}$ und sei $v \in V$. Es ist $\lambda \cdot v = 0$ genau dann, wenn $\lambda = 0$ oder $v = 0$. Es ist $(-1) \cdot v = -v$.

Ist $v \in V$, so ist $0 \cdot v \overset{(\mathrm{V}\,1,2,4)}{=} 0 \cdot v + 0 \cdot v - 0 \cdot v \overset{(\mathrm{V}\,6)}{=} (0+0) \cdot v - 0 \cdot v = 0 \cdot v - 0 \cdot v \overset{(\mathrm{V}\,2)}{=} 0$.
Analog zeigt man auch $\lambda \cdot 0 = 0$ für $\lambda \in \mathbf{R}$.

Ist umgekehrt $\lambda v = 0$, und ist dabei $\lambda \neq 0$, dann ist $v = \lambda^{-1}\lambda v = 0$.

Es ist $(-1) \cdot v \overset{(\mathrm{V}\,1,2,4)}{=} (-1) \cdot v + 1 \cdot v - 1 \cdot v \overset{(\mathrm{V}\,5,6)}{=} ((-1)+1) \cdot v - v = 0 \cdot v - v \overset{\text{s.o.}}{=} -v$.

5.4.2 Dimension

Sei V ein Vektorraum. Sei $n \geqslant 0$. Sei $(v_1, \ldots, v_n)$ ein n-Tupel aus Elementen von V.

Definition.

(1) Das *Erzeugnis* von $(v_1, \ldots, v_n)$ ist die Menge

$$\langle\, v_1, \ldots, v_n \,\rangle \;=\; {}_{\mathbf{R}}\langle\, v_1, \ldots, v_n \,\rangle \;:=\; \{\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n \,:\, \lambda_i \in \mathbf{R} \text{ für } 1 \leqslant i \leqslant n\} \;\subseteq\; V$$

aller *Linearkombinationen* dieses Tupels.

(2) Es heißt das Tupel $(v_1, \ldots, v_n)$ *erzeugend,* wenn

$$V = \langle\, v_1, \ldots, v_n \,\rangle\,.$$

(3) Es heißt das Tupel $(v_1, \ldots, v_n)$ *linear unabhängig,* wenn mit $\lambda_i \in \mathbf{R}$ für $1 \leqslant i \leqslant n$ die Gleichung

$$\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n \;=\; 0$$

nur für $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$ erfüllt ist.

(4) Es heißt das Tupel $(v_1, \ldots, v_n)$ eine *Basis* von V, falls es linear unabhängig und erzeugend ist.

(5) Ist $(v_1, \ldots, v_n)$ eine Basis von V, so heißt $\dim(V) := n$ die *Dimension* von V.

Hat V eine (endliche) Basis, so heiße V *endlichdimensional.*

Hat V keine (endliche) Basis, so heiße V *unendlichdimensional,* und wir schreiben $\dim(V) := \infty$.

Bemerkung.

(1) Es ist $(v_1, \ldots, v_n)$ genau dann eine Basis von V, wenn für alle $v \in V$ genau ein n-Tupel $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbf{R}^n$ mit

$$v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n$$

existiert.

(2) Die Dimension von V hängt nicht von der gewählten Basis von V ab. In anderen Worten, sind $(v_1, \ldots, v_n)$ und $(v'_1, \ldots, v'_{n'})$ Basen von V, dann ist $n = n'$.

Bemerkung. Sei $1 \leqslant i \leqslant n$. Schreibe $\mathrm{e}_i := \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^{n \times 1}$, wobei die 1 an Position $(i, 1)$ sitzt, für den i-ten *Standardbasisvektor.*

Es ist $(\mathrm{e}_1, \ldots, \mathrm{e}_n)$ eine Basis von $\mathbf{R}^{n \times 1}$, die *Standardbasis.* Also ist $\dim(\mathbf{R}^{n \times 1}) = n$.

Bemerkung. Sei $m \geqslant 0$. Sei $(x_1, \ldots, x_m)$ ein m-Tupel in $\mathbf{R}^{n \times 1}$.

Habe $A \in \mathbf{R}^{n \times m}$ die i-te Spalte $x_i \in \mathbf{R}^{n \times 1}$ für $1 \leqslant i \leqslant m$; d.h. entstehe A durch Nebeneinanderstellen der Vektoren x_i.

(1) Es ist $(x_1, \ldots, x_m)$ genau dann erzeugend, wenn die Zeilenstufenform von A keine Nullzeile enthält.

(2) Es ist $(x_1, \ldots, x_m)$ genau dann linear unabhängig, wenn die Zeilenstufenform von A genau m Nichtnullzeilen enthält.

(3) Es ist $(x_1, \ldots, x_m)$ genau dann eine Basis von $\mathbf{R}^{n \times 1}$, wenn $m = n$ ist und A die Zeilenstufenform E_n hat.

Beispiel.

(1) Es ist $\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ weder linear unabhängig noch erzeugend. Denn die zugehörige Matrix wird zur Zeilenstufenform

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1/2 & 1 \\ 0 & -2 & 1/2 & 1 \\ 0 & 2 & -1/2 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/4 & 3/2 \\ 0 & 1 & -1/4 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

umgeformt, und diese hat 1 (> 0) Nullzeile und 2 (< 4) Nichtnullzeilen.

(2) Es ist $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right)$ eine Basis von $\mathbf{R}^3$, denn die zugehörige Matrix wird zur Zeilenstufenform

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{E}_n$$

umgeformt.

(3) Ist M eine unendliche Menge, dann ist auch $\dim(\mathbf{R}^M) = \infty$.

5.4.3 Unterräume

Sei V ein Vektorraum.

Definition. Ein *Unterraum* (oder *Teilraum*) von V ist eine Teilmenge $U \subseteq V$ so, daß $0 \in U$ und daß für alle $\lambda,\, \lambda' \in \mathbf{R}$ und $u,\, u' \in U$ auch

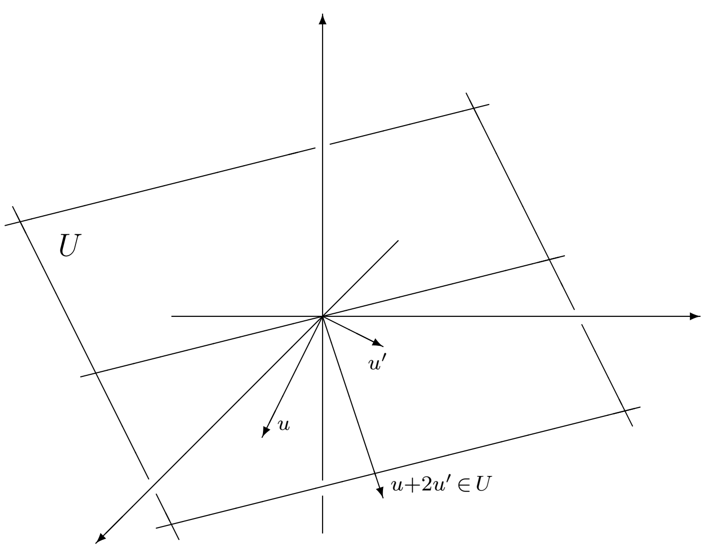
$$\lambda u + \lambda' u' \;\in\; U$$

ist.

So z.B. sind $0 := \{0\}$ und V Unterräume von V.

Bemerkung. Ist U ein Unterraum von V, so ist U, zusammen mit den eingeschränkten Abbildungen $(+)|_{U\times U}^{U}$ und $(\cdot)|_{\mathbf{R}\times U}^{U}$, selbst ein Vektorraum.

Skizze eines zweidimensionalen Unterraumes $U \subseteq \mathbf{R}^3$.



Beispiel. Seien $a,\, b \in \mathbf{R}$ mit $a < b$. Sei $M := (a, b)$. Es ist

$$\{\, f : M \longrightarrow \mathbf{R} \;:\; f \text{ ist differenzierbar} \,\} \;\subseteq\; \mathbf{R}^M$$

ein Unterraum.

Bemerkung. Seien $T,\, U \subseteq V$ Unterräume. Dann sind auch $T \cap U$ und

$$T + U \;:=\; \{\, t + u \;:\; t \in T,\; u \in U \,\}$$

Unterräume.

Sei V nun endlichdimensional.

(1) Es ist $\dim(U) \leqslant \dim(V)$.
    Es ist $\dim(U) = 0$ genau dann, wenn $U = 0$.
    Es ist $\dim(U) = \dim(V)$ genau dann, wenn $U = V$.

(2) Es ist $\dim(T) + \dim(U) = \dim(T+U) + \dim(T \cap U)$.

Bemerkung. Sei $n \geqslant 0$. Sei $(v_1\,,\,\dots\,,\,v_n)$ ein n-Tupel in V. Dann ist

$$U \;:=\; \langle\, v_1\,,\,\dots\,,\,v_n\,\rangle \;\subseteq\; V$$

ein Unterraum. Das Tupel $(v_1\,,\,\dots\,,\,v_n)$ enthält eine Basis von U als Teiltupel.

Ist $m \geqslant 1$ und $V = \mathbf{R}^{m\times 1}$, so kann eine solche Basis von U wie folgt ermittelt werden. Habe $A \in \mathbf{R}^{m\times n}$ die i-te Spalte v_i für $1 \leqslant i \leqslant n$. Sei $\tilde{A}$ die Zeilenstufenform von A. Seien dabei die Spalten $\ell_1\,,\,\dots\,,\,\ell_s$ gesäubert worden; Bezeichnungen wie in §5.3. Dann ist $(v_{\ell_1}\,,\,\dots\,,\,v_{\ell_s})$ eine Basis von U.

Bemerkung. Seien $m, n \geqslant 0$. Sei $A \in \mathbf{R}^{m\times n}$. Es ist $U := \{x \in \mathbf{R}^{n\times 1} \;:\; Ax = 0\}$ ein Unterraum von $\mathbf{R}^{n\times 1}$.

Zur Bestimmung einer Basis von U bestimmen wir die Zeilenstufenform von A wie in §5.3. In der dortigen Bezeichnung ist dann $(x_1\,,\,\dots\,,\,x_{n-s})$ eine Basis von U.

Bemerkung. Seien $m, n, p \geqslant 0$.

Sei $(t_1\,,\,\dots\,,\,t_n)$ ein linear unabhängiges n-Tupel in $\mathbf{R}^{m\times 1}$. Sei

$$T \;:=\; \langle\, t_1\,,\,\dots\,,\,t_n\,\rangle \subseteq \mathbf{R}^{m\times 1}\,.$$

Sei $(u_1\,,\,\dots\,,\,u_p)$ ein linear unabhängiges p-Tupel in $\mathbf{R}^{m\times 1}$. Sei

$$U \;:=\; \langle\, u_1\,,\,\dots\,,\,u_p\,\rangle \subseteq \mathbf{R}^{m\times 1}\,.$$

Schreibe $v_i := t_i$ für $1 \leqslant i \leqslant n$ und $v_i := u_{i-n}$ für $n+1 \leqslant i \leqslant n+p$.

Habe $A \in \mathbf{R}^{m\times(n+p)}$ die i-te Spalte v_i für $1 \leqslant i \leqslant n+p$. D.h. entstehe A durch Nebeneinanderstellen aller Vektoren t_j und u_j.

Sei $\tilde{A}$ die Zeilenstufenform von A. Seien dabei die Spalten $\ell_1\,,\,\dots\,,\,\ell_s$ gesäubert worden; Bezeichnungen wie in §5.3. Dann ist $(v_{\ell_1}\,,\,\dots\,,\,v_{\ell_s})$ eine Basis von $T+U$.

Sei, in der Bezeichnung von §5.3, $(x_1\,,\,\dots\,,\,x_{n+p-s})$ die dort gefundene Basis von $\{\,x \in \mathbf{R}^{(n+p)\times 1} \;:\; Ax = 0\,\}$. Schreibe $x_i =: \begin{pmatrix} \xi_{1,i} \\ \vdots \\ \xi_{n+p,\,i} \end{pmatrix}$ für $1 \leqslant i \leqslant n+p-s$. Dann ist

$$\big(\xi_{1,1}\,t_1 + \cdots + \xi_{n,1}\,t_n\;,\;\dots\;,\;\xi_{1,n+p-s}\,t_1 + \cdots + \xi_{n,n+p-s}\,t_n\big)$$

eine Basis von $T \cap U$.

Denn $A \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_{n+p} \end{pmatrix} = 0$ ist äquivalent zu $\xi_1\,t_1 + \cdots + \xi_n\,t_n \;=\; -(\xi_{n+1}\,u_1 + \cdots + \xi_{n+p}\,u_p)$, und diese Bedingung charakterisiert Elemente in $T \cap U$.

Da $\dim(T) = n$, $\dim(U) = p$, $\dim(T+U) = s$ und $\dim(T \cap U) = n+p-s$, wird in der Tat $\dim(T) + \dim(U) = n+p = \dim(T+U) + \dim(T \cap U)$.

Beispiel. Sei $T := \left\langle \begin{pmatrix} 1\\0\\1\\1\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\0\\1\\0\\1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1\\1\\0\\1\\0 \end{pmatrix} \right\rangle \subseteq \mathbf{R}^{5\times 1}$. Sei $U := \left\langle \begin{pmatrix} 0\\1\\-1\\0\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\1\\1\\1\\1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1\\0\\0\\0\\0 \end{pmatrix} \right\rangle \subseteq \mathbf{R}^{5\times 1}$.

Wir wollen Basen für $T + U$ und $T \cap U$ bestimmen. Wir rechnen.

$$A := \begin{pmatrix} 1&0&1&0&0&1\\ 0&0&1&1&1&0\\ 1&1&0&-1&1&0\\ 1&0&1&0&1&0\\ 0&1&0&0&1&0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1&0&1&0&0&1\\ 0&0&1&1&1&0\\ 0&1&-1&-1&1&-1\\ 0&0&0&0&1&-1\\ 0&1&0&0&1&0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1&0&1&0&0&1\\ 0&1&-1&-1&1&-1\\ 0&0&1&1&1&0\\ 0&0&0&0&1&-1\\ 0&0&1&1&0&1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1&0&0&-1&-1&1\\ 0&1&0&0&2&-1\\ 0&0&1&1&1&0\\ 0&0&0&0&1&-1\\ 0&0&0&0&-1&1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1&0&0&-1&0&0\\ 0&1&0&0&0&1\\ 0&0&1&1&0&1\\ 0&0&0&0&1&-1\\ 0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix}$$

Es ist $\ell_1 = 1$, $\ell_2 = 2$, $\ell_3 = 3$ und $\ell_4 = 5$. Also ist eine Basis von $T + U$ gegeben durch $\left(\begin{pmatrix} 1\\0\\1\\1\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\0\\1\\0\\1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1\\1\\0\\1\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\1\\1\\1\\1 \end{pmatrix} \right)$.

Eine Basis von $\{\, x \in \mathbf{R}^{6\times 1} \;:\; Ax = 0 \,\}$ ist gegeben durch $\left(\begin{pmatrix} 1\\0\\-1\\\boxed{1}\\0\\\boxed{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\-1\\-1\\\boxed{0}\\1\\\boxed{1} \end{pmatrix} \right)$. Also ist eine Basis von $T \cap U$ gegeben durch

$$\left(1 \cdot \begin{pmatrix} 1\\0\\1\\1\\0 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 0\\0\\1\\0\\1 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \begin{pmatrix} 1\\1\\0\\1\\0 \end{pmatrix} \;,\; 0 \cdot \begin{pmatrix} 1\\0\\1\\1\\0 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \begin{pmatrix} 0\\0\\1\\0\\1 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \begin{pmatrix} 1\\1\\0\\1\\0 \end{pmatrix} \right) \;=\; \left(\begin{pmatrix} 0\\-1\\1\\0\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1\\-1\\-1\\-1\\-1 \end{pmatrix} \right).$$

Kapitel 6

Integration

6.1 Definition

Sei $D \subseteq \mathbf{R}$. Seien $a,\, b \in \mathbf{R}$ mit $a \leqslant b$ und $[a, b] \subseteq D$. Sei $f : D \longrightarrow \mathbf{R}$, $x \longmapsto f(x)$ eine stetige Abbildung.

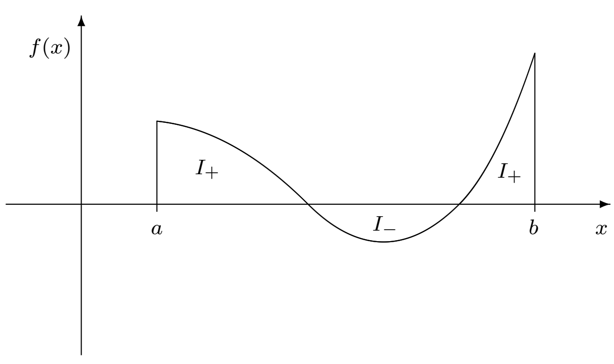
Definition.

Sei I_+ der vom Graphen von f und der x-Achse oberhalb der x-Achse zwischen $x = a$ und $x = b$ eingeschlossene Flächeninhalt.

Sei I_- der vom Graphen von f und der x-Achse unterhalb der x-Achse zwischen $x = a$ und $x = b$ eingeschlossene Flächeninhalt.

Sei das (*bestimmte*) *Integral von f in den Grenzen von a nach b* definiert durch

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \;:=\; I_+ - I_- \,.$$



Wir setzen noch $\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x := -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

> Auch auf die Frage, was denn ein Flächeninhalt ist, hat die Mathematik Antworten gefunden, etwa durch das sogenannte Riemann-Integral.

Definition. Ist $g : D \longrightarrow \mathbf{R}$ *stückweise stetig auf* $[a, b]$, d.h. gibt es

$$a \;=\; c_0 \;<\; c_1 \;<\; \cdots \;<\; c_{k-1} \;<\; c_k = b$$

und $g_i : [c_i\,,\, c_{i+1}] \longrightarrow \mathbf{R}$ stetig mit $g_i|_{(c_i\,,\,c_{i+1})} = g|_{(c_i\,,\,c_{i+1})}$ für $0 \leqslant i \leqslant k-1$, dann setzen wir

$$\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \;:=\; \sum_{i=0}^{k-1} \int_{c_i}^{c_{i+1}} g_i(x)\,\mathrm{d}x\ .$$

Anschaulich gesprochen ist g stückweise stetig auf $[a, b]$, wenn sein Graph zwischen a und b nur endlich viele Sprungstellen aufweist.

6.2 Eigenschaften

Sei $D \subseteq \mathbf{R}$.

Bemerkung.

(1) Seien $a,\, b,\, c \,\in\, \mathbf{R}$ mit $a \leqslant b \leqslant c$ und $[a, c] \subseteq D$. Sei $f : D \longrightarrow \mathbf{R}$, $x \longmapsto f(x)$ eine auf $[a, c]$ stückweise stetige Abbildung. Dann ist

$$\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x \;=\; 0$$

und

$$\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x \;=\; \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x\ .$$

(2) Seien $a,\, b \,\in\, \mathbf{R}$ mit $a \leqslant b$ und $[a, b] \subseteq D$. Seien $f,\, g \,:\, D \longrightarrow \mathbf{R}$ auf $[a, b]$ stückweise stetig. Seien $\lambda,\, \mu \,\in\, \mathbf{R}$. Dann ist

$$\int_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x))\,\mathrm{d}x \;=\; \lambda \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \mu \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x\ .$$

(3) Seien $a,\, b \,\in\, \mathbf{R}$ mit $a \leqslant b$ und $[a, b] \subseteq D$. Sei $f : D \longrightarrow \mathbf{R}$ auf $[a, b]$ stückweise stetig.

Die Dreiecksungleichung aus §1.2 liefert $|I_+ + (-I_-)| \leqslant |I_+| + |-I_-| = I_+ + I_-$ und damit die erste Ungleichung in

$$\Big|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\Big| \;\leqslant\; \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x \;\leqslant\; (b-a)\max_{x\in[a,b]} |f(x)|\ .$$

Die zweite resultiert daher, daß die fragliche Fläche in ein Rechteck der Breite $b-a$ und der Höhe $\max\limits_{x\in[a,b]} |f(x)|$ eingeschlossen werden kann.

Definition. Sei $D \subseteq \mathbf{R}$ offen. Sei $f : D \longrightarrow \mathbf{R}$ stetig. Eine differenzierbare Funktion $F : D \longrightarrow \mathbf{R}$ heißt *Stammfunktion* oder *Aufleitung* von f, falls

$$F' = f \; .$$

Bemerkung. Sei $D \subseteq \mathbf{R}$ ein offenes Intervall. Sei $f : D \longrightarrow \mathbf{R}$ stetig.

Sind F und $\tilde{F}$ Stammfunktionen von f, dann gibt es ein $y_0 \in \mathbf{R}$ mit ist $F(x) - \tilde{F}(x) = y_0$ für alle $x \in D$.

In anderen Worten, die Aufleitung von f ist nur bis auf eine Konstante bestimmt.

Denn es ist $(F - \tilde{F})'(x) = F'(x) - \tilde{F}'(x) = f(x) - f(x) = 0$ für $x \in D$.

Satz (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung).

Seien $a,\, b \in \mathbf{R}$ mit $a \leqslant b$ und $[a,b] \subseteq D$.

(1) Sei $D \subseteq \mathbf{R}$ offen. Sei $F : D \longrightarrow \mathbf{R}$ differenzierbar. Sei $f := F'$ stetig. Dann ist

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \;=\; F(b) - F(a) \; .$$

(2) Sei $D \subseteq \mathbf{R}$ ein offenes Intervall. Sei $g : D \longrightarrow \mathbf{R}$ stetig. Dann ist die Funktion

$$G \;:\; D \longrightarrow \mathbf{R}\,,\;\; x \longmapsto G(x) \;:=\; \int_a^x g(u)\,\mathrm{d}u$$

differenzierbar, und es gilt $G' = g$.

Begründung.

Zu (2). Sei $x \in D$. Wir haben $\lim_{t\to 0} \frac{G(x+t)-G(x)}{t} \overset{!}{=} g(x)$ zu verifizieren.

Schreibe $E := \{\, \tilde{x} - x \,:\, \tilde{x} \in D \,\}$ für den um x nach links verschobenen Definitionsbereich D.

Wir haben zu zeigen, daß

$$\begin{array}{rcl} E & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ t & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{ll} (G(x+t) - G(x))t^{-1} & \text{für } t \in E \smallsetminus \{0\} \\ g(x) & \text{für } t = 0 \end{array} \right. \end{array}$$

stetig in $t = 0$ ist.

Für $t \in E \smallsetminus \{0\}$ ist

$$\begin{array}{rcl} (G(x+t) - G(x))t^{-1} - g(x) & = & \big((\int_a^{x+t} g(u)\,\mathrm{d}u) - (\int_a^x g(u)\,\mathrm{d}u)\big)t^{-1} - g(x) \\ & = & \big(\int_x^{x+t} g(u)\,\mathrm{d}u\big)t^{-1} - g(x) \\ & = & \big(\int_x^{x+t} g(u)\,\mathrm{d}u\big)t^{-1} - \big(\int_x^{x+t} \overbrace{g(x)}^{\text{konst.}}\,\mathrm{d}u\big)t^{-1} \\ & = & \big(\int_x^{x+t} (g(u) - g(x))\,\mathrm{d}u\big)t^{-1} \; . \end{array}$$

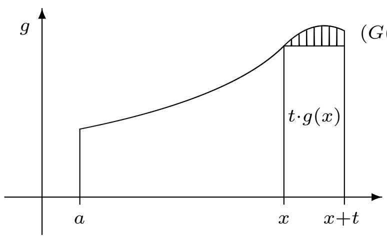
Der Betrag dieses Ausdrucks wird klein für kleines $|t|$, da $g(u)$ dann wegen $u \in (x-|t|, x+|t|)$ nahe bei $g(x)$ liegt. Dies wollen wir noch etwas formalisieren.

Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Da g stetig ist, gibt es ein $\delta > 0$ mit $(x-\delta, x+\delta) \subseteq D$ so, daß $|g(u) - g(x)| < \varepsilon$ ist für alle $u \in (x-\delta, x+\delta)$. Damit wird

$$\begin{array}{rcl} |(G(x+t) - G(x))t^{-1} - g(x)| & = & |\big(\int_x^{x+t}(g(u) - g(x))\,\mathrm{d}u\big)t^{-1}| \\ & \overset{\text{Bem. (3)}}{\leqslant} & \big(|t| \cdot \max_{u\in[x-|t|,\,x+|t|]} |g(u) - g(x)|\big)|t|^{-1} \\ & = & \max_{u\in[x-|t|,\,x+|t|]} |g(u) - g(x)| \\ & < & \varepsilon \end{array}$$

für $t \in (-\delta, +\delta)$.

Skizze im Fall $t > 0$. Wir erkennen darin, daß $\frac{G(x+t)-G(x)}{t} \approx \frac{t\cdot g(x)}{t} = g(x)$; der Fehler im Zähler bei der Näherung ist der kleine schraffierte Flächeninhalt.



$(G(x+t) - G(x)) - t \cdot g(x) = (\int_a^{x+t} g(u)\,\mathrm{d}u) - (\int_a^x g(u)\,\mathrm{d}u) - t \cdot g(x)$

Zu (1). Es ist $(\int_a^x f(u)\,\mathrm{d}u)' \overset{(2)}{=} f(x) = (F(x))'$, und also $\int_a^x f(u)\,\mathrm{d}u - F(x) = y_0$ für eine von x unabhängige Konstante $y_0 \in \mathbf{R}$.

Setzen wir $x = a$, so wird $y_0 = \int_a^a f(u)\,\mathrm{d}u - F(a) = -F(a)$.

Setzen wir nun $x = b$, so wird $\int_a^b f(u)\,\mathrm{d}u - F(b) = y_0 = -F(a)$, und also

$$\int_a^b f(u)\,\mathrm{d}u \;=\; F(b) - F(a)\;.$$

Man nimmt den Hauptsatz auch zum Anlaß, $\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + \text{konst.}$ zu schreiben, um auszudrücken, daß F eine Stammfunktion von f ist.

Ist F eine Stammfunktion von f, so schreibt man auch

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \;=\; [F(x)]_{x=a}^b \;:=\; F(b) - F(a)\;.$$

Beispiel.

(1) Für $\alpha \in \mathbf{R}\smallsetminus\{-1\}$ hat $f(x) = x^\alpha$ auf $\mathbf{R}_{>0}$ die Stammfunktion $F(x) = (\alpha+1)^{-1}x^{\alpha+1}$.

Z.B. ist $\int_1^7 \sqrt[4]{x}\,\mathrm{d}x = \int_1^7 x^{1/4}\,\mathrm{d}x = [x^{5/4}\cdot 4/5]_{x=1}^7 = (7^{5/4} - 1)\cdot 4/5 \approx 8{,}3088$.

Ist $\alpha \in \mathbf{Z}_{\geqslant 0}$, so gilt diese Stammfunktion uneingeschränkt auf $\mathbf{R}$.

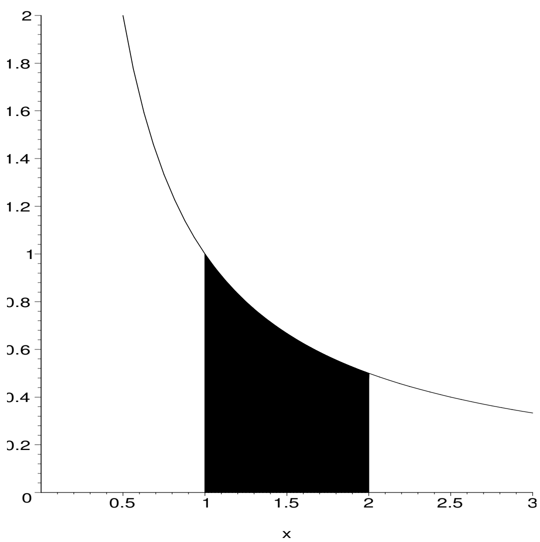
Z.B. ist $\int_{-1}^2 x^4\,\mathrm{d}x = [x^5/5]_{x=-1}^2 = 32/5 - (-1)/5 = 33/5 = 6{,}6$.

Ist $\alpha \in \mathbf{Z}_{\leqslant -2}$, so gilt diese Stammfunktion separat auf $\mathbf{R}_{>0}$ und auf $\mathbf{R}_{<0}$.

Z.B. ist $\int_{-5}^{-4} x^{-3}\,\mathrm{d}x = [x^{-2}/(-2)]_{x=-5}^{-4} = ((-4)^{-2} - (-5)^{-2})/(-2) = -9/800 \approx -0{,}01125$.

Sonderfall. Es hat $g(x) = x^{-1} = 1/x$ für $x > 0$ die Stammfunktion $G(x) = \ln(x)$.

Z.B. ist $\int_{1}^{2} x^{-1}\,\mathrm{d}x = [\ln(x)]_{x=1}^{2} = \ln(2) \approx 0{,}6931$.

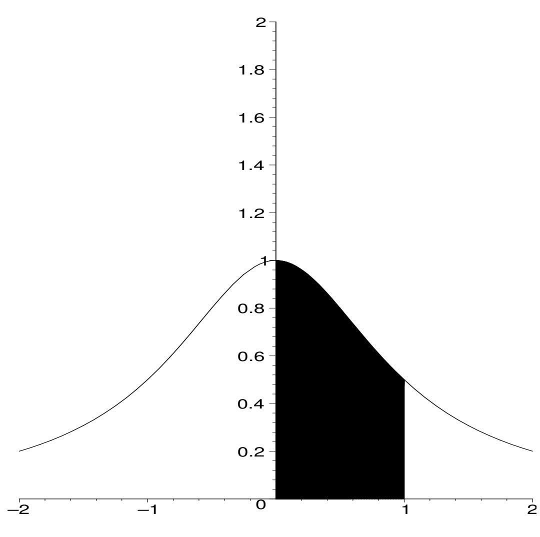


(2) Es ist e^x auf $\mathbf{R}$ eine Stammfunktion von e^x.

Z.B. ist $\int_{-1}^{0} \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = [\mathrm{e}^x]_{x=-1}^{0} = \mathrm{e}^0 - \mathrm{e}^{-1} = 1 - 1/\mathrm{e} \approx 0{,}6321$.

(3) Es ist $\arctan(x)$ auf $\mathbf{R}$ eine Stammfunktion von $(x^2+1)^{-1}$; vgl. Aufgabe 38.(2).

Z.B. ist $\int_{0}^{1} (x^2+1)^{-1}\,\mathrm{d}x = [\arctan(x)]_{x=0}^{1} = \pi/4 \approx 0{,}7854$.



(4) Es ist $\arcsin(x)$ auf $(-1,+1)$ eine Stammfunktion von $(1-x^2)^{-1/2}$; vgl. §3.2.4.1.

Z.B. ist $\int_{-1/2}^{1/2} (1-x^2)^{-1/2}\,\mathrm{d}x = [\arcsin(x)]_{x=-1/2}^{1/2} = \pi/6 - (-\pi/6) = \pi/3 \approx 1{,}0472$.

6.3 Techniken

6.3.1 Substitution

Sei $E \subseteq \mathbf{R}$ offen. Sei $f : E \longrightarrow \mathbf{R}$ stetig.

Sei $D \subseteq \mathbf{R}$ offen. Seien $a,\ b \in \mathbf{R}$ mit $a \leqslant b$ und $[a,b] \subseteq D$. Sei $g : D \longrightarrow \mathbf{R}$ differenzierbar, mit g' stetig. Sei $g([a,b]) \subseteq E$.

Lemma (Substitutionsregel). Es ist

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,\mathrm{d}u \;=\; \int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x)\,\mathrm{d}x\ .$$

Denn ist $F(u)$ eine Stammfunktion von $f(u)$, dann ist nach Kettenregel $(F(g(x)))' = F'(g(x))g'(x) = f(g(x))g'(x)$, mithin $F(g(x))$ eine Stammfunktion von $f(g(x))g'(x)$. Wir erhalten $\int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,\mathrm{d}u = F(g(b)) - F(g(a)) = \int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x)\,\mathrm{d}x$.

Beispiel.

(1) Wir wollen $\int_1^4 \frac{x^3}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$ berechnen. Wir setzen $g(x) := 1 + x^2$. Es ist $g'(x) = 2x$. Wir erhalten

$$\begin{aligned} \int_1^4 \tfrac{x^3}{1+x^2}\,\mathrm{d}x &= \tfrac{1}{2}\int_1^4 \tfrac{x^2}{1+x^2} \cdot 2x\,\mathrm{d}x \;=\; \tfrac{1}{2}\int_1^4 \tfrac{g(x)-1}{g(x)} \cdot g'(x)\,\mathrm{d}x \;=\; \tfrac{1}{2}\int_2^{17} \tfrac{u-1}{u}\,\mathrm{d}u \\ &= \tfrac{1}{2}\int_2^{17} (1-u^{-1})\,\mathrm{d}u \;=\; \tfrac{1}{2}[u - \ln(u)]_{u=2}^{17} \;=\; \tfrac{1}{2}(15 - \ln(\tfrac{17}{2})) \;\approx\; 6{,}4300\ . \end{aligned}$$

(2) Wir wollen $\int_0^v \tan(x)\,\mathrm{d}x$ berechnen für $v \in (-\pi/2, +\pi/2)$. Da $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$, setzen wir $g(x) := \cos(x)$. Es ist $g'(x) = -\sin(x)$. Wir erhalten

$$\begin{aligned} \int_0^v \tan(x)\,\mathrm{d}x &= -\int_0^v \tfrac{1}{\cos(x)} \cdot (-\sin(x))\,\mathrm{d}x \;=\; -\int_0^v \tfrac{1}{g(x)} \cdot g'(x)\,\mathrm{d}x \;=\; -\int_1^{\cos(v)} \tfrac{1}{u}\,\mathrm{d}u \\ &= \int_{\cos(v)}^1 \tfrac{1}{u}\,\mathrm{d}u \;=\; [\ln(u)]_{u=\cos(v)}^1 = -\ln(\cos(v))\ . \end{aligned}$$

(3) Seien $\lambda \in \mathbf{R} \smallsetminus \{0\}$ und $\mu \in \mathbf{R}$. Wir wollen $\int_a^b f(\lambda x + \mu)\,\mathrm{d}x$ berechnen unter Verwendung einer Stammfunktion F von f. Wir setzen $g(x) := \lambda x + \mu$. Es ist $g'(x) = \lambda$. Wir erhalten

$$\int_a^b f(\lambda x + \mu)\,\mathrm{d}x \;=\; \int_a^b f(g(x)) \cdot \lambda^{-1} \cdot g'(x)\,\mathrm{d}x \;=\; \int_{\lambda a+\mu}^{\lambda b+\mu} f(u) \cdot \lambda^{-1}\,\mathrm{d}u \;=\; \tfrac{1}{\lambda}(F(\lambda b + \mu) - F(\lambda a + \mu))\ .$$

6.3.2 Produktregel

Sei $D \subseteq \mathbf{R}$ offen. Seien $a,\ b \in \mathbf{R}$ mit $a \leqslant b$ und $[a,b] \subseteq D$. Sei $f : D \longrightarrow \mathbf{R}$ stetig. Sei F eine Stammfunktion von f. Sei $g : D \longrightarrow \mathbf{R}$ differenzierbar, mit g' stetig.

Lemma (Produktregel). Es ist

$$\int_a^b f(x) \cdot g(x)\,\mathrm{d}x \;=\; [F(x) \cdot g(x)]_{x=a}^b - \int_a^b F(x) \cdot g'(x)\,\mathrm{d}x \;.$$

Denn nach der Produktregel aus §3.2.1 ist $F(x)\,g(x)$ eine Stammfunktion von $f(x)\,g(x) + F(x)\,g'(x)$, woraus sich $\int_a^b (f(x)\,g(x) + F(x)\,g'(x))\,\mathrm{d}x = [F(x)\,g(x)]_{x=a}^b$ ergibt.

Diese Regel nennt man auch *partielle Integration*.

Beispiel.

(1) Es ist $\int_0^1 \mathrm{e}^x \cdot x\,\mathrm{d}x = [\mathrm{e}^x \cdot x]_{x=0}^1 - \int_0^1 \mathrm{e}^x \cdot 1\,\mathrm{d}x = \mathrm{e} - [\mathrm{e}^x]_{x=0}^1 = 1.$

(2) Für $v \in \mathbf{R}_{>0}$ ist

$$\textstyle\int_1^v \ln(x)\,\mathrm{d}x \;=\; \int_1^v 1 \cdot \ln(x)\,\mathrm{d}x \;=\; [x \cdot \ln(x)]_{x=1}^v - \int_1^v x \cdot x^{-1}\,\mathrm{d}x \;=\; v \cdot \ln(v) - v + 1 \;.$$

6.3.3 Partialbruchzerlegung (reell zerfallender Nenner)

Sei $m \geqslant 1$. Seien $s_i \in \mathbf{R}$ für $i \in [1, m]$ gegeben mit $s_i \neq s_j$ für $i,\, j \,\in\, [1, m]$ mit $i \neq j$.

Sei $D := \mathbf{R} \smallsetminus \{s_1\,,\,\dots\,,\,s_m\}$.

Seien $k_i \in \mathbf{Z}_{\geqslant 1}$ für $i \in [1, m]$.

Sei $f(x)$ ein Polynom, dessen Grad kleiner als $\sum_{i=1}^m k_i$ ist.

Wir wollen Konstanten $a_{i,j} \in \mathbf{R}$ so finden, daß

$$\frac{f(x)}{(x - s_1)^{k_1} \cdot (x - s_2)^{k_2} \cdots (x - s_m)^{k_m}} \;=\; \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{k_i} \frac{a_{i,j}}{(x - s_i)^j}$$

für alle $x \in D$.

Zur Bestimmung der $a_{i,j}$ multipliziere man beide Seiten mit $(x - s_1)^{k_1} \cdots (x - s_m)^{k_m}$ und vergleiche die Koeffizienten. Dies liefert ein lineares Gleichungssystem.

In der Praxis verwendet man üblicherweise Bezeichnungen A, B, C, $\dots$ statt der $a_{i,j}$.

Beispiel.

(1) Wir wollen $\int_2^3 \frac{x^4}{(x+1)(x-1)}\,\mathrm{d}x$ bestimmen.

Der Zähler hat nicht kleineren Grad als der Nenner. Also multiplizieren wir aus, $(x-1)(x+1) = x^2-1$, und führen eine Polynomdivision durch, welche $x^4 = (x^2-1)(x^2+1)+1$ liefert. Das gibt

$$\int_2^3 \frac{x^4}{(x+1)(x-1)}\,\mathrm{d}x \;=\; \int_2^3 (x^2+1)\,\mathrm{d}x + \int_2^3 \frac{1}{(x+1)(x-1)}\,\mathrm{d}x\;.$$

Davon ist $\int_2^3 (x^2+1)\,\mathrm{d}x = \frac{22}{3}$.

Nun suchen wir $A,\ B \in \mathbf{R}$ mit

$$\frac{1}{(x+1)(x-1)} \;\overset{!}{=}\; \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1}\;.$$

Durchmultiplizieren mit $(x-1)(x+1)$ liefert die Bedingung

$$1 \;\overset{!}{=}\; A(x-1) + B(x+1)\;.$$

Koeffizientenvergleich liefert also die Bedingung $\left(\begin{smallmatrix}-1 & 1\\ 1 & 1\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}A\\ B\end{smallmatrix}\right) \overset{!}{=} \left(\begin{smallmatrix}1\\ 0\end{smallmatrix}\right)$. Wir rechnen

$$\left(\begin{array}{cc|c}-1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c}1 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 1\end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|r}1 & 0 & -1/2\\ 0 & 1 & 1/2\end{array}\right).$$

Also ist $A = -1/2$ und $B = 1/2$. Damit wird

$$\begin{aligned}\int_2^3 \frac{1}{(x+1)(x-1)}\,\mathrm{d}x \;&=\; \int_2^3 \left(\frac{-1/2}{x+1} + \frac{1/2}{x-1}\right)\mathrm{d}x \;=\; -\frac{1}{2}\cdot[\ln(x+1)]_{x=2}^3 + \frac{1}{2}\cdot[\ln(x-1)]_{x=2}^3\\ &=\; -\frac{1}{2}\cdot(\ln(4)-\ln(3)) + \frac{1}{2}\cdot(\ln(2)-\ln(1)) \;=\; \frac{1}{2}\ln(3/2)\;.\end{aligned}$$

Insgesamt wird somit $\int_2^3 \frac{x^4}{(x+1)(x-1)}\,\mathrm{d}x = \frac{22}{3} + \frac{1}{2}\ln(3/2) \approx 7{,}5361$.

(2) Wir wollen $\int_2^3 \frac{x-1}{(x+1)^3\cdot x^2}\,\mathrm{d}x$ bestimmen. Dazu suchen wir $A,\ B,\ C,\ E,\ F \in \mathbf{R}$ mit

$$\frac{x-1}{(x+1)^3\,\cdot\,x^2} \;\overset{!}{=}\; \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{(x+1)^3} + \frac{E}{x} + \frac{F}{x^2}\;.$$

Durchmultipliziert liefert das die Bedingung

$$x-1 \;\overset{!}{=}\; A(x^4+2x^3+x^2)+B(x^3+x^2)+Cx^2+E(x^4+3x^3+3x^2+x)+F(x^3+3x^2+3x+1)\;.$$

Koeffizientenvergleich gibt folgendes lineare Gleichungssystem für $\begin{pmatrix}A\\ B\\ C\\ E\\ F\end{pmatrix} \in \mathbf{R}^{5\times 1}$, welches wir sogleich umformen.

$$\left(\begin{array}{ccccc|r}0&0&0&0&1&-1\\ 0&0&0&1&3&1\\ 1&1&1&3&3&0\\ 2&1&0&3&1&0\\ 1&0&0&1&0&0\end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccccc|r}1&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&1&-1\\ 0&0&0&1&3&1\\ 0&1&1&2&3&0\\ 0&1&0&1&1&0\end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccccc|r}1&0&0&1&0&0\\ 0&1&0&1&1&0\\ 0&0&0&0&1&-1\\ 0&0&0&1&3&1\\ 0&0&1&1&2&0\end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccccc|r}1&0&0&1&0&0\\ 0&1&0&1&1&0\\ 0&0&1&1&2&0\\ 0&0&0&0&1&-1\\ 0&0&0&1&3&1\end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccccc|r}1&0&0&0&-3&-1\\ 0&1&0&0&-2&-1\\ 0&0&1&0&-1&-1\\ 0&0&0&1&3&1\\ 0&0&0&0&1&-1\end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccccc|r}1&0&0&0&0&-4\\ 0&1&0&0&0&-3\\ 0&0&1&0&0&-2\\ 0&0&0&1&0&4\\ 0&0&0&0&1&-1\end{array}\right)$$

Also ist $A = -4$, $B = -3$, $C = -2$, $E = 4$ und $F = -1$, und wir erhalten

$$\begin{aligned}\int_2^3 \frac{x-1}{(x+1)^3\cdot x^2}\,\mathrm{d}x \;&=\; \int_2^3 \left(\frac{-4}{x+1} + \frac{-3}{(x+1)^2} + \frac{-2}{(x+1)^3} + \frac{4}{x} + \frac{-1}{x^2}\right)\mathrm{d}x\\ &=\; [-4\ln(x+1) + 3(x+1)^{-1} + (x+1)^{-2} + 4\ln(x) + x^{-1}]_{x=2}^3\\ &=\; 4\ln(9/8) - 67/144 \;\approx\; 0{,}005854\;.\end{aligned}$$

Man beachte noch, daß keine der Nullstellen s_i des Nenners im Intervall liegen sollte, über das integriert wird.

Die Partialbruchzerlegung mit nicht mehr reell zerfallendem Nenner wird später in §11.3 mittels komplexer Zahlen behandelt. Das Beispiel $\frac{1}{x^2+1}$ hierfür haben wir in §6.2 schon integriert.

6.4 Uneigentliche Integrale

Seien a, $b \in \mathbf{R}$ mit $a < b$ gegeben. Sei $f : (a, b] \longrightarrow \mathbf{R}$ stetig. Wir setzen

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \ := \ \lim_{u \to a} \int_u^b f(x)\,\mathrm{d}x \ ,$$

sofern die rechte Seite definiert ist. Diesenfalls sagt man auch, das vorliegende *uneigentliche Integral konvergiert.*

Sei $c \in \mathbf{R}$. Sei $g : [c, \infty) \longrightarrow \mathbf{R}$ stetig. Wir setzen

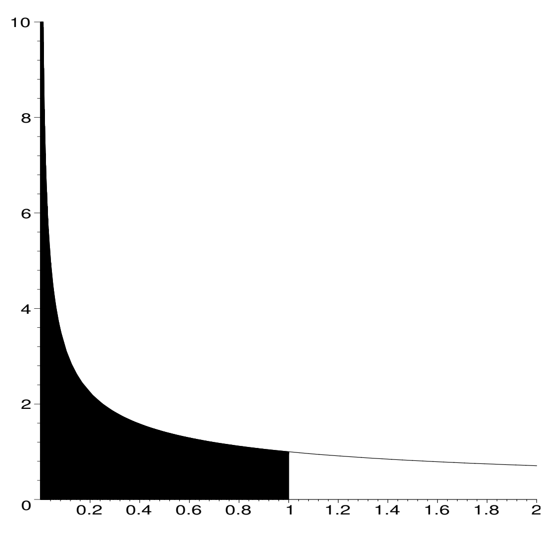
$$\int_a^\infty g(x)\,\mathrm{d}x \ := \ \lim_{v \to \infty} \int_a^v g(x)\,\mathrm{d}x \ ,$$

sofern die rechte Seite definiert ist. Diesenfalls sagt man auch, das vorliegende *uneigentliche Integral konvergiert.*

Die weiteren Fälle endlicher oder unendlicher undefinierter Integralgrenzen entsprechend – wann immer der Integrand an der Grenze selbst nicht definiert ist, ist ein Grenzwert zu bilden.

Beispiel.

(1) Es ist $\int_0^1 x^{-1/2}\,\mathrm{d}x = \lim_{u\to 0} \int_u^1 x^{-1/2}\,\mathrm{d}x = \lim_{u\to 0}[2x^{1/2}]_{x=u}^1 = \lim_{u\to 0}(2 - 2u^{1/2}) = 2.$

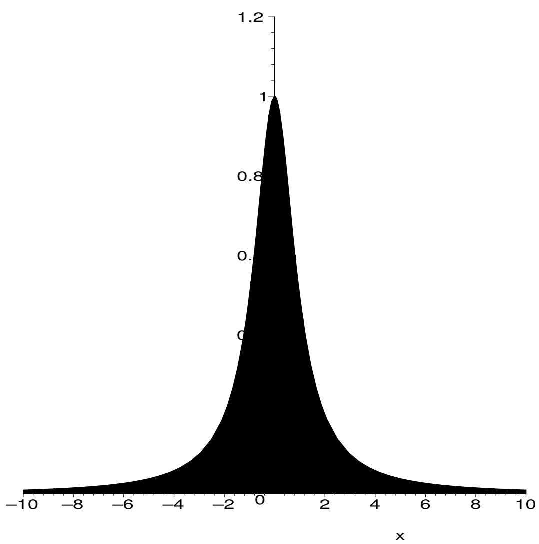


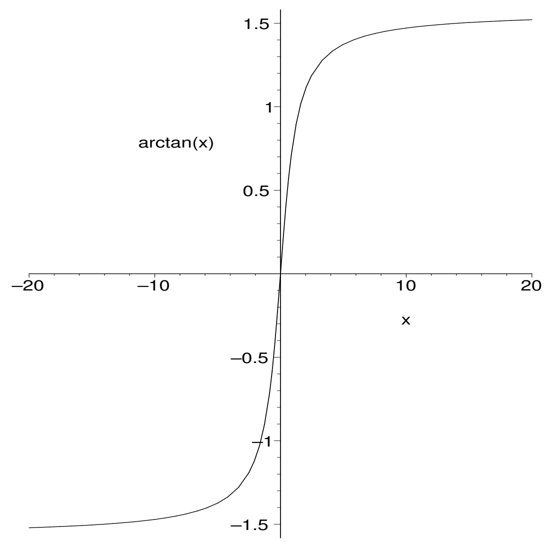
(2) Es ist $\int_1^\infty x^{-2}\,\mathrm{d}x = \lim_{v\to\infty}\int_1^v x^{-2}\,\mathrm{d}x = \lim_{v\to\infty}[-x^{-1}]_{x=1}^v = \lim_{v\to\infty}(-v^{-1}+1) = 1.$

(3) Es ist

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty (1+x^2)^{-1}\,\mathrm{d}x &= \lim_{v\to\infty}\int_0^v (1+x^2)^{-1}\,\mathrm{d}x \\
&= \lim_{v\to\infty}[\arctan(x)]_0^v \\
&= \lim_{v\to\infty}(\arctan(v)-\arctan(0)) \\
&= \pi/2 - 0 \\
&= \pi/2\,.
\end{aligned}$$

Genauso ist $\int_{-\infty}^0 (1+x^2)^{-1}\,\mathrm{d}x = \pi/2.$





Kapitel 7

Wachstumsrate und Elastizität

7.1 Wachstumsrate

Sei eine differenzierbare (Kapital-)Funktion

$$\begin{array}{rccc} K : & \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ & t & \longmapsto & K(t) \end{array}$$

gegeben, die das Kapital $K(t)$ abhängig von der Zeit t angibt. Sei hierbei $K(t) > 0$ stets.

Man denke etwa an festangelegtes Kapital.

Es ist auch möglich, einen kleineren Definitionsbereich zu wählen, etwa ein Zeitintervall.

Definition. Die *Wachstumsrate* von K zum Zeitpunkt $t \in \mathbf{R}$ ist gegeben durch

$$\mathrm{R}_K(t) \;:=\; \frac{K'(t)}{K(t)} \;=\; \big(\ln(K(t))\big)' \,.$$

Die zweite Gleichheit resultiert hierbei aus der Kettenregel.

Beispiel. Seien 250 Euro zu 5% Jahreszins angelegt. Sei die Zeiteinheit 1 Jahr gewählt. Es wird $K(t) = 250 \cdot 1{,}05^t = 250 \cdot \mathrm{e}^{t \cdot \ln(1{,}05)}$. Die Wachstumsrate ergibt sich zu

$$\mathrm{R}_K(t) \;=\; \frac{K'(t)}{K(t)} \;=\; \frac{250 \cdot \ln(1{,}05) \cdot \mathrm{e}^{t \cdot \ln(1{,}05)}}{250 \cdot \mathrm{e}^{t \cdot \ln(1{,}05)}} \;=\; \ln(1{,}05) \;\approx\; 0{,}04879 \,.$$

Die Wachstumsrate ist bei fester Verzinsung konstant, wofür wir eben ein Beispiel sahen.

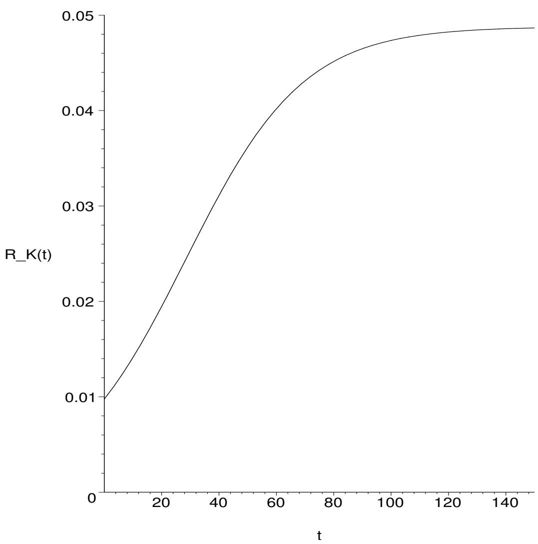
Allgemein mißt die Wachstumsrate den “momentan benötigten Faktor λ im Exponenten”, so man die gegebene Funktion $K(t)$ um einen gewählten Zeitpunkt mit einer Exponentialfunktion $a \cdot \mathrm{e}^{\lambda t}$ bestmöglich annähern will.

Beispiel. Seien 250 Euro zu 5% Jahreszins angelegt. Sei die Zeiteinheit 1 Jahr gewählt. Seien jährlich 10 Euro Kontoführungsgebühr fällig, die zwischen den vollen Jahren anteilig berechnet werde. Es wird

$$K(t) = 250 \cdot 1{,}05^t - \frac{1{,}05^t - 1}{1{,}05 - 1} \cdot 10 \;=\; 250 \cdot 1{,}05^t - (1{,}05^t - 1) \cdot 200 \;=\; 50 \cdot 1{,}05^t + 200\;;$$

vgl. §4.1. Also wird

$$\mathrm{R}_K(t) \;=\; \frac{K'(t)}{K(t)} \;=\; \frac{50 \cdot \ln(1{,}05) \cdot 1{,}05^t}{50 \cdot 1{,}05^t + 200} \;=\; \ln(1{,}05) \cdot \frac{1}{1 + 4 \cdot 1{,}05^{-t}}\;.$$



Erst als sich genügend Zinsen und Zinseszinsen angesammelt haben, schlagen die Kontogebühren nicht mehr so zu Buche, was die Wachstumsrate angeht, so daß sich letztere nach einiger Zeit wieder der Wachstumsrate 0,04879 bei bloßer Verzinsung annähert.

7.2 Elastizität

7.2.1 Definition Elastizität

Sei eine auf $\mathbf{R}_{>0}$ zweimal differenzierbare Funktion

$$\begin{array}{cccl} f & : & \mathbf{R}_{\geqslant 0} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ & & x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

gegeben, wobei $f(x) > 0$ stets.

Definition. Die *Elastizität* von f bei $x \in \mathbf{R}_{>0}$ ist gegeben durch

$$\mathrm{E}_f(x) \;:=\; \frac{f'(x)}{f(x)} \cdot x \;=\; (\ln(f(x)))' \cdot x\;.$$

Die zweite Gleichheit resultiert hierbei aus der Kettenregel.

Beispiel. Sei $x_0 > 0$. Sei $f(x) = (x + x_0)^\alpha$ für ein $\alpha \in \mathbf{R}_{<0}$. Dann wird

$$\mathrm{E}_f(x) \;=\; \frac{f'(x)}{f(x)} \cdot x \;=\; \frac{\alpha(x+x_0)^{\alpha-1}}{(x+x_0)^\alpha} \cdot x \;=\; \alpha \cdot \frac{x}{x+x_0}\;.$$

Bemerkung. Gehört zu x die Einheit A (z.B. Euro/kg), zu $f(x)$ die Einheit B (z.B. kg), so gehört zu $f'(x)$ die Einheit B/A, also zu $\mathrm{E}_f(x)$ die Einheit $\frac{B/A}{B} \cdot A = 1$. Die Elastizität ist also auch in der Anwendung eine bloße Zahl, ohne Einheit.

7.2.2 Gewinn maximieren, nachfrageorientiert

Sei $f(x)$ aus §7.2.1 nun die Nachfrage nach einem Produkt in Abhängigkeit vom Stückgewinn x (auch Gewinnmarge genannt), d.h. von der Differenz von Preis und Kosten pro Einheit.

Der Gesamtgewinn ergibt sich zu

$$G(x) \;:=\; f(x) \cdot x\;,$$

sofern die Nachfrage voll befriedigt wird, wovon wir ausgehen wollen.

Diese Variante findet also Anwendung, wenn das Angebot größer als die Nachfrage ist.

Üblicherweise sinkt die Nachfrage bei steigendem Stückgewinn.

Lemma. Sei $f(x) > 0$ für $x \in \mathbf{R}_{>0}$. Sei $f'(x) < 0$ für $x \in \mathbf{R}_{>0}$.

Sei ferner vorausgesetzt, daß $\mathrm{E}_{f'}(x) > -2$ oder $\mathrm{E}_f(x) < -1$ ist für $x \in \mathbf{R}_{>0}$.

Sei $x_0 \in \mathbf{R}_{>0}$. Ist $\mathrm{E}_f(x_0) = -1$, so nimmt der Gesamtgewinn beim Stückgewinn von x_0 ein Maximum $G(x_0) = f(x_0) \cdot x_0$ an, bei einer Nachfrage von $f(x_0)$ Einheiten.

Genauer, es ist $G(x_0) > G(x)$ für alle $x \in \mathbf{R}_{\geqslant 0} \smallsetminus \{x_0\}$.

Das Maximum ist also nicht nur lokal im Sinne von §3.2.3.1 zu verstehen.

Für alle $x \in \mathbf{R}_{>0}$ zu verlangen, daß $\mathrm{E}_{f'}(x) > -2$ oder $\mathrm{E}_f(x) < -1$ ist, ist äquivalent dazu, zu verlangen, daß für kein $x \in \mathbf{R}_{>0}$ sowohl $\mathrm{E}_{f'}(x) \leqslant -2$ als auch $\mathrm{E}_f(x) \geqslant -1$ ist. Es ist für die Anwendung des Lemmas also günstig, wenn E_f und $\mathrm{E}_{f'}$ stets nahe beieinanderliegen.

Begründung. Es ist $G'(x) = f'(x)x + f(x) = f(x)(\mathrm{E}_f(x) + 1)$. Aus $\mathrm{E}_f(x_0) = -1$ folgt also $G'(x_0) = 0$, so daß G bei x_0 eine Flachstelle hat.

Ferner ist $G''(x) = f''(x)x + 2f'(x) = f'(x)(\mathrm{E}_{f'}(x) + 2)$. Da stets $\mathrm{E}_{f'}(x) > -2$ oder $\mathrm{E}_f(x) < -1$, ist an jeder Stelle $G''(x) < 0$ oder $G'(x) < 0$. Somit ist $G'(x)$ streng monoton fallend, solange $G'(x) > 0$ und um x_0 . Sobald $G'(x)$ zum ersten Mal in den negativen Bereich läuft, kann es diesen nicht mehr verlassen, da es diesenfalls eine Stelle mit sowohl $G'(x) \geqslant 0$ als auch $G''(x) \geqslant 0$ gäbe. Also ist $G'(x) > 0$ für $x < x_0$ und $G'(x) < 0$ für $x > x_0$. Es folgt $G(x) < G(x_0)$ für $x < x_0$ und $G(x) < G(x_0)$ für $x > x_0$; vgl. §3.2.2.

Beispiel. Sei $f(x) = 100 \cdot 0{,}94^x$. Wir haben $f(x) > 0$ stets.

Ferner ist $f'(x) = 100 \cdot \ln(0{,}94) \cdot 0{,}94^x < 0$ stets, da $\ln(0{,}94) \approx -0{,}062$.

Die Elastizität von f ergibt sich zu

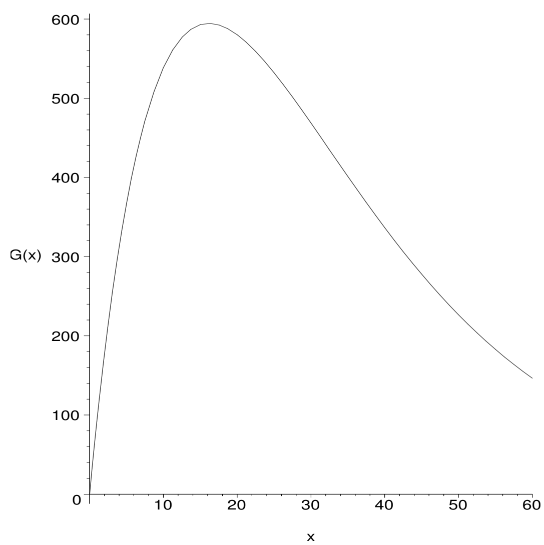
$$\mathrm{E}_f(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} \cdot x = \frac{100 \cdot \ln(0{,}94) \cdot 0{,}94^x}{100 \cdot 0{,}94^x} \cdot x = \ln(0{,}94) \cdot x \,.$$

Die Elastizität von f' ergibt sich zu

$$\mathrm{E}_{f'}(x) = \frac{f''(x)}{f'(x)} \cdot x = \frac{100 \cdot (\ln(0{,}94))^2 \cdot 0{,}94^x}{100 \cdot \ln(0{,}94) \cdot 0{,}94^x} \cdot x = \ln(0{,}94) \cdot x \,.$$

Da diese beiden Elastizitäten zufällig übereinstimmen, ist nie $\mathrm{E}_{f'}(x) \leqslant -2$ und $\mathrm{E}_f(x) \geqslant -1$, und also stets $\mathrm{E}_{f'}(x) > -2$ oder $\mathrm{E}_f(x) < -1$.

Aus der Bedingung $\mathrm{E}_f(x_0) = \ln(0{,}94) \cdot x_0 \stackrel{!}{=} -1$ erhalten wir $x_0 = -1/\ln(0{,}94) \approx 16{,}1615$. Der maximale Gesamtgewinn ist also bei einem Stückgewinn von 16,1615 erzielbar und beträgt $G(x_0) = 100 \cdot 0{,}94^{-1/\ln(0{,}94)} \cdot (-1/\ln(0{,}94)) \approx 594{,}55$, bei einer Nachfrage von $f(x_0) = 100 \cdot 0{,}94^{-1/\ln(0{,}94)} \approx 36{,}7879$.



7.2.3 Gewinn maximieren, angebotsorientiert

Sei $f(x)$ aus §7.2.1 nun der Stückgewinn eines Produkts in Abhängigkeit vom Angebot x. Der Gesamtgewinn ergibt sich zu

$$G(x) \;:=\; f(x) \cdot x \,,$$

sofern das Angebot voll abgesetzt werden kann, wovon wir ausgehen wollen.

Diese Variante findet also Anwendung, wenn die Nachfrage größer als das Angebot ist.

Üblicherweise sinkt der Stückgewinn bei steigendem Angebot.

Das Problem ist nun aus mathematischer Sicht dasselbe wie in §7.2.2, sodaß wir wieder folgendes erhalten.

Lemma. Sei $f(x) > 0$ für $x \in \mathbf{R}_{>0}$. Sei $f'(x) < 0$ für $x \in \mathbf{R}_{>0}$.

Sei ferner vorausgesetzt, daß $\mathrm{E}_{f'}(x) > -2$ oder $\mathrm{E}_f(x) < -1$ ist für $x \in \mathbf{R}_{>0}$.

Sei $x_0 \in \mathbf{R}_{>0}$. Ist $\mathrm{E}_f(x_0) = -1$, so nimmt der Gesamtgewinn beim Angebot von x_0 Einheiten ein Maximum $G(x_0) = f(x_0) \cdot x_0$ an, bei einem Stückgewinn von $f(x_0)$.

In anderen Worten, es ist $G(x_0) > G(x)$ für alle $x \in \mathbf{R}_{>0} \setminus \{x_0\}$.

Kapitel 8

Taylorentwicklung

8.1 Taylor in einer Variablen

Sei $D \subseteq \mathbf{R}$ eine offenes Intervall. Sei die Funktion $f : D \longrightarrow \mathbf{R}$ beliebig oft differenzierbar. Ihre k-te Ableitung werde auch mit $f^{(k)}(x)$ bezeichnet; also z.B. $f^{(2)}(x) = f''(x)$.

Satz (Taylor). Sei $x_0 \in D$. Sei $n \geqslant 0$. Für $x \in D$ ist

$$\begin{aligned} f(x) &= \overbrace{\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k\right)}^{\text{Taylorpolynom von Ordnung } n} + \overbrace{\frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n \,\mathrm{d}t}^{\text{Restglied}} \\ &= \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2!}f''(x_0)(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n}_{\text{Taylorpolynom von Ordnung } n} + \underbrace{\frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n \,\mathrm{d}t}_{\text{Restglied}} . \end{aligned}$$

Man spricht von der *Taylorentwicklung* von $f(x)$ um x_0 von Ordnung n.

Die Entwicklung ohne das Restglied heißt auch *Taylorpolynom* von $f(x)$ um x_0 von Ordnung n, vgl. oben.

Das Restglied ist für x nahe bei x_0 als klein im Vergleich zu den anderen Summanden zu denken.

Wenn für ein gegebenes $x \in D$ die Folge $\left(\frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n \,\mathrm{d}t\right)_{n \geqslant 0}$ der Restglieder gegen 0 konvergiert, dann ist

$$f(x) \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k .$$

Diesenfalls spricht man schlicht von der *Taylorentwicklung* von $f(x)$ um x_0.

Begründung für die Taylorentwicklung (mit Restglied). Die Produktregel der Integration aus §6.3.2, mehrfach angewandt, gibt

$$\begin{array}{rl} & f(x) \\ = & f(x_0) + \int_{x_0}^{x} f'(t)\cdot 1\,\mathrm{d}t \\ = & f(x_0) + [f'(t)(t-x)]_{t=x_0}^{x} - \int_{x_0}^{x} f''(t)\cdot(t-x)\,\mathrm{d}t \\ = & f(x_0) + f'(t)(x-x_0) - \int_{x_0}^{x} f''(t)\cdot(t-x)\,\mathrm{d}t \\ = & f(x_0) + f'(t)(x-x_0) - [f''(t)\cdot\frac{1}{2}(t-x)^2]_{t=x_0}^{x} + \int_{x_0}^{x} f'''(t)\cdot\frac{1}{2}(t-x)^2\,\mathrm{d}t \\ = & f(x_0) + f'(t)(x-x_0) + f''(x_0)\cdot\frac{1}{2}(x-x_0)^2 + \int_{x_0}^{x} f'''(t)\cdot\frac{1}{2}(t-x)^2\,\mathrm{d}t \\ = & f(x_0) + f'(t)(x-x_0) + f''(x_0)\cdot\frac{1}{2}(x-x_0)^2 + [f'''(t)\cdot\frac{1}{6}(t-x)^3]_{t=x_0}^{x} - \int_{x_0}^{x} f^{(4)}(t)\cdot\frac{1}{6}(t-x)^3\,\mathrm{d}t \\ = & f(x_0) + f'(t)(x-x_0) + f''(x_0)\cdot\frac{1}{2}(x-x_0)^2 + f'''(x_0)\cdot\frac{1}{6}(x-x_0)^3 - \int_{x_0}^{x} f^{(4)}(t)\cdot\frac{1}{6}(t-x)^3\,\mathrm{d}t \\ = & \ldots\,. \end{array}$$

Bemerkung. Manchmal verwendet man in der Situation des Satzes von Taylor für die Taylorentwicklung auch das alternative Restglied in

$$f(x) \;=\; \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k\right) + \overbrace{\frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x_0 + s(x-x_0))(x-x_0)^{n+1}}^{\text{alternatives Restglied}}\,,$$

mit einem $s \in [0,1]$, welches von x_0, f und x abhängt.

Beispiel.

(1) Sei $D = \mathbf{R}$. Sei $f(x) = (x+1)^3$. Wir wollen die Taylorentwicklung von $f(x)$ um $x_0 = 0$ in dritter Ordnung betrachten, also $n = 3$ setzen.

Es ist $f^{(4)}(x) = 0$, also verschwindet das Restglied.

Wir erhalten

$$\begin{array}{rcl} (x+1)^3 & = & f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2!} f''(x_0)(x-x_0)^2 + \frac{1}{3!} f'''(x_0)(x-x_0)^3 \\ & = & (0+1)^3 + 3(0+1)^2(x-0) + \frac{1}{2!}\,6(0+1)(x-0)^2 + \frac{1}{3!}\,6(x-0)^3 \\ & = & 1 + 3x + 3x^2 + x^3\,, \end{array}$$

wie man auch aus der binomischen Formel erkennt.

So kann man einsehen, daß der Satz von Taylor eine “auf beliebige Funktionen verallgemeinerte binomische Formel” ist.

(2) Sei $D = \mathbf{R}$. Sei $f(x) = \mathrm{e}^x$. Es ist $f^{(n)}(x) = \mathrm{e}^x$ für $n \geqslant 0$. Taylorentwicklung um $x_0 = 0$ in n-ter Ordnung gibt

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{e}^x & = & \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k\right) + \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\,\mathrm{d}t \\ & = & \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\,\mathrm{e}^0(x-0)^k\right) + \frac{1}{n!}\int_{0}^{x} \mathrm{e}^t(x-t)^n\,\mathrm{d}t \\ & = & \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\,x^k\right) + \frac{1}{n!}\int_{0}^{x} \mathrm{e}^t(x-t)^n\,\mathrm{d}t\,. \end{array}$$

Für das Restglied gilt, daß

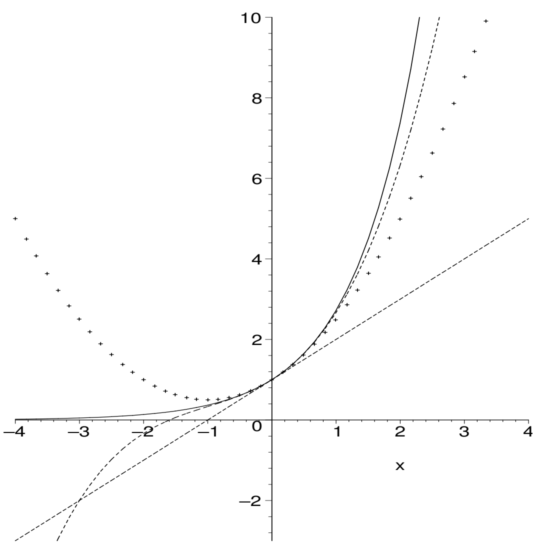
$$\left|\frac{1}{n!}\int_0^x \mathrm{e}^t(x-t)^n\,\mathrm{d}t\right| \;\overset{\S 6.2}{\leqslant}\; \frac{1}{n!}\,|x|\cdot\max_{t\in[-|x|,+|x|]}\,|\mathrm{e}^t(x-t)^n| \;\leqslant\; \frac{1}{n!}\,|x|\cdot\mathrm{e}^{|x|}|2x|^n\,,$$

wobei das Maximum über einen etwas größeren Bereich als nötig genommen wurde. Dies zeigt, daß das Restglied gegen 0 konvergiert für $n \to \infty$. Also ist

$$\mathrm{e}^x \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\, x^k$$

für $x \in \mathbf{R}$. Wir haben also die Definition von e^x zurückerhalten; vgl. §2.3.3.

Wir zeichnen zum Graph von e^x die Graphen der Taylorpolynome in erster, zweiter und dritter Ordnung ein, d.h. von $1+x$, von $1+x+\frac{1}{2}\,x^2$ und von $1+x+\frac{1}{2}\,x^2+\frac{1}{6}\,x^3$.



(3) Sei $D = \mathbf{R}$. Sei $f(x) = \sin(x)$. Sei $x_0 = 0$.

Es ist $f^{(2k)}(x) = (-1)^k \sin(x)$ und $f^{(2k+1)}(x) = (-1)^k \cos(x)$ für $k \geqslant 0$. Insbesondere ist $f^{(2k)}(x_0) = (-1)^k \sin(0) = 0$ und $f^{(2k+1)}(x_0) = (-1)^k \cos(0) = (-1)^k$. Bei Taylorentwicklung um $x_0 = 0$ in $(2n+1)$-ter Ordnung verbleibt also

$$\begin{aligned} \sin(x) &= \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(2k+1)!} f^{(2k+1)}(x_0)(x-x_0)^{2k+1}\right) + \frac{1}{(2n+1)!}\int_{x_0}^{x} f^{(2n+2)}(t)(x-t)^{2n+1}\,\mathrm{d}t \\ &= \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\, x^{2k+1}\right) + \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)!}\int_0^x \sin(t)(x-t)^{2n+1}\,\mathrm{d}t\;. \end{aligned}$$

Für das Restglied gilt, daß

$$\begin{aligned} & \left|\frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)!}\int_0^x \sin(t)(x-t)^{2n+1}\,\mathrm{d}t\right| \\ \overset{\S 6.2}{\leqslant}\; & \frac{1}{(2n+1)!}\,|x|\cdot \max_{t\in[-|x|,+|x|]} |\sin(t)(x-t)^{2n+1}| \\ \leqslant\; & \frac{1}{(2n+1)!}\,|x|\cdot|2x|^{2n+1}\;, \end{aligned}$$

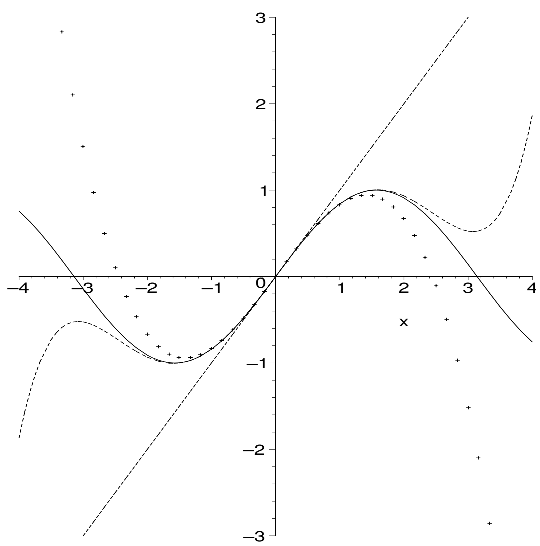
wobei das Maximum über einen etwas größeren Bereich als nötig genommen wurde. Dies zeigt, daß das Restglied gegen 0 konvergiert für $n \to \infty$. Also ist

$$\sin(x) \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\, x^{2k+1} \;=\; \frac{x^1}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \pm \cdots \;=\; x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040} \pm \cdots$$

für $x \in \mathbf{R}$.

Der rechten Seite ist die Periodizität $\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$ nicht mehr ohne weiteres anzusehen.

Wir zeichnen zum Graph von $\sin(x)$ die Graphen der Taylorpolynome in erster, dritter und fünfter Ordnung ein, d.h. von x, von $x - \frac{1}{6}\, x^3$ und von $x - \frac{1}{6}\, x^3 + \frac{1}{120}\, x^5$.



Die Taylorentwicklung des Cosinus in $x_0 = 0$ betrachten wir in Aufgabe 107.

8.2 Newtonverfahren

Sei $D \subseteq \mathbf{R}$ ein offenes Intervall. Sei $f : D \longrightarrow \mathbf{R}$ eine beliebig oft differenzierbare Funktion, insbesondere also stetige Funktion; vgl. §3.2.1.

Seien $a,\, b \in D$ mit $a < b$, $f(a) \leqslant 0$ und $f(b) \geqslant 0$. Sei $f'(x) > 0$ und $f''(x) > 0$ für $x \in [a, b]$.

Insbesondere ist $f([a, b])$ ein Intervall; vgl. §2.4.2. Wegen $f(a) < 0$ und $f(b) > 0$ folgt, daß $0 \in f([a, b])$, d.h. $f(x)$ hat eine Nullstelle in $[a, b]$. Da $f'(x) > 0$ für $x \in [a, b]$, ist f dort streng monoton wachsend; vgl. §3.2.2. Also hat $f(x)$ genau eine Nullstelle in $[a, b]$.

Wir wollen diese Nullstelle von $f(x)$ in $[a, b]$ rechnerisch annähern.

Setze $x_1 := b$. Wir nähern $f(x)$ durch seine Taylorpolynom in x_1 in erster Ordnung an, $f(x) \approx f(x_1) + f'(x_1)(x - x_1)$. Die Nullstelle x_2 dieser Geraden wollen wir als Näherung für die Nullstelle von $f(x)$ verwenden. Aus

$$f(x_1) + f'(x_1)(x_2 - x_1) \ \overset{!}{=}\ 0$$

erhalten wir

$$x_2 \ = \ x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}\ .$$

Wir setzen so fort und definieren schrittweise eine Folge $(x_n)_{n\geqslant 1}$ mit, wie gesagt, $x_1 := b$ und

$$x_{n+1} \;:=\; x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

für $n \geqslant 1$.

Lemma. Die so definierte Folge $(x_n)_{n\geqslant 1}$ konvergiert.

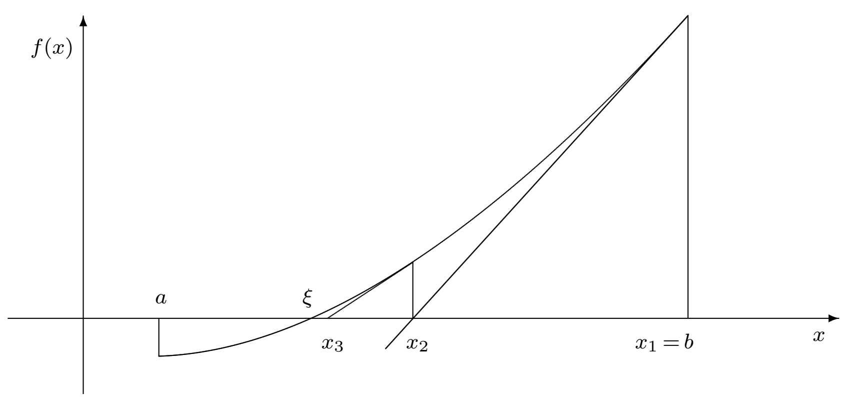
Setzen wir $\xi := \lim_{n\to\infty} x_n$, so ist $f(\xi) = 0$.

Die Konvergenz ist also unter den oben gemachten Voraussetzungen garantiert. Für die Konvergenzgeschwindigkeit hilft manchmal noch folgende a-priori-Abschätzung: für $n \geqslant 1$ ist

$$|x_n - \xi| \;\leqslant\; (b-a)^{2^{n-1}} \cdot \left(\tfrac{1}{2}\max_{x\in[a,b]} f''(x)\right)^{2^{n-1}-1}$$

Um diese Abschätzung verwenden zu können, sollte man $b - a$ hinreichend klein wählen.

Folgendes Schaubild zeigt die ersten beiden Schritte des Verfahrens.



Es gibt noch Varianten für monoton fallende Funktionen etc.

Beispiel. Wir wollen $\sqrt{2}$ näherungsweise bestimmen. Sei $D = \mathbf{R}_{>0}$. Sei $f(x) = x^2 - 2$.

Damit die garantierte Konvergenzgeschwindigkeit greift, sollte man a bereits nahe an b wählen, d.h. die Nullstelle schon vor dem ersten Schritt etwas eingrenzen. Sei also $a = 1{,}4$ und $b = 1{,}5$.

Es ist $f(a) = -0{,}04 \leqslant 0$ und $f(b) = 0{,}25 \geqslant 0$.

Es ist $f'(x) = 2x$ und $f''(x) = 2$. Beide sind positiv für $x \in [a,b] = [1{,}4, 1{,}5]$.

Es soll nun also die Nullstelle $\xi = \sqrt{2}$ angenähert werden.

Wir erhalten

$$\begin{array}{lclcl} x_1 & = & & & 1{,}5 \\ x_2 & = & x_1 - f(x_1)/f'(x_1) & = & 1{,}41\overline{6} \\ x_3 & = & x_2 - f(x_2)/f'(x_2) & \approx & 1{,}4142156862745 \\ x_4 & = & x_3 - f(x_3)/f'(x_3) & \approx & 1{,}4142135623747 \end{array}$$

Es ist $\frac{1}{2} \max_{x\in[a,b]} |f''(x)| = 1$. Also ist uns garantiert, daß

$$\begin{array}{rcccl} |x_1 - \sqrt{2}| & \leqslant & (b-a)^{2^{1-1}} \cdot 1^{2^{1-1}-1} & = & 10^{-1} \\ |x_2 - \sqrt{2}| & \leqslant & (b-a)^{2^{2-1}} \cdot 1^{2^{2-1}-1} & = & 10^{-2} \\ |x_3 - \sqrt{2}| & \leqslant & (b-a)^{2^{3-1}} \cdot 1^{2^{3-1}-1} & = & 10^{-4} \\ |x_4 - \sqrt{2}| & \leqslant & (b-a)^{2^{4-1}} \cdot 1^{2^{4-1}-1} & = & 10^{-8} \end{array}$$

Tatsächlich ist, wie man mit dem bekannten Wert von $\sqrt{2}$ im nachhinein feststellt,

$$\begin{array}{rcccl} |x_1 - \sqrt{2}| & \approx & 8{,}579 \cdot 10^{-2} & \leqslant & 10^{-1} \\ |x_2 - \sqrt{2}| & \approx & 2{,}453 \cdot 10^{-3} & \leqslant & 10^{-2} \\ |x_3 - \sqrt{2}| & \approx & 2{,}124 \cdot 10^{-6} & \leqslant & 10^{-4} \\ |x_4 - \sqrt{2}| & \approx & 1{,}595 \cdot 10^{-12} & \leqslant & 10^{-8} \end{array}$$

8.3 Der Gradient und die Hessematrix

Sei $m \geqslant 1$.

Wir erinnern an die abkürzende Schreibweise $\underline{x} := (x_1, \ldots, x_m) \in \mathbf{R}^m$; vgl. §2.4.1.

Sei $D \subseteq \mathbf{R}^m$ eine offene Teilmenge. Sei $f : D \longrightarrow \mathbf{R}$, $\underline{x} \longmapsto f(\underline{x})$ eine beliebig oft partiell differenzierbare Funktion; vgl. §3.3.1.

8.3.1 Der Gradient

Definition. Der *Gradient* von f in $\underline{x} \in D$ ist gegeben durch

$$\nabla_f(\underline{x}) := \begin{pmatrix} f_{x_1}(\underline{x}) \\ f_{x_2}(\underline{x}) \\ \vdots \\ f_{x_m}(\underline{x}) \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^{m\times 1} .$$

Der Buchstabe ∇ spricht sich "nabla".

Vgl. Beispiel in §5.2.2.

Beispiel. Sei $m = 3$. Sei $D = \mathbf{R}^3$. Sei $f(\underline{x}) = f(x_1, x_2, x_3) = x_1^3 + x_1x_2^2 + x_1x_2x_3$. Es ist

$$\nabla_f(\underline{x}) = \nabla_f(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} f_{x_1}(\underline{x}) \\ f_{x_2}(\underline{x}) \\ f_{x_3}(\underline{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_1^2+x_2^2+x_2x_3 \\ 2x_1x_2+x_1x_3 \\ x_1x_2 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^{3\times 1} .$$

Beispiel. Ist $m = 2$, und verwenden wir die Variablenbezeichnungen x und y anstelle von x_1 und x_2 , so ist $\nabla_f(x,y) = \begin{pmatrix} f_x(x,y) \\ f_y(x,y) \end{pmatrix} \overset{\text{kurz}}{=} \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix}$.

8.3.2 Die Hessematrix

Definition. Die *Hessematrix* von f in $\underline{x} \in D$ ist gegeben durch

$$\mathrm{H}_f(\underline{x}) \ := \ \begin{pmatrix} f_{x_1x_1}(\underline{x}) & f_{x_1x_2}(\underline{x}) & \cdots & f_{x_1x_m}(\underline{x}) \\ f_{x_2x_1}(\underline{x}) & f_{x_2x_2}(\underline{x}) & \cdots & f_{x_2x_m}(\underline{x}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{x_mx_1}(\underline{x}) & f_{x_mx_2}(\underline{x}) & \cdots & f_{x_mx_m}(\underline{x}) \end{pmatrix} \ \in \ \mathbf{R}^{m\times m} \ .$$

Nach dem Lemma von Schwarz ist $\mathrm{H}_f(\underline{x}) = \mathrm{H}_f(\underline{x})^{\mathrm{t}}$; vgl. §3.3.1, §5.1. Man sagt auch, die Hessematrix ist *symmetrisch.*

Beispiel. Sei $m = 3$. Sei $D = \mathbf{R}^3$. Sei wieder $f(\underline{x}) = f(x_1\,, x_2\,, x_3) = x_1^3 + x_1x_2^2 + x_1x_2x_3\,$. Es ist

$$\mathrm{H}_f(\underline{x}) \ = \ \mathrm{H}_f(x_1\,,x_2\,,x_3) \ = \ \begin{pmatrix} f_{x_1x_1}(\underline{x}) & f_{x_1x_2}(\underline{x}) & f_{x_1x_3}(\underline{x}) \\ f_{x_2x_1}(\underline{x}) & f_{x_2x_2}(\underline{x}) & f_{x_2x_3}(\underline{x}) \\ f_{x_3x_1}(\underline{x}) & f_{x_3x_2}(\underline{x}) & f_{x_3x_3}(\underline{x}) \end{pmatrix} \ = \ \begin{pmatrix} 6x_1 & 2x_2+x_3 & x_2 \\ 2x_2+x_3 & 2x_1 & x_1 \\ x_2 & x_1 & 0 \end{pmatrix} \ .$$

Wir sehen, daß in der Tat $\mathrm{H}_f(\underline{x}) = \mathrm{H}_f(\underline{x})^{\mathrm{t}}$ ist.

Beispiel. Ist $m = 2$, und verwenden wir die Variablenbezeichnungen x und y anstelle von x_1 und x_2 , so ist $\mathrm{H}_f(x,y) = \begin{pmatrix} f_{xx}(x,y) & f_{xy}(x,y) \\ f_{yx}(x,y) & f_{yy}(x,y) \end{pmatrix} \overset{\text{kurz}}{=} \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}$.

8.4 Taylor in mehreren Variablen (in erster und zweiter Ordnung)

Sei $D \subseteq \mathbf{R}^m$ eine offene Teilmenge. Sei $\underline{\hat{x}} \in D$.

Sei $f : D \longrightarrow \mathbf{R}$, $\underline{x} \longmapsto f(\underline{x})$ eine beliebig oft partiell differenzierbare Funktion.

Für $\underline{x} \in \mathbf{R}^m$ schreiben wir

$$[\underline{\hat{x}}, \underline{x}] \ := \ \{\, \underline{\hat{x}} + s(\underline{x} - \underline{\hat{x}}) \ : \ s \in [0,1] \,\} \ \subseteq \ \mathbf{R}^m$$

für die *Strecke* von $\underline{\hat{x}}$ nach $\underline{x}$.

Wir betrachten nur die Taylorentwicklungen um $\underline{\hat{x}}$ in erster und zweiter Ordnung.

Lemma (Taylorentwicklung in erster Ordnung). Für $\underline{x} \in D$ mit $[\underline{\hat{x}}, \underline{x}] \subseteq D$ ist

$$f(\underline{x}) = \overbrace{f(\underline{\hat{x}}) + (\underline{x} - \underline{\hat{x}}) \cdot \nabla_f(\underline{\hat{x}})}^{\text{Taylorpolynom}} + \overbrace{\tfrac{1}{2}(\underline{x} - \underline{\hat{x}}) \cdot \mathrm{H}_f(\underline{\hat{x}} + s(\underline{x} - \underline{\hat{x}})) \cdot (\underline{x} - \underline{\hat{x}})^{\mathrm{t}}}^{\text{Restglied}}$$

mit einem $s \in [0,1]$, welches von $\underline{\hat{x}}$, f und $\underline{x}$ abhängt. Das Restglied ist für $\underline{x}$ nahe bei $\underline{\hat{x}}$

als klein im Vergleich zu den anderen Summanden zu denken.

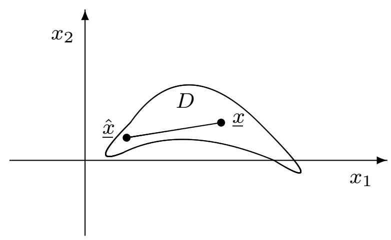
Lemma (Taylorentwicklung in zweiter Ordnung). Für $\underline{x} \in D$ mit $[\underline{\hat{x}}, \underline{x}] \subseteq D$ ist

$$\begin{aligned} f(\underline{x}) \;&=\; \overbrace{f(\underline{\hat{x}}) + (\underline{x} - \underline{\hat{x}}) \cdot \nabla_f(\underline{\hat{x}}) + \tfrac{1}{2}(\underline{x} - \underline{\hat{x}}) \cdot \mathrm{H}_f(\underline{\hat{x}}) \cdot (\underline{x} - \underline{\hat{x}})^{\mathrm{t}}}^{\text{Taylorpolynom}} \\ &\quad + \underbrace{\tfrac{1}{6} \textstyle\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m f_{x_i x_j x_k}(\underline{\hat{x}} + s(\underline{x} - \underline{\hat{x}}))(x_i - \hat{x}_i)(x_j - \hat{x}_j)(x_k - \hat{x}_k)}_{\text{Restglied}} \end{aligned}$$

mit einem $s \in [0, 1]$, welches von $\underline{\hat{x}}$, f und $\underline{x}$ abhängt. Das Restglied ist für $\underline{x}$ nahe bei $\underline{\hat{x}}$ als klein im Vergleich zu den anderen Summanden zu denken.

> Im Falle $m = 1$ spezialisiert dies zur Taylorentwicklung erster bzw. zweiter Ordnung aus §8.1 mit dem alternativen Restglied.

Skizze zur Bedingung $[\underline{\hat{x}}, \underline{x}] \subseteq D$. Der Rand gehöre dabei nicht zu D.



Beispiel. Sei $m = 2$. Wir verwenden wir die Variablenbezeichnungen x und y anstelle von x_1 und x_2 , und x_0 und y_0 anstelle von $\hat{x}_1$ und $\hat{x}_2$.

Ferner kürzen wir $\xi_0 := x_0 + s(x - x_0)$ und $\eta_0 := y_0 + s(y - y_0)$ ab, für ein jeweils geeignetes $s \in [0, 1]$.

Als Taylorentwicklung erster Ordnung um $(x_0\,, y_0)$ erhalten wir so

$$\begin{aligned} f(x, y) \;&=\; \overbrace{f(x_0\,, y_0) + \begin{pmatrix} x - x_0 & y - y_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_x(x_0,y_0) \\ f_y(x_0,y_0) \end{pmatrix}}^{\text{Taylorpolynom}} + \overbrace{\tfrac{1}{2} \begin{pmatrix} x - x_0 & y - y_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{xx}(\xi_0,\eta_0) & f_{xy}(\xi_0,\eta_0) \\ f_{yx}(\xi_0,\eta_0) & f_{yy}(\xi_0,\eta_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}}^{\text{Restglied}} \\ &=\; \overbrace{f(x_0\,, y_0) + (x - x_0) f_x(x_0\,, y_0) + (y - y_0) f_y(x_0\,, y_0)}^{\text{Taylorpolynom}} \\ &\quad + \underbrace{\tfrac{1}{2}(x - x_0)^2 f_{xx}(\xi_0\,, \eta_0) + (x - x_0)(y - y_0) f_{xy}(\xi_0\,, \eta_0) + \tfrac{1}{2}(y - y_0)^2 f_{yy}(\xi_0\,, \eta_0)}_{\text{Restglied}} \;. \end{aligned}$$

Als Taylorentwicklung zweiter Ordnung um $(x_0\,, y_0)$ erhalten wir

$$\begin{aligned} & f(x, y) \\ =\; & \left.\begin{array}{l} f(x_0\,, y_0) + (x - x_0) f_x(x_0\,, y_0) + (y - y_0) f_y(x_0\,, y_0) \\ + \frac{1}{2}(x - x_0)^2 f_{xx}(x_0\,, y_0) + (x - x_0)(y - y_0) f_{xy}(x_0\,, y_0) + \frac{1}{2}(y - y_0)^2 f_{yy}(x_0\,, y_0) \end{array}\right\} \text{Taylorpolynom} \\ & \left.\begin{array}{l} + \frac{1}{6}(x - x_0)^3 f_{xxx}(\xi_0\,, \eta_0) + \frac{1}{2}(x - x_0)^2 (y - y_0) f_{xxy}(\xi_0\,, \eta_0) \\ + \frac{1}{2}(x - x_0)(y - y_0)^2 f_{xyy}(\xi_0\,, \eta_0) + \frac{1}{6}(y - y_0)^3 f_{yyy}(\xi_0\,, \eta_0) \;. \end{array}\right\} \text{Restglied} \end{aligned}$$

Beispiel. Sei $D = \mathbf{R}^2$. Sei $f(x,y) = \mathrm{e}^{x+2y}$.

Wir wollen Taylorentwicklungen um $(x_0\,,y_0) := (0,0)$ berechnen.

Es wird $f_x(x,y) = \mathrm{e}^{x+2y}$, $f_y(x,y) = 2\mathrm{e}^{x+2y}$, $f_{xx}(x,y) = \mathrm{e}^{x+2y}$, $f_{xy}(x,y) = 2\mathrm{e}^{x+2y}$ und $f_{yy}(x,y) = 4\mathrm{e}^{x+2y}$. Für das Restglied der Entwicklung in zweiter Ordnung brauchen wir noch $f_{xxx}(x,y) = \mathrm{e}^{x+2y}$, $f_{xxy}(x,y) = 2\mathrm{e}^{x+2y}$, $f_{xyy}(x,y) = 4\mathrm{e}^{x+2y}$ und $f_{yyy}(x,y) = 8\mathrm{e}^{x+2y}$.

Als Taylorentwicklung erster Ordnung um $(0,0)$ erhalten wir mit $s \in [0,1]$ geeignet und $\xi_0 := sx$ und $\eta_0 := sy$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{e}^{x+2y} &= \underbrace{f(0,0) + xf_x(0,0) + yf_y(0,0)}_{\text{Taylorpolynom}} + \underbrace{\tfrac{1}{2}x^2 f_{xx}(\xi_0,\eta_0) + xyf_{xy}(\xi_0,\eta_0) + \tfrac{1}{2}y^2 f_{yy}(\xi_0,\eta_0)}_{\text{Restglied}} \\
&= \underbrace{1 + x + 2y}_{\text{Taylorpolynom}} + \underbrace{(\tfrac{1}{2}x^2 + 2xy + 2y^2)\cdot \mathrm{e}^{s(x+2y)}}_{\text{Restglied}} \; .
\end{aligned}
$$

Als Taylorentwicklung zweiter Ordnung um $(0,0)$ erhalten wir mit $s \in [0,1]$ geeignet und $\xi_0 := sx$ und $\eta_0 := sy$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{e}^{x+2y} &= \left.\begin{array}{l} f(0,0) + xf_x(0,0) + yf_y(0,0) \\ +\frac{1}{2}x^2 f_{xx}(0,0) + xyf_{xy}(0,0) + \frac{1}{2}y^2 f_{yy}(0,0) \end{array}\right\}\text{Taylorpolynom} \\
&\quad + \underbrace{\tfrac{1}{6}x^3 f_{xxx}(\xi_0\,,\eta_0) + \tfrac{1}{2}x^2y f_{xxy}(\xi_0\,,\eta_0) + \tfrac{1}{2}xy^2 f_{xyy}(\xi_0\,,\eta_0) + \tfrac{1}{6}y^3 f_{yyy}(\xi_0\,,\eta_0)}_{\text{Restglied}} \\
&= \underbrace{1 + x + 2y + \tfrac{1}{2}x^2 + 2xy + 2y^2}_{\text{Taylorpolynom}} + \underbrace{(\tfrac{1}{6}\,x^3 + x^2y + 2xy^2 + \tfrac{4}{3}\,y^3)\cdot \mathrm{e}^{s(x+2y)}}_{\text{Restglied}} \; .
\end{aligned}
$$

Insbesondere ist also $\mathrm{e}^{x+2y} \approx 1 + x + 2y + \frac{1}{2}x^2 + 2xy + 2y^2$ in der Nähe von $(x,y) = (0,0)$.

Man vergleiche auch mit $\mathrm{e}^{x+2y} = 1 + (x+2y) + \frac{1}{2!}\,(x+2y)^2 + \frac{1}{3!}\,(x+2y)^3 + \cdots$.

Kapitel 9

Mehr über Matrizen

9.1 Determinanten

Algorithmus (und Definition). Sei $n \geqslant 1$.

Sei $A \in \mathbf{R}^{n\times n}$ eine Matrix von quadratischer Gestalt.

Wir wollen die *Determinante* von A, geschrieben $\det A$, definieren und berechnen.

Hierzu bringen die Matrix A auf Zeilenstufenform; vgl. §5.3. Wird dabei bei einem Säuberungsschritt eine Zeile durch einen Faktor dividiert, um in der operierenden Zeile an vorderer Stelle eine 1 zu bekommen, so notieren wir uns diesen Faktor. Beim Hinauf- oder Hinuntertauschen einer Zeile um k Zeilen notieren wir uns den Faktor $(-1)^k$.

Falls die Zeilenstufenform von A gleich E_n ist, so ist $\det A$ das Produkt dieser notierten Faktoren.

Falls die Zeilenstufenform eine Nullzeile enthält, so ist $\det A = 0$.

Beachte, daß beim ersten Auftreten einer Nullzeile während der Umformung die Rechnung mit dem Ergebnis $\det A = 0$ abgebrochen werden kann, da im weiteren Verlauf diese Nullzeile erhalten bliebe.

Beispiel. Sei $A = \begin{pmatrix} 2&2&2&3\\ 3&2&2&2\\ 2&3&2&2\\ 2&2&3&2 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^{4\times 4}$. Wir formen um. Auf die Pfeile schreiben wir uns jeweils die zu notierenden Faktoren.

$$\begin{pmatrix} 2&2&2&3\\ 3&2&2&2\\ 2&3&2&2\\ 2&2&3&2 \end{pmatrix} \overset{2}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1&1&1&3/2\\ 3&2&2&2\\ 2&3&2&2\\ 2&2&3&2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1&1&1&3/2\\ 0&-1&-1&-5/2\\ 0&1&0&-1\\ 0&0&1&-1 \end{pmatrix} \overset{(-1)^1}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1&1&1&3/2\\ 0&1&0&-1\\ 0&-1&-1&-5/2\\ 0&0&1&-1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1&0&1&5/2\\ 0&1&0&-1\\ 0&0&-1&-7/2\\ 0&0&1&-1 \end{pmatrix}$$

$$\overset{(-1)}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1&0&1&5/2\\ 0&1&0&-1\\ 0&0&1&7/2\\ 0&0&1&-1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1&0&0&-1\\ 0&1&0&-1\\ 0&0&1&7/2\\ 0&0&0&-9/2 \end{pmatrix} \overset{(-9/2)}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1&0&0&-1\\ 0&1&0&-1\\ 0&0&1&7/2\\ 0&0&0&1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1&0&0&0\\ 0&1&0&0\\ 0&0&1&0\\ 0&0&0&1 \end{pmatrix} = \mathrm{E}_4 .$$

Also ist $\det A = \det\begin{pmatrix} 2&2&2&3\\ 3&2&2&2\\ 2&3&2&2\\ 2&2&3&2 \end{pmatrix} = 2 \cdot (-1)^1 \cdot (-1) \cdot (-9/2) = -9.$

Beispiel. Sei $A = \left(\begin{smallmatrix} 3 & -1 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & -2 & 0 & 3 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 4 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 3 & 1 & 3 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbf{R}^{5\times 5}$. Wir formen um. Auf die Pfeile schreiben wir uns jeweils die zu notierenden Faktoren.

$$
\left(\begin{smallmatrix} 3 & -1 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & -2 & 0 & 3 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 4 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 3 & 1 & 3 \end{smallmatrix}\right)
\overset{(-1)^1\cdot 2}{\rightsquigarrow}
\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 3/2 \\ 3 & -1 & 2 & 3 & 3 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 4 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 3 & 1 & 3 \end{smallmatrix}\right)
\rightsquigarrow
\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 3/2 \\ 0 & -4 & 5 & 3 & -3/2 \\ 0 & -1 & 6 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)
\overset{(-1)^2\cdot 3}{\rightsquigarrow}
\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 3/2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 5 & 3 & -3/2 \\ 0 & -1 & 6 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 5 & 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)
$$

$$
\rightsquigarrow
\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & -3 & 0 & 3/2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 13 & 3 & -3/2 \\ 0 & 0 & 8 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 5 & 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)
\overset{(-1)^2\cdot 5}{\rightsquigarrow}
\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & -3 & 0 & 3/2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/5 & 0 \\ 0 & 0 & 13 & 3 & -3/2 \\ 0 & 0 & 8 & 1 & -3 \end{smallmatrix}\right)
\rightsquigarrow
\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 & 3/5 & 3/2 \\ 0 & 1 & 0 & -2/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2/5 & -3/2 \\ 0 & 0 & 0 & -3/5 & -3 \end{smallmatrix}\right)
\overset{(-1)^1\cdot(-3/5)}{\rightsquigarrow}
\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 & 3/5 & 3/2 \\ 0 & 1 & 0 & -2/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 2/5 & -3/2 \end{smallmatrix}\right)
$$

$$
\rightsquigarrow
\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -3/2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -7/2 \end{smallmatrix}\right)
\overset{(-7/2)}{\rightsquigarrow}
\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) .
$$

Somit wird $\det A = (-1)^1 \cdot 2 \cdot (-1)^2 \cdot 3 \cdot (-1)^2 \cdot 5 \cdot (-1)^1 \cdot (-3/5) \cdot (-7/2) = 63$.

Später werden wir das Herausziehen der Faktoren und das Säubern der entsprechenden Spalte wieder in einem Schritt vollziehen.

Beispiel. Sei $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{smallmatrix}\right)$. Wir formen um.

$$
\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{smallmatrix}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) .
$$

Also ist $\det A = 0$.

Bemerkung.

(1) Es ist $\det\left(\begin{smallmatrix} \alpha_{1,1} \end{smallmatrix}\right) = \alpha_{1,1}$.

Es ist $\det\left(\begin{smallmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} \end{smallmatrix}\right) = \alpha_{1,1}\,\alpha_{2,2} - \alpha_{1,2}\,\alpha_{2,1}$.

Es ist

$$
\det\left(\begin{smallmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & \alpha_{1,3} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} & \alpha_{2,3} \\ \alpha_{3,1} & \alpha_{3,2} & \alpha_{3,3} \end{smallmatrix}\right) = \alpha_{1,1}\,\alpha_{2,2}\,\alpha_{3,3} + \alpha_{1,2}\,\alpha_{2,3}\,\alpha_{3,1} + \alpha_{1,3}\,\alpha_{2,1}\,\alpha_{3,2} - \alpha_{1,1}\,\alpha_{2,3}\,\alpha_{3,2} - \alpha_{1,2}\,\alpha_{2,1}\,\alpha_{3,3} - \alpha_{1,3}\,\alpha_{2,2}\,\alpha_{3,1}
$$

(genannt *Regel von Sarrus*).

Hierbei sei $\alpha_{i,j} \in \mathbf{R}$ für $i,\ j \in \{1,2,3\}$.

Die Regel im Fall 2×2 ist fast immer nützlich, die im Fall 3×3 zuweilen.

(2) Seien $k,\ \ell \geqslant 1$. Sei $S \in \mathbf{R}^{k\times k}$, sei $T \in \mathbf{R}^{k\times \ell}$ und sei $U \in \mathbf{R}^{\ell\times\ell}$. Es ist

$$
\det\left(\begin{array}{c|c} S & T \\ \hline 0 & U \end{array}\right) = (\det S)\cdot(\det U) .
$$

So z.B. ist $\det\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 7 \end{smallmatrix}\right) = \det\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{smallmatrix}\right)\det\left(\begin{smallmatrix} 7 \end{smallmatrix}\right) = (1\cdot 1 - 2\cdot 3)\cdot 7 = -35$.

Dies kann man auch iterieren.

Ein paar Begriffe. Die *(Haupt-)Diagonale* einer Matrix $A = (\alpha_{i,j})_{i,j} \in \mathbf{R}^{n\times n}$, wobei $n \geqslant 1$, besteht aus den Einträgen $\alpha_{1,1}\,,\;\ldots,\;\alpha_{n,n}$. Eine *obere Dreiecksmatrix* hat unterhalb der Diagonalen nur Nulleinträge. Eine *untere Dreiecksmatrix* hat oberhalb der Diagonalen nur Nulleinträge. Eine *Diagonalmatrix* hat außerhalb der Diagonalen nur Nulleinträge.

Iteration obengenannter Tatsache liefert nun z.B., daß die Determinante einer oberen Dreiecksmatrix gleich dem Produkt der Diagonaleinträge ist. Z.B. ist $\det\left(\begin{smallmatrix}3&6&5\\0&2&5\\0&0&7\end{smallmatrix}\right) = 3\cdot 2\cdot 7 = 42$.

Insbesondere ist die Determinante einer Diagonalmatrix gleich dem Produkt der Diagonaleinträge. Z.B. ist $\det\left(\begin{smallmatrix}3&0&0\\0&2&0\\0&0&7\end{smallmatrix}\right) = 3\cdot 2\cdot 7 = 42$.

(3) Sei $n \geqslant 1$.

(a) Sei $A \in \mathbf{R}^{n\times n}$. Es ist $\det A = \det(A^{\mathrm{t}})$.
Insbesondere gilt alles in (2) Gesagte auch in der transponierten Version.

(b) Es ist $\det \mathrm{E}_n = 1$.

(c) Es ist $\det(A\cdot B) = (\det A)\cdot(\det B)$ für $A,\ B \in \mathbf{R}^{n\times n}$.

(4) Sei $n \geqslant 1$. Sei $1 \leqslant i \leqslant n$. Sei $(x_1\,,\ldots,x_{i-1}\,,x_{i+1}\,,\ldots,x_n)$ ein Tupel von $n-1$ Vektoren aus $\mathbf{R}^{n\times 1}$. Seien $\lambda,\ \mu \in \mathbf{R}$. Seien $y,\ z \in \mathbf{R}^n$.

Sei $Y \in \mathbf{R}^{n\times n}$ die Matrix mit dem Spaltentupel

$$(x_1\,,\ldots,x_{i-1}\,,y,x_{i+1}\,,\ldots,x_n)\;.$$

Sei $Z \in \mathbf{R}^{n\times n}$ die Matrix mit dem Spaltentupel

$$(x_1\,,\ldots,x_{i-1}\,,z,x_{i+1}\,,\ldots,x_n)\;.$$

Sei $A \in \mathbf{R}^{n\times n}$ die Matrix mit dem Spaltentupel

$$(x_1\,,\ldots,x_{i-1}\,,\lambda y+\mu z,x_{i+1}\,,\ldots,x_n)\;.$$

Dann ist

$$\det A \;=\; \lambda\det(Y)+\mu\det(Z)\;.$$

Kurz, man kann Linearkombinationen, insbesondere also Faktoren, aus jeder Spalte einzeln herausziehen.

Dank (3.a) gilt entsprechendes für die Zeilen.

(5) Sei $n \geqslant 1$. Sei $A \in \mathbf{R}^{n\times n}$.

Es ist das Tupel der Spalten von A genau dann linear abhängig, wenn $\det A = 0$.

Insbesondere ist $\det A = 0$, falls A wenigstens eine Nullspalte enthält.

Es ist das Tupel der Zeilen von A genau dann linear abhängig, wenn $\det A = 0$.

Insbesondere ist $\det A = 0$, falls A wenigstens eine Nullzeile enthält.

Vgl. §5.4.2.

(6) Addition eines Vielfachen einer Zeile zu einer anderen Zeile ändert den Wert der Determinante nicht.

Addition eines Vielfachen einer Spalte zu einer anderen Spalte ändert den Wert der Determinante nicht.

Vertauschen von zwei Zeilen ändert das Vorzeichen der Determinante.

Vertauschen von zwei Spalten ändert das Vorzeichen der Determinante.

Multiplikation einer Zeile mit einem Faktor $\lambda \in \mathbf{R}$ multipliziert auch den Wert der Determinante mit diesem Faktor λ; vgl. (4).

Multiplikation einer Spalte mit einem Faktor $\lambda \in \mathbf{R}$ multipliziert auch den Wert der Determinante mit diesem Faktor λ; vgl. (4).

In anderen Worten, ein Schritt im Algorithmus der Form $\overset{\mu}{\leadsto}$ ändert die Determinante um den Faktor μ^{-1}; ein Schritt der Form $\leadsto$ ändert die Determinante nicht; wobei $\mu \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$.

Beschreiben wir noch kurz die *Laplace-Entwicklung.*

Sei $n \geqslant 2$. Sei $A = (\alpha_{i,j})_{i,j} \in \mathbf{R}^{n \times n}$.

Für $1 \leqslant k,\, \ell \leqslant n$ sei $A_{k,\ell} \in \mathbf{R}^{(n-1)\times(n-1)}$ die Matrix, die aus A durch Streichen der k-ten Zeile und der ℓ-ten Spalte entsteht.

Wählen wir ein $1 \leqslant k \leqslant n$, dann wird

$$\det A \;=\; \sum_{\ell=1}^{n} (-1)^{k+\ell} \alpha_{k,\ell} \cdot \det(A_{k,\ell}) \qquad \text{(Laplace-Entwicklung nach der } k\text{-ten Zeile)}$$

Wählen wir ein $1 \leqslant \ell \leqslant n$, dann wird

$$\det A \;=\; \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+\ell} \alpha_{k,\ell} \cdot \det(A_{k,\ell}) \qquad \text{(Laplace-Entwicklung nach der } \ell\text{-ten Spalte)}$$

Sowie die *Leibniz-Formel,* welche man aus einer iterierten Anwendung der Laplace-Entwicklung gewinnen kann.

Sei $n \geqslant 1$. Sei $A = (\alpha_{i,j})_{i,j} \in \mathbf{R}^{n \times n}$.

Sei S_n die Menge aller Bijektionen der Menge $M(n) := \{\,1, 2, \ldots, n\,\}$ in sich. Für $\sigma \in \mathrm{S}_n$ sei f_σ die Anzahl der Elemente in $\{\,(i,j) \in M(n) \times M(n) : i < j \text{ und } \sigma(i) > \sigma(j)\,\}$. Sei das *Signum* von σ definiert durch $\operatorname{sign}(\sigma) := (-1)^{f_\sigma}$. Die Leibniz-Formel besagt nun, daß

$$\det(A) \;=\; \sum_{\sigma \in \mathrm{S}_n} \operatorname{sign}(\sigma)\, \alpha_{1,\sigma(1)}\, \alpha_{2,\sigma(2)} \cdots \alpha_{n,\sigma(n)}$$

ist. Für $n = 2$ wird dies zu $\det(A) = \alpha_{1,1}\,\alpha_{2,2} - \alpha_{1,2}\,\alpha_{2,1}$. Für $n = 3$ wird dies zur Regel von Sarrus. Vgl. (1).

Für $n = 4$ erhalten wir eine vorzeichenbehaftete Summe aus 24 Produkten aus je 4 Faktoren (und nicht eine alternierende Summe von 8 Produkten, wie schon mancher in falscher Verallgemeinerung der Regel von Sarrus gedacht hat).

Für $n \geqslant 4$ würde die Anwendung dieser Formel zu einem erheblichen Rechenaufwand führen.

Beispiel.

Wir wollen die Determinante von $A := \left(\begin{smallmatrix} 1&3&2\\ 3&2&2\\ 3&3&1 \end{smallmatrix}\right)$ auf verschiedene Weisen berechnen.

- Nach Definition wird

$$\left(\begin{smallmatrix} 1&3&2\\ 3&2&2\\ 3&3&1 \end{smallmatrix}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{smallmatrix} 1&3&2\\ 0&-7&-4\\ 0&-6&-5 \end{smallmatrix}\right) \overset{(-7)}{\rightsquigarrow} \left(\begin{smallmatrix} 1&0&2/7\\ 0&1&4/7\\ 0&0&-11/7 \end{smallmatrix}\right) \overset{(-11/7)}{\rightsquigarrow} \left(\begin{smallmatrix} 1&0&0\\ 0&1&0\\ 0&0&1 \end{smallmatrix}\right) ,$$

  und also $\det A = (-7) \cdot (-11/7) = 11$.

- Mit Sarrus wird

  $$\det\left(\begin{smallmatrix} 1&3&2\\ 3&2&2\\ 3&3&1 \end{smallmatrix}\right) = 1\cdot 2\cdot 1 + 3\cdot 2\cdot 3 + 2\cdot 3\cdot 3 - 1\cdot 2\cdot 3 - 3\cdot 3\cdot 1 - 2\cdot 2\cdot 3 = 38 - 27 = 11 .$$

- Wir können auch Methoden mischen. Z.B. wird

$$\det\left(\begin{smallmatrix} 1&3&2\\ 3&2&2\\ 3&3&1 \end{smallmatrix}\right) \overset{\text{B. (6)}}{=} \det\left(\begin{smallmatrix} 1&3&2\\ 0&-7&-4\\ 0&-6&-5 \end{smallmatrix}\right) \overset{\text{B. (2)}}{=} \det(\,1\,)\cdot\det\left(\begin{smallmatrix} -7&-4\\ -6&-5 \end{smallmatrix}\right) \overset{\text{B. (1)}}{=} 1\cdot((-7)(-5)-(-4)(-6)) = 35-24 = 11 .$$

Dank Bemerkung, (3.a) kann man auch tricksen und zur Berechnung der Determinante abwechselnd Zeilen- und Spaltenumformungen durchführen. Wer sich dabei nicht wirklich sicher ist, was er da tut, sollte damit vorsichtig sein.

9.2 Definitheit

Sei $n \geqslant 1$.

Definition. Eine Matrix $A = (\alpha_{i,j})_{i,j} \in \mathbf{R}^{n\times n}$ heiße *symmetrisch,* falls $A = A^{\mathrm{t}}$.

In anderen Worten, es ist A symmetrisch genau dann, wenn $\alpha_{i,j} = \alpha_{j,i}$ für alle $i,\ j \in [1,n]$.

Vgl. §5.1, §8.3.2.

Definition. Sei eine symmetrische Matrix $A \in \mathbf{R}^{n\times n}$ gegeben.

Es heiße A *positiv definit,* falls $x^{\mathrm{t}}Ax > 0$ für alle $x \in \mathbf{R}^{n\times 1} \smallsetminus \{0\}$.

Es heiße A *negativ definit,* falls $x^{\mathrm{t}}Ax < 0$ für alle $x \in \mathbf{R}^{n\times 1} \smallsetminus \{0\}$.

Beispiel.

(1) Es ist $\left(\begin{smallmatrix} 2&0\\ 0&1 \end{smallmatrix}\right)$ positiv definit, da

$$\left(\begin{smallmatrix} \xi_1 & \xi_2 \end{smallmatrix}\right) \left(\begin{smallmatrix} 2&0\\ 0&1 \end{smallmatrix}\right) \left(\begin{smallmatrix} \xi_1\\ \xi_2 \end{smallmatrix}\right) = 2\xi_1^2 + \xi_2^2 > 0$$

für $\left(\begin{smallmatrix} \xi_1\\ \xi_2 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbf{R}^{2\times 1} \smallsetminus \{\left(\begin{smallmatrix} 0\\ 0 \end{smallmatrix}\right)\}$.

(2) Es ist $\left(\begin{smallmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{smallmatrix}\right)$ negativ definit, da

$$\left(\begin{smallmatrix} \xi_1 & \xi_2 \end{smallmatrix}\right) \left(\begin{smallmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{smallmatrix}\right) \left(\begin{smallmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{smallmatrix}\right) \;=\; -3\xi_1^2 - 3\xi_2^2 + 2\xi_1\xi_2 \;=\; -3(\xi_1 - \tfrac{1}{3}\,\xi_2)^2 - \tfrac{8}{3}\,\xi_2^2 \;<\; 0$$

für $\left(\begin{smallmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbf{R}^{2\times 1} \smallsetminus \{\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)\}$, wofür wir hier einmal den Trick der quadratischen Ergänzung verwandt haben.

(3) Es ist $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$ weder positiv noch negativ definit, da auf der einen Seite $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right) \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) = 1$, auf der anderen Seite aber $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right) \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) = -1$ ist.

Bemerkung. Sei $A = (\alpha_{i,j})_{i,j} \in \mathbf{R}^{n\times n}$ eine symmetrische Matrix.

(1) Es ist A genau dann positiv definit, wenn $-A$ negativ definit ist.

(2) Gibt es ein $1 \leqslant i \leqslant n$ mit $\alpha_{i,i} \leqslant 0$, dann ist A nicht positiv definit.

Vorsicht, die Umkehrung gilt nicht. Z.B. ist $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ wegen $\left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 \end{smallmatrix}\right) \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{smallmatrix}\right) \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right) = -2$ nicht positiv definit. Aber die Hauptdiagonaleinträge sind alle positiv.

Gibt es ein $1 \leqslant i \leqslant n$ mit $\alpha_{i,i} \geqslant 0$, dann ist A nicht negativ definit.

Vorsicht, die Umkehrung gilt nicht. Z.B. ist $\left(\begin{smallmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -1 \end{smallmatrix}\right)$ wegen $\left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 \end{smallmatrix}\right) \left(\begin{smallmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -1 \end{smallmatrix}\right) \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right) = 2$ nicht negativ definit. Aber die Hauptdiagonaleinträge sind alle negativ.

Ist insbesondere ein Hauptdiagonaleintrag von A gleich 0, so ist A weder positiv noch negativ definit.

Zu (1). Es ist $x^{\mathrm{t}}(-A)x = -x^{\mathrm{t}}Ax < 0$ genau dann, wenn $x^{\mathrm{t}}Ax > 0$ für $x \in \mathbf{R}^{n\times 1}$.

Zu (2), positive Definitheit. Ist $\alpha_{i,i} \leqslant 0$, dann ist $\mathrm{e}_i^{\mathrm{t}}A\mathrm{e}_i = \alpha_{i,i} \leqslant 0$ nicht positiv; vgl. §5.4.2.

Definition. Sei $A = (\alpha_{i,j})_{i,j} \in \mathbf{R}^{n\times n}$ eine symmetrische Matrix.

Sei $1 \leqslant k \leqslant n$. Der *k-te Hauptminor* von A ist definiert als

$$\mathrm{M}_k(A) \;:=\; \det\begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \cdots & \alpha_{1,k} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{k,1} & \cdots & \alpha_{k,k} \end{pmatrix}.$$

Beispiel. Die Hauptminoren von $A := \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{smallmatrix}\right)$ sind

$$\begin{array}{lcllcl} \mathrm{M}_1(A) & = & \det\left(\begin{smallmatrix} 1 \end{smallmatrix}\right) & & = & 1 \\ \mathrm{M}_2(A) & = & \det\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{smallmatrix}\right) & & = & 1 \\ \mathrm{M}_3(A) & = & \det\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{smallmatrix}\right) & & = & 2 \end{array}$$

Satz (Hauptminorenkriterium).

Sei $A = (\alpha_{i,j})_{i,j} \in \mathbf{R}^{n\times n}$ eine symmetrische Matrix.

(1) Es ist A positiv definit genau dann, wenn $\mathrm{M}_k(A) > 0$ für $1 \leqslant k \leqslant n$.

Es ist also A genau dann positiv definit, wenn alle Hauptminoren von A positiv sind.

(2) Es ist A negativ definit genau dann, wenn $(-1)^k \cdot \mathrm{M}_k(A) > 0$ für $1 \leqslant k \leqslant n$.

Es ist also A genau dann negativ definit, wenn die Hauptminoren von A abwechselndes Vorzeichen haben, angefangen mit $\mathrm{M}_1(A) < 0$.

Beispiel.

(1) Es ist $A := \left(\begin{smallmatrix} 1&1&1 \\ 1&2&1 \\ 1&1&3 \end{smallmatrix}\right)$ positiv definit, da $\mathrm{M}_1(A) = 1 > 0$, $\mathrm{M}_2(A) = 1 > 0$ und $\mathrm{M}_3(A) = 2 > 0$ sind; vgl. vorstehendes Beispiel.

(2) Es ist $B := \left(\begin{smallmatrix} -3&2 \\ 2&-2 \end{smallmatrix}\right)$ negativ definit, da $\mathrm{M}_1(B) = \det\left(\begin{smallmatrix} -3 \end{smallmatrix}\right) = -3 < 0$ und $\mathrm{M}_2(B) = \det\left(\begin{smallmatrix} -3&2 \\ 2&-2 \end{smallmatrix}\right) = (-3)\cdot(-2) - 2\cdot 2 = 2 > 0$ sind.

Kapitel 10

Extremstellen von Funktionen mehrerer Veränderlicher

10.1 Lokale Extremstellen in mehreren Variablen, ohne Nebenbedingungen

Sei $n \in \mathbf{Z}_{\geqslant 1}$.

> Den Fall von $n = 1$ Variablen haben wir schon in §3.2.3.2 betrachtet, den Fall von $n = 2$ Variablen in §3.4.

Sei $D \subseteq \mathbf{R}^n$ offen.

Sei $f : D \longrightarrow \mathbf{R}$ gegeben mit $f_{x_i x_j} : D \longrightarrow \mathbf{R}$ existent und stetig für $1 \leqslant\ i,\ j\ \leqslant n$.

Wir erinnern für $\underline{x} \in D$ an den Begriff der lokalen Maximal-, Minimal- und Extremstelle von f aus §3.2.3.1.

Wir erinnern an die Begriffe des Gradienten $\nabla_f(\underline{x}) = (f_{x_i}(\underline{x}))_{1 \leqslant i \leqslant n} \in \mathbf{R}^{n \times 1}$ und der Hessematrix $\mathrm{H}_f(\underline{x}) = (f_{x_i x_j}(\underline{x}))_{1 \leqslant i,\, j \leqslant n} \in \mathbf{R}^{n \times n}$ aus §8.3; und daran, daß letztere symmetrisch ist.

Definition. Es heißt $\hat{\underline{x}} \in D$ eine *Flachstelle* von f, falls $\nabla_f(\hat{\underline{x}}) = 0$ ist.

Bemerkung. Ist $\hat{\underline{x}} \in D$ eine lokale Extremstelle von f, so ist $\hat{\underline{x}}$ eine *Flachstelle* von f.

Lemma. Sei $\hat{\underline{x}} \in D$ mit $\nabla_f(\hat{\underline{x}}) = 0$ gegeben. Sei also $\hat{\underline{x}}$ eine Flachstelle von f.

(1) Ist $\mathrm{H}_f(\hat{\underline{x}})$ negativ definit, so ist $\hat{\underline{x}}$ eine lokale Maximalstelle von f.

(2) Ist $\mathrm{H}_f(\hat{\underline{x}})$ positiv definit, so ist $\hat{\underline{x}}$ eine lokale Minimalstelle von f.

(3) Ist $\mathrm{H}_f(\underline{\hat{x}})$ weder positiv noch negativ definit, und ist $\det \mathrm{H}_f(\underline{\hat{x}}) \neq 0$, dann ist $\underline{\hat{x}}$ keine lokale Extremstelle von f, sondern eine *Sattelstelle.*

Ist $\det \mathrm{H}_f(\underline{\hat{x}}) = 0$, so machen wir keine Aussage über das Vorliegen einer lokalen Extremstelle.

> Man vergleiche mit dem Lemma aus §3.4 und dem Hauptminorenkriterium aus §9.2; siehe auch Lösung zu Aufgabe 126.
>
> *Begründung* zu (1). Um $\underline{\hat{x}}$ können wir f durch das Taylorpolynom in zweiter Ordnung um $\underline{\hat{x}}$ annähern,
>
> $$f(\underline{x}) \;\approx\; f(\underline{\hat{x}}) + (\underline{x} - \underline{\hat{x}}) \cdot \nabla_f(\underline{\hat{x}}) + \tfrac{1}{2}(\underline{x} - \underline{\hat{x}}) \cdot \mathrm{H}_f(\underline{\hat{x}}) \cdot (\underline{x} - \underline{\hat{x}})^{\mathrm{t}} \;=\; f(\underline{\hat{x}}) + \tfrac{1}{2}(\underline{x} - \underline{\hat{x}}) \cdot \mathrm{H}_f(\underline{\hat{x}}) \cdot (\underline{x} - \underline{\hat{x}})^{\mathrm{t}} \;;$$
>
> vgl. §8.4. Für das lokale Verhalten genügt die Betrachtung dieses Taylorpolynoms. Nun ist $\mathrm{H}_f(\underline{\hat{x}})$ negativ definit, also $\frac{1}{2}(\underline{x} - \underline{\hat{x}}) \cdot \mathrm{H}_f(\underline{\hat{x}}) \cdot (\underline{x} - \underline{\hat{x}})^{\mathrm{t}} < 0$ für $\underline{x} \in D \smallsetminus \{\underline{\hat{x}}\}$, und $= 0$ für $\underline{x} = \underline{\hat{x}}$. Somit ist der Wert unseres Taylorpolynoms an der Stelle $\underline{\hat{x}}$ maximal.

Beispiel. Sei $n = 3$, sei $D = \mathbf{R}^3$ und sei $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - x\sin(z)$. Wir wollen untersuchen, ob bei $(0, 0, 0)$ eine lokale Extremstelle vorliegt.

Es ist $\nabla_f(x, y, z) = \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - \sin(z) \\ 2y \\ 2z - x\cos(z) \end{pmatrix}$, also $\nabla_f(0, 0, 0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Somit liegt bei $(0, 0, 0)$ eine Flachstelle vor.

Desweiteren ist $\mathrm{H}_f(x, y, z) = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -\cos(z) \\ 0 & 2 & 0 \\ -\cos(z) & 0 & 2 + x\sin(z) \end{pmatrix}$, und also $\mathrm{H}_f(0, 0, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Es wird $\mathrm{M}_1(\mathrm{H}_f(0, 0, 0)) = \det(2) > 0$, $\mathrm{M}_2(\mathrm{H}_f(0, 0, 0)) = \det\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 4 > 0$ und $\mathrm{M}_2(\mathrm{H}_f(0, 0, 0)) = \det\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 6 > 0$. Mithin ist $\mathrm{H}_f(0, 0, 0)$ positiv definit; cf. §9.2. Folglich liegt bei $(0, 0, 0)$ eine lokale Minimalstelle vor.

10.2 Lokale Extremstellen in mehreren Variablen, mit Nebenbedingungen

Sei $n \in \mathbf{Z}_{\geqslant 1}$. Sei $D \subseteq \mathbf{R}^n$ offen.

Sei $f : D \longrightarrow \mathbf{R}$ gegeben mit $f_{x_i x_j} : D \longrightarrow \mathbf{R}$ existent und stetig für $1 \leqslant i,\, j \leqslant n$.

Sei $\ell \in \mathbf{Z}_{\geqslant 1}$. Sei $g_k : D \longrightarrow \mathbf{R}$ für $1 \leqslant k \leqslant \ell$ gegeben mit $(g_k)_{x_i x_j} : D \longrightarrow \mathbf{R}$ existent und stetig für $1 \leqslant i,\, j \leqslant n$. Wir fassen diese Funktionen zusammen zur Abbildung

$$\begin{array}{rcccl} g & : & D & \longrightarrow & \mathbf{R}^\ell \\ & & \underline{x} & \longmapsto & g(\underline{x}) \;:=\; (g_1(\underline{x}), \ldots, g_\ell(\underline{x})) \;. \end{array}$$

10.2.1 Begriff einer lokalen Extremstelle unter Nebenbedingungen

Definition. Sei $\underline{\hat{x}} \in D$.

(1) Es heißt $\underline{\hat{x}}$ eine *lokale Maximalstelle* von f unter der Nebenbedingung $g = 0$, falls $g(\underline{\hat{x}}) = 0$ und falls es ein $\varepsilon \in \mathbf{R}_{>0}$ so gibt, daß $f(\underline{\hat{x}}) \geqslant f(\underline{x})$ für alle $\underline{x} \in D$ mit $\|\underline{x} - \underline{\hat{x}}\| < \varepsilon$ und $g(\underline{x}) = 0$.

(2) Es heißt $\underline{\hat{x}}$ eine *lokale Minimalstelle* von f unter der Nebenbedingung $g = 0$, falls $g(\underline{\hat{x}}) = 0$ und falls es ein $\varepsilon \in \mathbf{R}_{>0}$ so gibt, daß $f(\underline{\hat{x}}) \leqslant f(\underline{x})$ für alle $\underline{x} \in D$ mit $\|\underline{x} - \underline{\hat{x}}\| < \varepsilon$ und $g(\underline{x}) = 0$.

(3) Es heißt $\underline{\hat{x}}$ eine *lokale Extremstelle* von f unter der Nebenbedingung $g = 0$, falls $\underline{\hat{x}}$ eine lokale Maximal- oder Minimalstelle von f unter der Nebenbedingung $g = 0$ ist.

10.2.2 Flachstellen unter Nebenbedingungen

Sei $\underline{\hat{x}} \in D$.

Bezeichne $N(\underline{\hat{x}}) \in \mathbf{R}^{n\times\ell}$ die Matrix mit dem Spaltentupel $(\nabla_{g_1}(\underline{\hat{x}}), \nabla_{g_2}(\underline{\hat{x}}), \ldots, \nabla_{g_\ell}(\underline{\hat{x}}))$.

Definition. Wenn $g(\underline{\hat{x}}) = 0$ ist, wenn das Spaltentupel von $N(\underline{\hat{x}})$ linear unabhängig ist und wenn $\nabla_f(\underline{\hat{x}}) = N(\underline{\hat{x}}) \cdot r$ eine Lösung $r \in \mathbf{R}^{\ell\times 1}$ besitzt, dann heißt $\underline{\hat{x}}$ eine *Flachstelle* von f unter der Nebenbedingung $g = 0$.

Der dann eindeutig festliegende Vektor r heißt *Lagrangemultiplikator* zur Flachstelle $\underline{\hat{x}}$.

Lemma. Ist $\underline{\hat{x}}$ eine lokale Extremstelle von f unter der Nebenbedingung $g = 0$ und ist das Spaltentupel von $N(\underline{\hat{x}})$ linear unabhängig, dann ist $\underline{\hat{x}}$ eine Flachstelle von f unter der Nebenbedingung $g = 0$.

Falls die Flachstellen erst *gesucht* werden müssen, dann faßt man

$$\begin{aligned} \nabla_f(\underline{\hat{x}}) &= N(\underline{\hat{x}}) \cdot r \\ g(\underline{\hat{x}}) &= 0\,, \end{aligned}$$

d.h.

$$\begin{aligned} \nabla_f(\underline{\hat{x}}) &= \nabla_{g_1}(\underline{\hat{x}})\,\rho_1 + \nabla_{g_2}(\underline{\hat{x}})\,\rho_2 + \cdots + \nabla_{g_\ell}(\underline{\hat{x}})\,\rho_\ell \\ g(\underline{\hat{x}}) &= 0\,, \end{aligned}$$

als (im allgemeinen nichtlineares) Gleichungssystem in den Unbekannten

$$\hat{x}_1\,,\ \hat{x}_2\,,\ \ldots\,,\ \hat{x}_n\,,\quad \rho_1\,,\ \rho_2\,,\ \ldots\,,\ \rho_\ell$$

auf. Ist für eine Lösung $\underline{\hat{x}}$ schließlich noch das Spaltentupel von $N(\underline{\hat{x}})$ linear unabhängig, dann ist $\underline{\hat{x}}$ eine Flachstelle von f unter der Nebenbedingung $g = 0$.

Falls dagegen eine zu untersuchende Stelle $\underline{\hat{x}} \in D$ in der Aufgabenstellung *vorgegeben* ist, so reduziert sich die Frage, ob $\underline{\hat{x}}$ eine Flachstelle unter der Nebenbedingung $g = 0$ ist, darauf, zu prüfen, ob tatsächlich $g(\underline{\hat{x}}) = 0$ ist und ob es auf eindeutige Weise $\rho_1, \ldots, \rho_\ell$ gibt mit $\nabla_f(\underline{\hat{x}}) = \nabla_{g_1}(\underline{\hat{x}})\,\rho_1 + \nabla_{g_2}(\underline{\hat{x}})\,\rho_2 + \cdots + \nabla_{g_\ell}(\underline{\hat{x}})\,\rho_\ell$.

10.2.3 Lokale Extremstellen unter Nebenbedingungen

Jedenfalls müssen die Flachstellen aus §10.2.2 nun daraufhin geprüft werden, ob sie Extremstellen sind, alles unter der Nebenbedingung $g = 0$.

Sei $\underline{\hat{x}} \in D$ eine Flachstelle von f unter der Nebenbedingung $g = 0$.

Wir lösen das lineare Gleichungssystem $N(\underline{\hat{x}})^{\mathrm{t}}\, u = 0$ in $u \in \mathbf{R}^{n\times 1}$.

Sei dann $U \in \mathbf{R}^{n\times(n-\ell)}$ die Matrix mit dem Spaltentupel $(u_1, \ldots, u_{n-\ell})$ in den Bezeichnungen von §5.3. D.h. sei das Spaltentupel von U eine Basis von

$$\{\, u \in \mathbf{R}^{n\times 1} \;:\; N(\underline{\hat{x}})^{\mathrm{t}}\, u = 0 \,\}\,;$$

vgl. §5.3, vorletzte Bemerkung.

Schreibe ferner

$$F(\underline{x}) := f(\underline{x}) - \rho_1\, g_1(\underline{x}) - \cdots - \rho_\ell\, g_\ell(\underline{x})$$

unter Verwendung des zur Flachstelle $\underline{\hat{x}}$ gehörigen Lagrangemultiplikators

$$r \;=\; \begin{pmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \vdots \\ \rho_\ell \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^{\ell\times 1}\,.$$

Wir bilden die Hessematrix $\mathrm{H}_F(\underline{\hat{x}})$ von F an der Flachstelle $\underline{\hat{x}}$.

Lemma ([1]).

Sei, wie gesagt, $\underline{\hat{x}} \in D$ eine Flachstelle von f unter der Nebenbedingung $g = 0$. Seien dazu $\mathrm{H}_F(\underline{\hat{x}})$ und U wie vorstehend beschrieben gebildet.

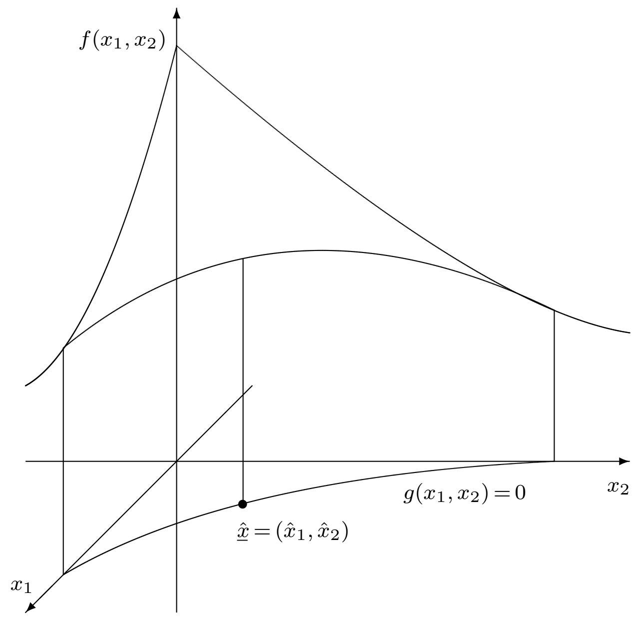
(1) Ist $U^{\mathrm{t}}\,\mathrm{H}_F(\underline{\hat{x}})\,U \in \mathbf{R}^{(n-\ell)\times(n-\ell)}$ negativ definit, so ist $\underline{\hat{x}}$ eine lokale Maximalstelle von f unter der Nebenbedingung $g = 0$.

(2) Ist $U^{\mathrm{t}}\,\mathrm{H}_F(\underline{\hat{x}})\,U \in \mathbf{R}^{(n-\ell)\times(n-\ell)}$ positiv definit, so ist $\underline{\hat{x}}$ eine lokale Minimalstelle von f unter der Nebenbedingung $g = 0$.

(3) Ist $U^{\mathrm{t}}\,\mathrm{H}_F(\underline{\hat{x}})\,U$ weder positiv noch negativ definit und ist $\det U^{\mathrm{t}}\,\mathrm{H}_F(\underline{\hat{x}})\,U \neq 0$, so ist $\underline{\hat{x}}$ keine lokale Extremstelle von f unter der Nebenbedingung $g = 0$, sondern eine *Sattelstelle* von f unter der Nebenbedingung $g = 0$.

Ist $\det(U^{\mathrm{t}}\,\mathrm{H}_F(\underline{\hat{x}})\,U) = 0$, so machen wir keine Aussage über das Vorliegen einer lokalen Extremstelle.

[1] Vgl. [**2,** Kap. 14.7, Aufg. 15], [**4,** Satz 8.4.12], [**7,** Th. VIII.4.5], [**10,** Extrema, und Extrema mit Nebenbedingungen].



10.2.4 Beispiele

Beispiel. Sei $n = 2$. Sei $D = \mathbf{R}^2$. Sei $f(x, y) = xy$.

Sei $\ell = 1$. Sei $g_1(x, y) = x^2 + y^2 - 2$.

Wir suchen alle lokalen Extremstellen von f unter der Nebenbedingung $g = 0$.

> In anderen Worten, wir suchen die Maxima und die Minima von f auf dem Kreis um $(0, 0)$ von Radius $\sqrt{2}$.

1. Bestimmung der Flachstellen unter der Nebenbedingung $g = 0$.

Es ist $\nabla_f(x\,, y) = \binom{y}{x}$.

Es ist $\nabla_{g_1}(x\,, y) = \binom{2x}{2y}$ und wegen $\ell = 1$ also auch $N(x, y) = \binom{2x}{2y}$.

Wir haben das Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcl} \binom{y_0}{x_0} & = & \binom{2x_0}{2y_0}\,\rho_1 \\ x_0^2 + y_0^2 - 2 & = & 0 \end{array}$$

zu lösen.

Ist $x_0 = 0$, dann ist $y_0 \neq 0$, also wegen $0 = x_0 = 2y_0\rho_1$ auch $\rho_1 = 0$, was dann wiederum $y_0 = 2x_0\rho_1 = 0$ nach sich zieht, was nicht geht.

Somit muß $x_0 \neq 0$ sein.

Notwendig ist nun $x_0 = 2y_0\rho_1 = 2(2x_0\rho_1)\rho_1 = 4x_0\rho_1^2$.

Damit muß aber $1 = 4\rho_1^2$ sein, also $\rho_1 \in \{-\frac{1}{2}\,, +\frac{1}{2}\}$.

Fall $\rho_1 = -\frac{1}{2}$.

Es ist $x_0 = -y_0$. Wegen $2 = x_0^2 + y_0^2 = 2x_0^2$ liefert dies die Flachstellen $(x_0\,, y_0) = (+1, -1)$ und $(x_0\,, y_0) = (-1, +1)$ von f unter der Nebenbedingung $g = 0$, denn an beiden Stellen ist das Spaltentupel von $N(x_0\,, y_0)$ linear unabhängig, d.h. die Spalte von $N(x_0\,, y_0)$ ist ungleich 0.

Fall $\rho_1 = +\frac{1}{2}$.

Es ist $x_0 = y_0$. Wegen $2 = x_0^2 + y_0^2 = 2x_0^2$ liefert dies die Flachstellen $(x_0\,, y_0) = (+1, +1)$ und $(x_0\,, y_0) = (-1, -1)$ von f unter der Nebenbedingung $g = 0$, denn an beiden Stellen ist das Spaltentupel von $N(x_0\,, y_0)$ linear unabhängig.

Zusammen haben wir die Menge der Flachstellen

$$\{(+1, -1),\ (-1, +1),\ (-1, -1),\ (+1, +1)\}$$

gefunden, die ersten beiden mit Lagrangemultiplikator $({\scriptstyle -1/2})$, die letzten beiden mit Lagrangemultiplikator $({\scriptstyle +1/2})$.

2. Entscheidung auf lokale Extremstellen unter der Nebenbedingung $g = 0$.

Ist $\rho_1 = -\frac{1}{2}$, dann ist $F(x, y) = f(x, y) - \rho_1 g_1(x, y) = xy + \frac{1}{2}(x^2 + y^2 - 2)$ und also $\mathrm{H}_F(x, y) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.

Ist $\rho_1 = +\frac{1}{2}$, dann ist $F(x, y) = f(x, y) - \rho_1 g_1(x, y) = xy - \frac{1}{2}(x^2 + y^2 - 2)$ und also $\mathrm{H}_F(x, y) = \left(\begin{smallmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{smallmatrix}\right)$.

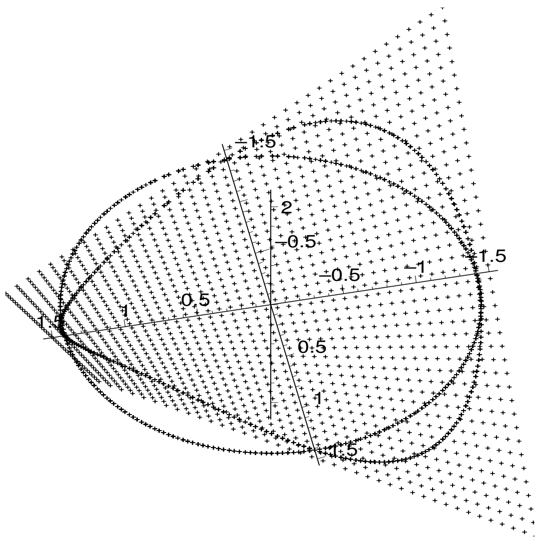
Fall $(x_0\,, y_0) = (+1, -1)$. Es ist $\rho_1 = -\frac{1}{2}$, also $\mathrm{H}_F(+1, -1) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Es ist $N(+1, -1)^{\mathrm{t}} = \left(\begin{smallmatrix} 2 & -2 \end{smallmatrix}\right)$. Somit ist eine Basis von $\{\, u \in \mathbf{R}^{n\times 1} \;:\; \left(\begin{smallmatrix} 2 & -2 \end{smallmatrix}\right) u = 0 \,\}$ gegeben durch $(\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right))$, und wir erhalten $U = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$. Nun ist $U^{\mathrm{t}}\, \mathrm{H}_F(x_0, y_0)\, U = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \end{smallmatrix}\right) \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right) \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 4 \end{smallmatrix}\right)$ positiv definit. Also ist $(+1, -1)$ eine lokale Minimalstelle von f unter der Nebenbedingung $g = 0$. Dort nimmt f den Wert -1 an.

Fall $(x_0\,, y_0) = (-1, +1)$. Es ist $\rho_1 = -\frac{1}{2}$, also $\mathrm{H}_F(-1, +1) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Es ist $N(-1, +1)^{\mathrm{t}} = \left(\begin{smallmatrix} -2 & 2 \end{smallmatrix}\right)$. Somit ist eine Basis von $\{\, u \in \mathbf{R}^{n\times 1} \;:\; \left(\begin{smallmatrix} 2 & -2 \end{smallmatrix}\right) u = 0 \,\}$ gegeben durch $(\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right))$, und wir erhalten $U = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$. Nun ist $U^{\mathrm{t}}\, \mathrm{H}_F(x_0, y_0)\, U = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \end{smallmatrix}\right) \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right) \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 4 \end{smallmatrix}\right)$ positiv definit. Also ist $(-1, +1)$ eine lokale Minimalstelle von f unter der Nebenbedingung $g = 0$. Dort nimmt f den Wert -1 an.

Fall $(x_0\,, y_0) = (-1, -1)$. Es ist $\rho_1 = +\frac{1}{2}$, also $\mathrm{H}_F(-1, -1) = \left(\begin{smallmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{smallmatrix}\right)$. Es ist $N(-1, -1)^{\mathrm{t}} = \left(\begin{smallmatrix} -2 & -2 \end{smallmatrix}\right)$. Somit ist eine Basis von $\{\, u \in \mathbf{R}^{n\times 1} \;:\; \left(\begin{smallmatrix} -2 & -2 \end{smallmatrix}\right) u = 0 \,\}$ gegeben durch $(\left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right))$, und wir erhalten $U = \left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$. Nun ist $U^{\mathrm{t}}\, \mathrm{H}_F(x_0, y_0)\, U = \left(\begin{smallmatrix} -1 & 1 \end{smallmatrix}\right) \left(\begin{smallmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{smallmatrix}\right) \left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} -4 \end{smallmatrix}\right)$ negativ definit. Also ist $(-1, -1)$ eine lokale Maximalstelle von f unter der Nebenbedingung $g = 0$. Dort nimmt f den Wert $+1$ an.

Fall $(x_0\,, y_0) = (+1, +1)$. Es ist $\rho_1 = +\frac{1}{2}$, also $\mathrm{H}_F(+1, +1) = \left(\begin{smallmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{smallmatrix}\right)$. Es ist $N(+1, +1)^{\mathrm{t}} = \left(\begin{smallmatrix} +2 & +2 \end{smallmatrix}\right)$. Somit ist eine Basis von $\{\, u \in \mathbf{R}^{n\times 1} \;:\; \left(\begin{smallmatrix} +2 & +2 \end{smallmatrix}\right) u = 0 \,\}$ gegeben durch $(\left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right))$, und wir erhalten $U = \left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$. Nun ist $U^{\mathrm{t}}\, \mathrm{H}_F(x_0, y_0)\, U = \left(\begin{smallmatrix} -1 & 1 \end{smallmatrix}\right) \left(\begin{smallmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{smallmatrix}\right) \left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} -4 \end{smallmatrix}\right)$ negativ definit. Also ist $(+1, +1)$ eine lokale Maximalstelle von f unter der Nebenbedingung $g = 0$.

Dort nimmt f den Wert $+1$ an.



Weniger umfangreich ist die Entscheidung an einer bereits gegebenen Stelle:

Beispiel. Sei $n = 4$. Sei $D = \mathbf{R}^4$. Sei $f(x,y,z,w) = x + x^2 + y^2 + yz + 2z + w$.

Sei $\ell = 2$. Sei $g_1(x,y,z,w) = xy + z$. Sei $g_2(x,y,z,w) = x + yz + z + w$.

Wir wollen entscheiden, ob $(0,0,0,0)$ eine lokale Extremstelle von f unter der Nebenbedingung $g = 0$ ist.

1. Ist $(0,0,0,0)$ *eine Flachstelle von* f *unter der Nebenbedingung* $g = 0$ *?*

Es ist $\nabla_f(x,y,z,w) = \begin{pmatrix} 1+2x \\ 2y+z \\ y+2 \\ 1 \end{pmatrix}$, somit also $\nabla_f(0,0,0,0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Es ist $\nabla_{g_1}(x,y,z,w) = \begin{pmatrix} y \\ x \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\nabla_{g_2}(x,y,z,w) = \begin{pmatrix} 1 \\ z \\ y+1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Also ist $N(x,y,z,w) = \begin{pmatrix} y & 1 \\ x & z \\ 1 & y+1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, mithin $N(0,0,0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, mit linear unabhängigem Spaltentupel.

Wir finden

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} ,$$

mit dem Lagrangemultiplikator $r = \begin{pmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Also ist $(0,0,0,0)$ in der Tat eine Flachstelle von f unter der Nebenbedingung $g = 0$.

2. Ist $(0,0,0,0)$ *eine lokale Extremstelle von* f *unter der Nebenbedingung* $g = 0$ *?*

Es ist $N(0,0,0,0)^{\mathrm{t}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, mit Zeilenstufenform $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Also enthält $U = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ in den Spalten eine Basis von $\{\, u \in \mathbf{R}^{4\times 1} \;:\; N(0,0,0,0)^{\mathrm{t}}\, u = 0 \,\}$.

Es ist

$$\begin{aligned} F(x,y,z,w) &= f(x,y,z,w) - \rho_1\, g_1(x,y,z,w) - \rho_2\, g_2(x,y,z,w) \\ &= (x + x^2 + y^2 + yz + 2z + w) - (xy + z) - (x + yz + z + w) \\ &= x^2 + y^2 - xy\ . \end{aligned}$$

So wird $\mathrm{H}_F(x,y,z,w) = \left(\begin{smallmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, insbesondere also auch $\mathrm{H}_F(0,0,0,0) = \left(\begin{smallmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.
Es ergibt sich

$$U^{\mathrm{t}}\,\mathrm{H}_F(0,0,0,0)\,U \;=\; \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \left(\begin{smallmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \;=\; \left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{smallmatrix}\right)\ .$$

Da $\mathrm{M}_1(\left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{smallmatrix}\right)) = \det\left(\begin{smallmatrix} 2 \end{smallmatrix}\right) = 2 > 0$ und $\mathrm{M}_2(\left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{smallmatrix}\right)) = \det\left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{smallmatrix}\right) = 3 > 0$ ist, ist diese Matrix positiv definit; cf. §9.2.

Folglich ist $(0,0,0,0)$ eine lokale Minimalstelle von f unter der Nebenbedingung $g = 0$.

Kapitel 11

Komplexe Zahlen

11.1 Definition

Definition. Die Menge der *komplexen Zahlen* ist definiert durch

$$\mathbf{C} \;:=\; \{\, a + b\,\mathrm{i} \;:\; a,\, b \,\in\, \mathbf{R} \,\}\;,$$

wobei $a + b\,\mathrm{i} = \tilde{a} + \tilde{b}\,\mathrm{i}$ für $a,\, b,\, \tilde{a},\, \tilde{b} \,\in\, \mathbf{R}$ genau dann gelte, wenn $a = \tilde{a}$ und $b = \tilde{b}$ ([2]).

Auf $\mathbf{C}$ sind Addition und Multiplikation erklärt durch

$$\begin{array}{rcccccl} (+) \;: & \mathbf{C} & \times & \mathbf{C} & \longrightarrow & \mathbf{C} & \\ & (a + b\,\mathrm{i} & , & \tilde{a} + \tilde{b}\,\mathrm{i}) & \longmapsto & (a + b\,\mathrm{i}) + (\tilde{a} + \tilde{b}\,\mathrm{i}) \;:=\; (a + \tilde{a}) + (b + \tilde{b})\,\mathrm{i} & \\ (\cdot) \;: & \mathbf{C} & \times & \mathbf{C} & \longrightarrow & \mathbf{C} & \\ & (a + b\,\mathrm{i} & , & \tilde{a} + \tilde{b}\,\mathrm{i}) & \longmapsto & (a + b\,\mathrm{i}) \cdot (\tilde{a} + \tilde{b}\,\mathrm{i}) \;:=\; (a\tilde{a} - b\tilde{b}) + (a\tilde{b} + \tilde{a}b)\,\mathrm{i}\;, & \end{array}$$

wobei $a,\, b,\, \tilde{a},\, \tilde{b} \,\in\, \mathbf{R}$. D.h. es wird ausmultipliziert unter Beachtung von

$$\boxed{\mathrm{i}^2 \;=\; -1}\;.$$

Der Multiplikationspunkt wird oft unterschlagen.

Wir schreiben $a = a + 0\mathrm{i}$ und $b\mathrm{i} = 0 + b\mathrm{i}$ für $a,\, b \,\in\, \mathbf{R}$.

Es ist $1 \cdot z = z$ und $0 + z = z$ für $z \in \mathbf{C}$.

Ist $z = a + b\mathrm{i} \in \mathbf{C}$, wobei $a,\, b \,\in\, \mathbf{R}$, so ist $-z = -a + (-b)\mathrm{i}$. Wir schreiben $z - w := z + (-w)$ für $z,\, w \,\in\, \mathbf{C}$, usf.

Es gelten das Assoziativ- und das Kommutativgesetz der Addition und der Multiplikation, d.h. $(zw)v = z(wv)$, $zw = wz$, $(z + w) + v = z + (w + v)$, $z + w = w + z$ für $z,\, w,\, v \,\in\, \mathbf{C}$.

[2] Formal sollte man $a + b\,\mathrm{i}$ als Paar (a, b) reeller Zahlen einführen, auf solchen die Grundrechenarten definieren und im nachhinein $\mathrm{i} := (0, 1)$ setzen. Das gibt im Ergebnis dasselbe.

Es gilt das Distributivgesetz, d.h. $(z+w)v = zv + wv$ für $z,\ w,\ v\ \in\ \mathbf{C}$.

Komplexe Zahlen der Form $a = a + 0\mathrm{i}$ mit $a \in \mathbf{R}$ heißen *reell.*

Es ist $\mathbf{R} = \{\, a\ :\ a \in \mathbf{R}\,\} = \{\, a + 0\mathrm{i}\ :\ a \in \mathbf{R}\,\} \subseteq \mathbf{C}$.

Komplexe Zahlen der Form $b\mathrm{i} = 0 + b\mathrm{i}$ mit $b \in \mathbf{R}$ heißen *(rein) imaginär.*

Wir können jeder komplexen Zahl ihren *Realteil* und ihren *Imaginärteil* zuordnen,

$$\begin{array}{rcll} \mathrm{Re}(a+b\mathrm{i}) & := & a & \text{(Realteil)} \\ \mathrm{Im}(a+b\mathrm{i}) & := & b & \text{(Imaginärteil)} \end{array}$$

wobei $a,\ b\ \in\ \mathbf{R}$. Also $\mathrm{Re}, \mathrm{Im}\ :\ \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{R}$.

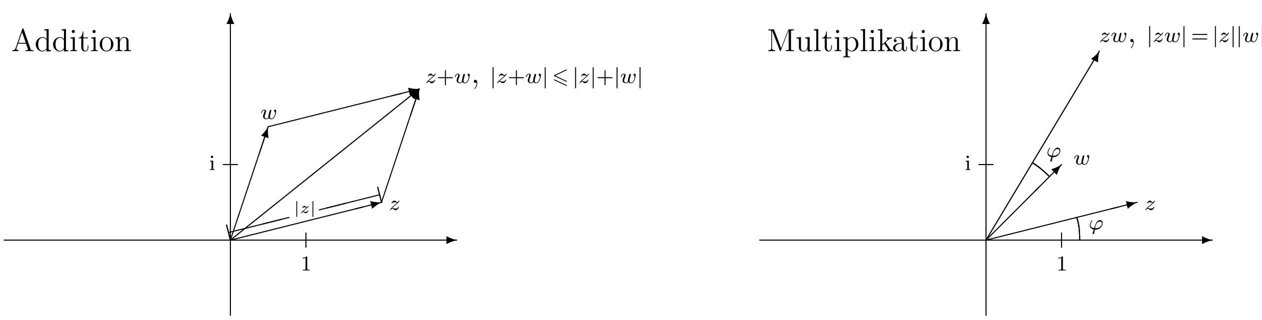
Ist $z = a + b\mathrm{i} \in \mathbf{C}$, wobei $a,\ b\ \in\ \mathbf{R}$, so bezeichnet $|z| := (a^2 + b^2)^{1/2} \in \mathbf{R}_{\geqslant 0}$ den *Betrag* von z.

Lemma (Dreiecksungleichung). Es ist $|z + w| \leqslant |z| + |w|$ für $z,\ w\ \in\ \mathbf{C}$. Vgl. §1.2.

Bemerkung. Es ist $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$ für $z,\ w\ \in\ \mathbf{C}$.

Vgl. Aufgaben 138 und 3.(1).

Geometrisch deutet sich dies wie folgt. Eine komplexe Zahl $a+b\mathrm{i}$ bekommt in der reellen Ebene, in diesem Zusammenhang auch *Gaußsche Zahlenebene* genannt, die Koordinaten (a, b) zugewiesen. Ihr Betrag ist ihr Abstand vom Punkt $(0, 0)$, d.h. die Länge des Vektors von $(0, 0)$ nach (a, b). Reelle Zahlen liegen auf der *reellen Achse* $\{\,(a, 0)\ :\ a\ \in\ \mathbf{R}\,\}$. Imaginäre Zahlen liegen auf der *imaginären Achse* $\{\,(0, b)\ :\ b \in \mathbf{R}\,\}$.



Bei der Multiplikation werden die mit der positiven reellen Achse eingeschlossenenen Winkel addiert und die Längen der Vektoren multipliziert.

Bemerkung. Ist $z = a + b\mathrm{i} \in \mathbf{C} \smallsetminus \{0\}$, wobei $a,\ b\ \in\ \mathbf{R}$, dann ist

$$z^{-1} \ =\ \tfrac{a}{a^2+b^2} - \tfrac{b}{a^2+b^2}\mathrm{i} \ =\ \tfrac{a-b\mathrm{i}}{a^2+b^2}\ .$$

Begründung. Da $a + b\mathrm{i} \neq 0$, ist $a \neq 0$ oder $b \neq 0$, und so jedenfalls $a^2 + b^2 > 0$.

Es wird $(a+b\mathrm{i})\cdot(\frac{a}{a^2+b^2}-\frac{b}{a^2+b^2}\mathrm{i}) = \dfrac{a^2-b^2\mathrm{i}^2}{a^2+b^2} = \dfrac{a^2+b^2}{a^2+b^2} = 1$. Dies zeigt die Bemerkung.

Um vom Vektor von 0 nach z zum Vektor von 0 nach z^{-1} zu kommen, muß an der reellen Achse gespiegelt werden und die Länge des Vektors invertiert werden.

Beispiel. Es wird $\dfrac{2+3\mathrm{i}}{1-2\mathrm{i}} = \dfrac{(2+3\mathrm{i})(1+2\mathrm{i})}{(1-2\mathrm{i})(1+2\mathrm{i})} = \dfrac{2+4\mathrm{i}+3\mathrm{i}+6\mathrm{i}^2}{1^2+2^2} = \dfrac{-4+7\mathrm{i}}{5} = -\frac{4}{5}+\frac{7}{5}\mathrm{i}$.

Potenzen mit ganzzahligen Exponenten werden in der üblichen Bedeutung verwandt. Die Potenzgesetze gelten hier, also $(zw)^a = z^a w^a$, $z^{a+b} = z^a z^b$, $z^{ab} = (z^a)^b$ für $a,\, b \in \mathbf{Z}$, $z,\, w \in \mathbf{C} \smallsetminus \{0\}$. Der binomische Lehrsatz aus §1.3.2 gilt genauso auch in $\mathbf{C}$.

Definition. Die *komplexe Konjugation* ist erklärt durch

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{C} & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ z = a+b\mathrm{i} & \longmapsto & \bar{z} := a-b\mathrm{i}\ . \end{array}$$

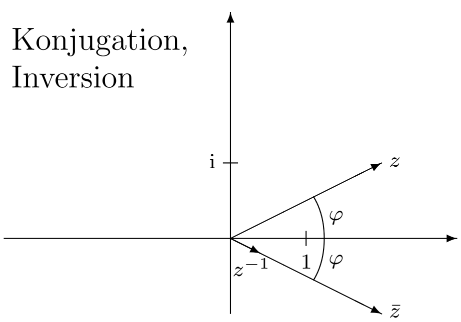
wobei $a,\, b \in \mathbf{R}$. Geometrisch ist dies die Spiegelung an der reellen Achse.

Es ist $\overline{z+w} = \bar{z}+\bar{w}$ und $\overline{z\cdot w} = \bar{z}\cdot\bar{w}$ für $z,\, w \in \mathbf{C}$. Vgl. Aufgabe 138.(1, 2).

Es ist $|z|^2 = z\bar{z}$, $\mathrm{Re}(z) = \frac{1}{2}(z+\bar{z})$ und $\mathrm{Im}(z) = \frac{1}{2\mathrm{i}}(z-\bar{z})$ für $z \in \mathbf{C}$. Vgl. Aufgabe 138.(3, 4).

Es ist $z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$; vgl. vorstehende Bemerkung.

Konjugation,
Inversion



11.2 Euler

11.2.1 Exponentialfunktion, Sinus und Cosinus im Komplexen

Viele Begriffe und Tatsachen aus §2.2 und §2.3 gelten entsprechend auch im Komplexen.

Definition. Sei $k \in \mathbf{Z}$.

Eine Folge $(z_n)_{n\geqslant k} = (z_n)_n$ mit Werten $z_n \in \mathbf{C}$ für $n \geqslant k$ heißt auch *komplexe Folge.*

Es heißt $z \in \mathbf{C}$ ihr *Grenzwert* oder *Limes,* falls für alle $\varepsilon > 0$ ein $\ell \in \mathbf{Z}_{\geqslant k}$ mit $|z - z_n| < \varepsilon$ für $n \geqslant \ell$ existiert. Diesenfalls ist dieser eindeutig bestimmt und wird

$$\lim_{n\to\infty} z_n \ = \ \lim_n z_n \ := \ z$$

geschrieben. Eine komplexe Folge $(z_n)_n$ *konvergiert,* falls sie einen Grenzwert hat, ansonsten *divergiert* sie.

Bemerkung. Seien $(z_n)_n$ und $(w_n)_n$ konvergente komplexe Folgen. Seien $\lambda,\, \mu \;\in\; \mathbf{C}$. Dann ist

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}(\lambda z_n + \mu w_n) &= \lambda(\lim_{n\to\infty} z_n) + \mu(\lim_{n\to\infty} w_n)\\ \lim_{n\to\infty}(z_n w_n) &= (\lim_{n\to\infty} z_n)(\lim_{n\to\infty} w_n)\\ \lim_{n\to\infty} \bar{z}_n &= \overline{\lim_{n\to\infty} z_n}\\ \lim_{n\to\infty} |z_n| &= |\lim_{n\to\infty} z_n|\end{aligned}$$

Ist $\lim_{n\to\infty} w_n \neq 0$ und ist $w_n \neq 0$ stets, dann gilt auch $\frac{\lim_{n\to\infty} z_n}{\lim_{n\to\infty} w_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{z_n}{w_n}$.

Es konvergiert die komplexe Folge $(z_n)_n$ genau dann, wenn die rellen Folgen $(\mathrm{Re}(z_n))_n$ und $(\mathrm{Im}(z_n))_n$ konvergieren, und diesenfalls ist

$$\lim_{n\to\infty} z_n \;=\; \lim_{n\to\infty} \mathrm{Re}(z_n) + \mathrm{i} \lim_{n\to\infty} \mathrm{Im}(z_n)$$

Definition. Eine *(komplexe) Reihe* ist eine komplexe Folge der Form

$$\textstyle\sum_{t\geqslant k} c_t \;:=\; (\sum_{t=k}^{n} c_t)_{n\geqslant k}\ ,$$

wobei $c_t \in \mathbf{C}$ für $t \geqslant k$. Existiert ihr Grenzwert, so schreiben wir diesen

$$\textstyle\sum_{t=k}^{\infty} c_t \;:=\; \lim\limits_{n\to\infty} \sum_{t=k}^{n} c_t \;=\; c_k + c_{k+1} + c_{k+2} + \cdots\ .$$

Definition.

(1) Für $z \in \mathbf{C}$ konvergiert die Reihe $\sum_{n\geqslant 0} z^n/n!$, sodaß wir die *Exponentialfunktion* $\exp : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}$ durch

$$\mathrm{e}^z \;=\; \exp(z) \;:=\; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \;=\; 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + \frac{z^4}{24} + \cdots$$

definieren können.

Weiterhin gilt $\mathrm{e}^0 = 1$ und $\mathrm{e}^{z+w} = \mathrm{e}^z\mathrm{e}^w$ für $z,\, w \;\in\; \mathbf{C}$; vgl. §2.3.3.

(2) Für $z \in \mathbf{C}$ konvergiert die Reihe $\sum_{n\geqslant 0}(-1)^n z^{2n+1}/(2n+1)!$, sodaß wir die *Sinusfunktion* $\sin : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}$ durch

$$\sin(z) \;:=\; \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \;=\; z - \frac{z^3}{6} + \frac{z^5}{120} - \frac{z^7}{5040} + \cdots$$

definieren können.

Es ist $\sin(-z) = -\sin(z)$ für $z \in \mathbf{C}$, da nur ungerade Exponenten auftreten.

(3) Für $z \in \mathbf{C}$ konvergiert die Reihe $\sum_{n \geqslant 0} (-1)^n z^{2n}/(2n)!$, sodaß wir die *Cosinusfunktion* $\cos : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}$ durch

$$\cos(z) \;:=\; \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} \;=\; 1 - \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{24} - \frac{z^6}{720} + \cdots$$

definieren können.

Es ist $\cos(-z) = \cos(z)$ für $z \in \mathbf{C}$, da nur gerade Exponenten auftreten.

Für $z \in \mathbf{R}$ stimmen diese Funktionen mit den bekannten gleichnamigen reellen Funktionen überein; vgl. §2.3.3, §8.1, Beispiel, (3), Aufgabe 107.(1).

11.2.2 Eulersche Formel

Für $z \in \mathbf{C}$ ist

$$\begin{aligned} e^{iz} &= \textstyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iz)^n}{n!} \\ &= (\textstyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iz)^{2n}}{(2n)!}) + (\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iz)^{2n+1}}{(2n+1)!}) \\ &= (\textstyle\sum_{n=0}^{\infty} i^{2n} \frac{z^{2n}}{(2n)!}) + (\sum_{n=0}^{\infty} i \cdot i^{2n} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}) \\ &= (\textstyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}) + i\,(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}) \\ &= \cos(z) + i \sin(z) \end{aligned}$$

Hieraus folgt:

Satz (Eulersche Formel). Für $x,\, y \,\in\, \mathbf{R}$ ist

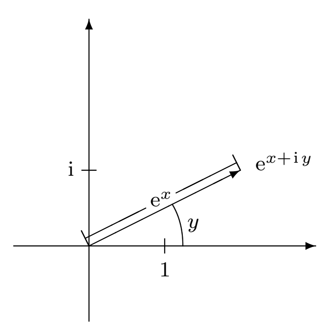
$$e^{x+iy} \;=\; e^x e^{iy} \;=\; e^x(\cos(y) + i\sin(y))\,.$$

Folglich ist

$$|e^{x+iy}| \;=\; |e^x(\cos(y){+}i\sin(y))| \;=\; |e^x||(\cos(y){+}i\sin(y))| \;=\; e^x(\cos(y)^2{+}\sin(y)^2)^{1/2} \;=\; e^x\,.$$

Ferner ist y gleich dem vom Vektor von 0 nach e^{x+iy} und der positiven reellen Achse eingeschlossenen Winkel. Denn der Cosinus dieses Winkels ist gleich $\mathrm{Re}(e^{x+iy})/|e^{x+iy}| = \cos(y)$, und der Sinus dieses Winkels ist gleich $\mathrm{Im}(e^{x+iy})/|e^{x+iy}| = \sin(y)$.

Für jedes $w \in \mathbf{C} \smallsetminus \{0\}$ gibt es eindeutig bestimmte $x \in \mathbf{R}$ und $y \in [0, 2\pi)$ mit $w = e^{x+iy}$.



Da $\mathrm{e}^{x+\mathrm{i}y} \cdot \mathrm{e}^{\tilde{x}+\mathrm{i}\tilde{y}} = \mathrm{e}^{(x+\tilde{x})+\mathrm{i}(y+\tilde{y})}$ ist für $x,\ y,\ \tilde{x},\ \tilde{y} \in \mathbf{R}$, liefert dies eine Erklärung für die bereits festgestellte Addition der mit der positiven reellen Achse eingeschlossenen Winkel bei der Multiplikation.

Beispiel.

(1) Es ist $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\pi} = \mathrm{e}^0 \cdot (\cos(\pi) + \mathrm{i}\sin(\pi)) = -1$.

(2) Es ist $\mathrm{e}^{2+\mathrm{i}\,\pi/3} = \mathrm{e}^2 \cdot (\cos(\pi/3) + \mathrm{i}\sin(\pi/3)) = \mathrm{e}^2(\frac{1}{2} + \frac{\mathrm{i}}{2}\sqrt{3}) \approx 3{,}6945 + 6{,}3991\mathrm{i}$.

Bemerkung. Für $z \in \mathbf{C}$ ist

$$\begin{array}{rcl} \cos(z) & = & \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,z} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,z}) \\ \sin(z) & = & \frac{1}{2\mathrm{i}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,z} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,z})\ . \end{array}$$

Beweis. Es ist

$$\begin{array}{rcl} \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,z} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,z}) & = & \frac{1}{2}\big((\cos(z) + \mathrm{i}\sin(z)) + (\cos(-z) + \mathrm{i}\sin(-z))\big) \\ & = & \frac{1}{2}\big((\cos(z) + \mathrm{i}\sin(z)) + (\cos(z) - \mathrm{i}\sin(z))\big) \\ & = & \cos(z)\ , \\ \frac{1}{2\mathrm{i}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,z} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,z}) & = & \frac{1}{2\mathrm{i}}\big((\cos(z) + \mathrm{i}\sin(z)) - (\cos(-z) + \mathrm{i}\sin(-z))\big) \\ & = & \frac{1}{2\mathrm{i}}\big((\cos(z) + \mathrm{i}\sin(z)) - (\cos(z) - \mathrm{i}\sin(z))\big) \\ & = & \sin(z)\ . \end{array}$$

Mit der Eulerschen Formel lassen sich auch folgende Additionsregeln herleiten.

Lemma. Es ist

$$\begin{array}{rcl} \sin(z+w) & = & \sin(z)\cos(w) + \cos(z)\sin(w) \\ \cos(z+w) & = & \cos(z)\cos(w) - \sin(z)\sin(w) \end{array}$$

für $z,\ w \in \mathbf{C}$. Siehe Aufgabe 148.(3).

11.3 Partialbruchzerlegung (allgemeiner Fall)

In §6.3.3 hatten wir Partialbruchzerlegung mit reell zerfallendem Nenner betrachtet. Dies wollen wir nun auf beliebige Nenner ausdehnen.

11.3.1 Zerlegung von Brüchen von Polynomen

Bemerkung. Sei $n \geqslant 1$. Sei $f(z) := a_n\, z^n + a_{n-1}\, z^{n-1} + \cdots + a_0\, z^0$ ein Polynom in $z \in \mathbf{C}$ mit $a_t \in \mathbf{C}$ für $0 \leqslant t \leqslant n$ und mit $a_n \neq 0$.

Es gibt ein $z_1 \in \mathbf{C}$ mit $f(z_1) = 0$.

Iteriertes Abdividieren von Nullstellen liefert daraus, daß es $z_1, \ldots, z_n \in \mathbf{C}$ gibt mit

$$f(z) \;=\; a_n(z - z_1)(z - z_2)\cdots(z - z_n)$$

für $z \in \mathbf{C}$. Es zerfällt $f(z)$ also in ein Produkt von Linearfaktoren.

Der Nachweis dieser Bemerkung, auch bekannt als Fundamentalsatz der Algebra, ist nicht ganz einfach. Für uns spielt sie nur die Rolle einer "prinzipiellen Möglichkeit", ein Polynom stets zerlegen zu können.

Sei $m \geqslant 1$. Seien $s_i \in \mathbf{C}$ für $i \in [1, m]$ gegeben mit $s_i \neq s_j$ für $i, j \in [1, m]$ mit $i \neq j$.

Sei $D := \mathbf{C} \smallsetminus \{s_1, \ldots, s_m\}$.

Seien $k_i \in \mathbf{Z}_{\geqslant 1}$ für $i \in [1, m]$.

Sei $f(x)$ ein Polynom, dessen Grad kleiner als $\sum_{i=1}^m k_i$ ist.

Wir wollen Konstanten $a_{i,j} \in \mathbf{C}$ so finden, daß

$$\frac{f(x)}{(x - s_1)^{k_1} \cdot (x - s_2)^{k_2} \cdots (x - s_m)^{k_m}} \;=\; \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{k_i} \frac{a_{i,j}}{(x - s_i)^j}$$

für alle $x \in D$.

Zur Bestimmung der $a_{i,j}$ multipliziere man beide Seiten mit $(x - s_1)^{k_1} \cdots (x - s_m)^{k_m}$ und vergleiche die Koeffizienten. Dies liefert ein lineares Gleichungssystem über $\mathbf{C}$.

In der Praxis verwendet man üblicherweise Bezeichnungen $A, B, C, \ldots$ statt der $a_{i,j}$.

Das ist wortgleich der Inhalt von §6.3.3, nur über $\mathbf{C}$ statt über $\mathbf{R}$.

11.3.2 Integration komplexwertiger Funktionen

Definition. Sei $D \subseteq \mathbf{R}$ offen. Sei $f : D \longrightarrow \mathbf{C}$ gegeben mit $\mathrm{Im} \circ f$ und $\mathrm{Re} \circ f$ stetig. Seien $a, b \in \mathbf{R}$ mit $a \leqslant b$ und $[a, b] \subseteq D$. Wir setzen

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \;:=\; \int_a^b \mathrm{Re}(f(x))\,\mathrm{d}x + \mathrm{i} \int_a^b \mathrm{Im}(f(x))\,\mathrm{d}x\;;$$

vgl. §6.1. Ist f reellwertig, so stimmt dies mit der bisherigen Definition überein.

Bemerkung. Sei $D \subseteq \mathbf{R}$ offen. Seien $f, g : D \longrightarrow \mathbf{C}$ gegeben mit $\mathrm{Im} \circ f$, $\mathrm{Re} \circ f$, $\mathrm{Im} \circ g$, $\mathrm{Re} \circ g$ stetig. Seien $a, b \in \mathbf{R}$ mit $a \leqslant b$ und $[a, b] \subseteq D$. Seien $\lambda, \mu \in \mathbf{C}$. Es ist

$$\begin{array}{rcll} \int_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x))\,\mathrm{d}x & = & \lambda \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \mu \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x & \\ |\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x| & \leqslant & \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x & \text{(Dreiecksungleichung)} \end{array}$$

Vgl. Aufgabe 151.

Bemerkung. Seien a, $b \in \mathbf{R}$ mit $a \leqslant b$. Sei $s \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$. Es ist

$$\int_a^b \mathrm{e}^{sx}\,\mathrm{d}x \;=\; [\tfrac{1}{s}\,\mathrm{e}^{sx}]_{x=a}^b \;=\; \tfrac{1}{s}(\mathrm{e}^{sb} - \mathrm{e}^{sa})\;.$$

Vgl. Aufgabe 152.(1).

Bemerkung. Seien a, $b \in \mathbf{R}$ mit $a \leqslant b$. Sei $m \in \mathbf{Z} \setminus \{-1\}$. Sei $s \in \mathbf{C}$. Falls $m \leqslant -2$, dann sei noch $s \notin [a, b]$. Es ist

$$\int_a^b (x-s)^m\,\mathrm{d}x \;=\; [\tfrac{1}{m+1}\,(x-s)^{m+1}]_{x=a}^b \;=\; \tfrac{1}{m+1}\big((b-s)^{m+1} - (a-s)^{m+1}\big)\;.$$

Denn der Realteil von $\frac{1}{m+1}\,(x-s)^{m+1}$ ist eine Stammfunktion des Realteils von $(x-s)^m$; entsprechend für den Imaginärteil.

Ein Problem stellt sich also nur bei $m = -1$. Ein komplexer Logarithmus steht uns ja nicht zur Verfügung. Oft kann man jedoch konjugierte Summanden zusammenfassen und folgende, im wesentlichen dank Substitution bzw. dank §6.2, Beispiel, (3) bekannte Bemerkung verwenden; vgl. Aufgabe 152.(2, 3).

Bemerkung. Seien a, $b \in \mathbf{R}$ mit $a \leqslant b$. Sei $s \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}$.

(1) Es ist $\int_a^b (\frac{1}{x-s} + \frac{1}{x-\bar{s}})\,\mathrm{d}x = [\ln\big((x - \mathrm{Re}(s))^2 + \mathrm{Im}(s)^2\big)]_{x=a}^b$.

(2) Es ist $\int_a^b (\frac{1}{x-s} - \frac{1}{x-\bar{s}})\,\mathrm{d}x = [2\mathrm{i}\arctan\big((x - \mathrm{Re}(s))/\,\mathrm{Im}(s)\big)]_{x=a}^b$.

11.3.3 Beispiele

Beispiel.

(1) Es wird

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/2} \mathrm{e}^x \sin(x)\,\mathrm{d}x \;&=\; \int_0^{\pi/2} \mathrm{e}^x \cdot \tfrac{1}{2\mathrm{i}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x})\,\mathrm{d}x \\
&=\; \tfrac{1}{2\mathrm{i}} \int_0^{\pi/2} (\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})x} - \mathrm{e}^{(1-\mathrm{i})x})\,\mathrm{d}x \\
&=\; \tfrac{1}{2\mathrm{i}}[\tfrac{1}{1+\mathrm{i}}\,\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})x} - \tfrac{1}{1-\mathrm{i}}\,\mathrm{e}^{(1-\mathrm{i})x}]_{x=0}^{\pi/2} \\
&=\; \tfrac{1}{2\mathrm{i}}[\tfrac{1-\mathrm{i}}{2}\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})x} - \tfrac{1+\mathrm{i}}{2}\mathrm{e}^{(1-\mathrm{i})x}]_{x=0}^{\pi/2} \\
&=\; \tfrac{1}{2\mathrm{i}}\Big(\big(\tfrac{1-\mathrm{i}}{2}\,\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})\pi/2} - \tfrac{1+\mathrm{i}}{2}\,\mathrm{e}^{(1-\mathrm{i})\pi/2}\big) - \big(\tfrac{1-\mathrm{i}}{2}\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})\cdot 0} - \tfrac{1+\mathrm{i}}{2}\mathrm{e}^{(1-\mathrm{i})\cdot 0}\big)\Big) \\
&=\; \tfrac{1}{2\mathrm{i}}\Big(\big(\tfrac{1-\mathrm{i}}{2}\,\mathrm{e}^{\pi/2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/2} - \tfrac{1+\mathrm{i}}{2}\,\mathrm{e}^{\pi/2}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/2}\big) - \big(\tfrac{1-\mathrm{i}}{2} - \tfrac{1+\mathrm{i}}{2}\big)\Big) \\
&=\; \tfrac{1}{2\mathrm{i}}\Big(\big(\tfrac{1-\mathrm{i}}{2}\,\mathrm{e}^{\pi/2}\cdot\mathrm{i} - \tfrac{1+\mathrm{i}}{2}\,\mathrm{e}^{\pi/2}\cdot(-\mathrm{i})\big) + \mathrm{i}\Big) \\
&=\; \tfrac{1}{2}\Big(\big(\tfrac{1-\mathrm{i}}{2} + \tfrac{1+\mathrm{i}}{2}\big)\mathrm{e}^{\pi/2} + 1\Big) \\
&=\; \tfrac{1}{2}(\mathrm{e}^{\pi/2} + 1) \\
&\approx\; 2{,}90523869\;.
\end{aligned}$$

(2) Wir wollen $\int_2^3 \frac{1}{x^4-1}\,\mathrm{d}x$ berechnen. Zunächst ist

$$x^4 - 1 \;=\; (x^2-1)(x^2+1) \;=\; (x-1)(x+1)(x-\mathrm{i})(x+\mathrm{i})\;.$$

Wir machen demgemäß den Ansatz

$$\frac{1}{x^4-1} \;=\; \frac{1}{(x-1)(x+1)(x-\mathrm{i})(x+\mathrm{i})} \;\stackrel{!}{=}\; \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-\mathrm{i}} + \frac{D}{x+\mathrm{i}}$$

und suchen $A, B, C, D \in \mathbf{C}$. Multiplikation mit $(x-1)(x+1)(x-\mathrm{i})(x+\mathrm{i})$ auf beiden Seiten gibt die Bedingung

$$1 \;\stackrel{!}{=}\; A(x^3+x^2+x+1) + B(x^3-x^2+x-1) + C(x^3+\mathrm{i}x^2-x-\mathrm{i}) + D(x^3-\mathrm{i}x^2-x+\mathrm{i})\;.$$

Koeffizientenvergleich gibt folgendes lineare Gleichungssystem für $\begin{pmatrix} A\\ B\\ C\\ D\end{pmatrix} \in \mathbf{C}^{4\times 1}$, welches wir sogleich umformen.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1&-1&-\mathrm{i}&\mathrm{i}&1\\ 1&1&-1&-1&0\\ 1&-1&\mathrm{i}&-\mathrm{i}&0\\ 1&1&1&1&0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1&-1&-\mathrm{i}&\mathrm{i}&1\\ 0&2&-1+\mathrm{i}&-1-\mathrm{i}&-1\\ 0&0&2\mathrm{i}&-2\mathrm{i}&-1\\ 0&2&1+\mathrm{i}&1-\mathrm{i}&-1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1&0&-\frac{1}{2}-\frac{\mathrm{i}}{2}&-\frac{1}{2}+\frac{\mathrm{i}}{2}&\frac{1}{2}\\ 0&1&-\frac{1}{2}+\frac{\mathrm{i}}{2}&-\frac{1}{2}-\frac{\mathrm{i}}{2}&-\frac{1}{2}\\ 0&0&2\mathrm{i}&-2\mathrm{i}&-1\\ 0&0&2&2&0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1&0&0&\mathrm{i}&\frac{1}{2}\\ 0&1&0&-\mathrm{i}&-\frac{1}{2}\\ 0&0&1&1&0\\ 0&0&0&-4\mathrm{i}&-1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1&0&0&0&\frac{1}{4}\\ 0&1&0&0&-\frac{1}{4}\\ 0&0&1&0&\frac{\mathrm{i}}{4}\\ 0&0&0&1&-\frac{\mathrm{i}}{4} \end{array}\right)$$

Folglich ist $A = \frac{1}{4}$, $B = -\frac{1}{4}$, $C = \frac{\mathrm{i}}{4}$, $D = -\frac{\mathrm{i}}{4}$. Es wird

$$\begin{aligned}
\int_2^3 \tfrac{1}{x^4-1}\,\mathrm{d}x &= \tfrac{1}{4}\int_2^3 \tfrac{1}{x-1}\,\mathrm{d}x - \tfrac{1}{4}\int_2^3 \tfrac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x + \tfrac{\mathrm{i}}{4}\int_2^3 \big(\tfrac{1}{x-\mathrm{i}} - \tfrac{1}{x+\mathrm{i}}\big)\,\mathrm{d}x \\
&= \tfrac{1}{4}[\ln(x-1)]_{x=2}^3 - \tfrac{1}{4}[\ln(x+1)]_{x=2}^3 + \tfrac{\mathrm{i}}{4}\big[2\mathrm{i}\arctan\big((x-\mathrm{Re}(\mathrm{i}))/\,\mathrm{Im}(\mathrm{i})\big)\big]_{x=2}^3 \\
&= \tfrac{1}{4}\ln(2) - \tfrac{1}{4}\ln(4/3) - \tfrac{1}{2}[\arctan(x)]_{x=2}^3 \\
&= \tfrac{1}{4}\ln(3/2) - \tfrac{1}{2}(\arctan(3) - \arctan(2)) \\
&\approx 0{,}0304177\;.
\end{aligned}$$

(3) Wir wollen $\int_0^1 \frac{x}{(x^2+1)^2(x+1)}\,\mathrm{d}x$ berechnen. Zunächst ist

$$(x^2+1)^2(x+1) \;=\; (x+\mathrm{i})^2(x-\mathrm{i})^2(x+1)\;.$$

Wir machen demgemäß den Ansatz

$$\frac{x}{(x^2+1)^2\,(x+1)} \;=\; \frac{x}{(x+\mathrm{i})^2\,(x-\mathrm{i})^2\,(x+1)} \;\stackrel{!}{=}\; \frac{A}{x+\mathrm{i}} + \frac{B}{(x+\mathrm{i})^2} + \frac{C}{x-\mathrm{i}} + \frac{D}{(x-\mathrm{i})^2} + \frac{E}{x+1}$$

und suchen $A, B, C, D, E \in \mathbf{C}$. Multiplikation mit $(x+\mathrm{i})^2(x-\mathrm{i})^2(x+1)$ auf beiden Seiten gibt die Bedingung

$$\begin{aligned}
x \;\stackrel{!}{=}\;& A((x^4 + (1-\mathrm{i})x^3 + (1-\mathrm{i})x^2 + (1-\mathrm{i})x - \mathrm{i})) + B(x^3 + (1-2\mathrm{i})x^2 + (-1-2\mathrm{i})x - 1) \\
+\;& C((x^4 + (1+\mathrm{i})x^3 + (1+\mathrm{i})x^2 + (1+\mathrm{i})x + \mathrm{i})) + D(x^3 + (1+2\mathrm{i})x^2 + (-1+2\mathrm{i})x - 1) \\
+\;& E(x^4 + 2x^2 + 1)\;.
\end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich gibt folgendes lineare Gleichungssystem für $\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{pmatrix} \in \mathbf{C}^{4\times 1}$, welches wir sogleich umformen.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} -\mathrm{i} & -1 & \mathrm{i} & -1 & 1 & 0 \\ 1-\mathrm{i} & -1-2\mathrm{i} & 1+\mathrm{i} & -1+2\mathrm{i} & 0 & 1 \\ 1-\mathrm{i} & 1-2\mathrm{i} & 1+\mathrm{i} & 1+2\mathrm{i} & 2 & 0 \\ 1-\mathrm{i} & 1 & 1+\mathrm{i} & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2\mathrm{i} & -1 & 1+\mathrm{i} & 0 \\ 0 & -1-2\mathrm{i} & 2\mathrm{i} & -1+2\mathrm{i} & -1+\mathrm{i} & 1 \\ 0 & 1-2\mathrm{i} & 2\mathrm{i} & 1+2\mathrm{i} & 1+\mathrm{i} & 0 \\ 0 & 1 & 2\mathrm{i} & 1 & -1+\mathrm{i} & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2\mathrm{i} & 1 & -1-\mathrm{i} & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 4\mathrm{i} & -2\mathrm{i} & 1 \\ 0 & 0 & 4+4\mathrm{i} & 4\mathrm{i} & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4\mathrm{i} & 0 & 2\mathrm{i} & 0 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & -\mathrm{i} & 1+\frac{\mathrm{i}}{2} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -\mathrm{i} & \frac{\mathrm{i}}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \mathrm{i} & -\frac{\mathrm{i}}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 2+2\mathrm{i} & -1-\mathrm{i} \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -2+2\mathrm{i} & -\mathrm{i} \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}+\mathrm{i} & -\frac{\mathrm{i}}{4} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2}-\frac{\mathrm{i}}{2} & -\frac{1}{4}+\frac{\mathrm{i}}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2}-\mathrm{i} & \frac{\mathrm{i}}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2}+\frac{\mathrm{i}}{2} & -\frac{1}{4}-\frac{\mathrm{i}}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{8} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{8}+\frac{\mathrm{i}}{8} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{8} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{8}-\frac{\mathrm{i}}{8} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{4} \end{array}\right).$$

Also ist $A = \frac{1}{8}$, $B = -\frac{1}{8} + \frac{\mathrm{i}}{8}$, $C = \frac{1}{8}$, $D = -\frac{1}{8} - \frac{\mathrm{i}}{8}$ und $E = -\frac{1}{4}$.

Somit wird

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 \frac{x}{(x^2+1)^2(x+1)}\,\mathrm{d}x \\
= \ & \int_0^1 \Big(\frac{\frac{1}{8}}{x+\mathrm{i}} + \frac{-\frac{1}{8}+\frac{\mathrm{i}}{8}}{(x+\mathrm{i})^2} + \frac{\frac{1}{8}}{x-\mathrm{i}} + \frac{-\frac{1}{8}-\frac{\mathrm{i}}{8}}{(x-\mathrm{i})^2} + \frac{-\frac{1}{4}}{x+1}\Big)\,\mathrm{d}x \\
= \ & \frac{1}{8}\int_0^1 \Big(\frac{1}{x-\mathrm{i}} + \frac{1}{x+\mathrm{i}}\Big)\,\mathrm{d}x + \big(-\tfrac{1}{8} - \tfrac{\mathrm{i}}{8}\big)\int_0^1 \frac{1}{(x-\mathrm{i})^2}\,\mathrm{d}x + \big(-\tfrac{1}{8} + \tfrac{\mathrm{i}}{8}\big)\int_0^1 \frac{1}{(x+\mathrm{i})^2}\,\mathrm{d}x - \frac{1}{4}\int_0^1 \frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x \\
= \ & \tfrac{1}{8}[\ln(x^2+1)]_{x=0}^1 + \big(-\tfrac{1}{8} - \tfrac{\mathrm{i}}{8}\big)\big[-\tfrac{1}{x-\mathrm{i}}\big]_{x=0}^1 + \big(-\tfrac{1}{8} + \tfrac{\mathrm{i}}{8}\big)\big[-\tfrac{1}{x+\mathrm{i}}\big]_{x=0}^1 - \tfrac{1}{4}[\ln(x+1)]_{x=0}^1 \\
= \ & \tfrac{1}{8}(\ln(2) - \ln(1)) + \big(-\tfrac{1}{8} - \tfrac{\mathrm{i}}{8}\big)\big(-\tfrac{1}{2} + \tfrac{\mathrm{i}}{2}\big) + \big(-\tfrac{1}{8} + \tfrac{\mathrm{i}}{8}\big)\big(-\tfrac{1}{2} - \tfrac{\mathrm{i}}{2}\big) - \tfrac{1}{4}\ln(2) \\
= \ & -\tfrac{1}{8}\ln(2) + \tfrac{1}{4} \\
\approx \ & 0{,}16335660243\,.
\end{aligned}$$

Kapitel 12

Gewöhnliche Differential- und Differenzengleichungen

12.1 Allgemeine Begriffe

Definition. Eine Gleichung, welche eine Funktion, ihre Ableitungen, sowie ihre Variablen beinhaltet, heißt *Differentialgleichung.*

Handelt es sich dabei um eine Funktion in einer Variablen, so spricht man von einer *gewöhnlichen Differentialgleichung.*

Die maximal auftretende Ableitungsordnung heißt *Ordnung* der Differentialgleichung.

Eine Funktion, welche eine gegebene Differentialgleichung erfüllt, heißt *Lösung* der Differentialgleichung.

Beispiel. Es ist

$$y'' = -y$$

eine Differentialgleichung zweiter Ordnung, wobei $y : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$, $x \longmapsto y(x)$ eine zweimal differenzierbare Funktion bezeichnet.

Es ist $y(x) = \sin(x)$ eine Lösung dieser Differentialgleichung. Denn es ist

$$y'' = (\sin(x))'' = (\cos(x))' = -\sin(x) = -y\ .$$

Es ist auch $y(x) = \cos(x)$ eine Lösung dieser Differentialgleichung.

Beispiel. Es ist

$$xy' = 2y$$

eine Differentialgleichung erster Ordnung, wobei $y : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$, $x \longmapsto y(x)$ eine differenzierbare Funktion bezeichnet.

Es ist $y(x) = x^2$ eine Lösung dieser Differentialgleichung. Denn es ist

$$xy' \;=\; x(x^2)' \;=\; x \cdot 2x \;=\; 2x^2 \;=\; 2y\;.$$

Allgemeiner ist $y = Cx^2$ eine Lösung dieser Differentialgleichung für jede Konstante $C \in \mathbf{R}$.

12.2 Separierbare Differentialgleichungen

Sei $x_0 \in \mathbf{R}$. Sei $x_0 \in D \subseteq \mathbf{R}$ ein offenes Intervall. Sei $f : D \longrightarrow \mathbf{R}\; x \longmapsto f(x)$ stetig.

Sei $y_0 \in \mathbf{R}$. Sei $y_0 \in E \subseteq \mathbf{R}$ ein offenes Intervall. Sei $g : E \longrightarrow \mathbf{R}$, $t \longmapsto g(t)$ stetig. Sei $g(t) \neq 0$ für $t \in E$.

Wir suchen eine differenzierbare Funktion $y : D \longrightarrow \mathbf{R}$, $x \longmapsto y(x)$ mit $y(x_0) = y_0$, welche

$$y'(x) \;=\; f(x) \cdot g(y(x))$$

erfüllt für $x \in D$.

Kurz, wir suchen die Lösung der Differentialgleichung erster Ordnung

$$(*) \qquad \boxed{y' \;=\; f(x) \cdot g(y)}$$

auf D unter der *Anfangswertbedingung* $y(x_0) = y_0$.

Hierbei sollte $y = y(x)$ für $x \in D$ keine Werte außerhalb von E annehmen. Da sich ohnehin am Ende eine Probe durch Einsetzen empfiehlt, fällt einem dabei auch auf, ob dies verletzt ist.

Lemma. Es sei $y(x) \in E$ für $x \in D$.

Wir setzen $F(x) := \int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$ für $x \in D$.

Wir setzen $H(w) := \int_{y_0}^{w} \frac{1}{g(t)}\,\mathrm{d}t$ für $w \in E$.

Es ist $H : E \longrightarrow \mathbf{R}$ injektiv, da $H'(w) = \frac{1}{g(w)}$ entweder stets positiv oder stets negativ ist.

Es ist $y(x)$ genau dann eine Lösung der Differentialgleichung $(*)$ mit Anfangswert $y(x_0) = y_0$, wenn

$$H(y(x)) \;=\; F(x)$$

gilt für $x \in D$.

Kennen wir eine differenzierbare Umkehrfunktion U von $H|^{H(E)}$, so kann hieraus eine Lösung

$$y(x) = U(F(x))$$

von $(*)$ gewonnen werden.

Begründung. Erfülle y die Gleichung $H(y(x)) \;=\; F(x)$. Differentiation auf beiden Seiten gibt mit der Kettenregel

$$\frac{1}{g(y(x))} \cdot y'(x) \;=\; f(x)\;,$$

also $y'(x) = f(x) \cdot g(y(x))$ für $x \in D$, d.h. $y(x)$ erfüllt $(*)$. Es ist $H(y(x_0)) = F(x_0) = 0 = H(y_0)$, dank H injektiv mithin auch $y(x_0) = y_0$.

Erfülle umgekehrt $y(x)$ die Differentialgleichung $(*)$ und sei $y(x_0) = y_0$. Wir wollen zeigen, daß $H(y(x)) - F(x)$ konstant in x ist. Da D ein Intervall ist, genügt es zu zeigen, daß die Ableitung dieser Funktion verschwindet. Aber es ist

$$(H(y(x)) - F(x))' \;=\; H'(y(x)) \cdot y'(x) - F'(x) \;=\; \frac{1}{g(y(x))} \cdot y'(x) - f(x) \;=\; \frac{y'(x) - f(x) \cdot g(y(x))}{g(y(x))} \;=\; 0$$

für $x \in D$.

Einsetzen von x_0 gibt nun, daß $H(y(x)) - F(x) = H(y(x_0)) - F(x_0) = 0 - 0 = 0$ ist für $x \in D$, wie gewünscht.

Beispiel.

(1) Wir suchen eine Funktion $y(x)$ auf $\mathbf{R}$ mit $y_0 = y(0) = 1$ bei $x_0 = 0$ und

$$y' \;=\; y\;.$$

Es ist $f(x) = 1$ und $g(y) = y$.

Es wird $F(x) = \int_{x_0}^x f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x 1\,\mathrm{d}t = x$.

Es wird $H(w) = \int_{y_0}^w \frac{1}{g(t)}\,\mathrm{d}t = \int_1^w \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \ln(w)$ auf $\mathbf{R}_{>0}$.

Aus $\ln(w) = v$ folgt $w = \mathrm{e}^v =: U(v)$.

Also ist $y(x) = U(F(x)) = \mathrm{e}^x$. Definiert ist diese Funktion auf $\mathbf{R}$, wie gewünscht.

Machen wir die Probe. Es wird $y' = (\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x = y$, wie erwartet. Ferner wird $y(x_0) = \mathrm{e}^0 = 1 = y_0$ wie erwartet.

(2) Wir suchen eine Funktion $y(x)$ auf $\mathbf{R}$ mit $y_0 = y(0) = -1$ bei $x_0 = 0$ und

$$y' \;=\; y\;.$$

Es ist $f(x) = 1$ und $g(y) = y$.

Es wird $F(x) = \int_{x_0}^x f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x 1\,\mathrm{d}t = x$.

Es wird $H(w) = \int_{y_0}^w \frac{1}{g(t)}\,\mathrm{d}t = \int_{-1}^w \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \ln(-w)$ auf $\mathbf{R}_{<0}$.

Aus $\ln(-w) = v$ folgt $w = -\mathrm{e}^v =: U(v)$.

Also ist $y(x) = U(F(x)) = -\mathrm{e}^x$. Definiert ist diese Funktion auf $\mathbf{R}$, wie gewünscht.

Machen wir die Probe. Es wird $y' = (-\mathrm{e}^x)' = -\mathrm{e}^x = y$, wie erwartet. Ferner wird $y(x_0) = -\mathrm{e}^0 = -1 = y_0$, wie erwartet.

(3) Wir suchen eine Funktion $y(x)$ auf $\mathbf{R}$ mit $y_0 = y(0) = 1$ bei $x_0 = 0$ und

$$y' \;=\; x/y^2\;.$$

Es ist $f(x) = x$ und $g(y) = y^{-2}$.

Es wird $F(x) = \int_{x_0}^x f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\,x^2$.

Es wird $H(w) = \int_{y_0}^w \frac{1}{g(t)}\,\mathrm{d}t = \int_1^w t^2\,\mathrm{d}t = \frac{1}{3}\,(w^3 - 1)$.

Aus $\frac{1}{3}\,(w^3 - 1) = v$ folgt $w = (3v + 1)^{1/3} =: U(v)$.

Also ist

$$y \;=\; y(x) \;=\; U(F(x)) \;=\; (\tfrac{3}{2}\,x^2 + 1)^{1/3}\;.$$

Definiert ist diese Funktion auf $\mathbf{R}$, wie gewünscht.

Machen wir die Probe. Es wird

$$\begin{aligned} y' &= ((\tfrac{3}{2}\,x^2 + 1)^{1/3})' \\ &= \tfrac{1}{3}(\tfrac{3}{2}\,x^2 + 1)^{-2/3} \cdot 3x \\ &= x/((\tfrac{3}{2}\,x^2 + 1)^{1/3})^2 = x/y^2\;, \end{aligned}$$

wie erwartet. Ferner wird $y(x_0) = (\frac{3}{2}\,0^2 + 1)^{1/3} = 1 = y_0$, wie erwartet.

(4) Wir suchen eine Funktion $y(x)$ mit $y_0 = y(1) = 1$ bei $x_0 = 1$ und

$$y' \;=\; y/x^2$$

auf einem offenen Intervall, das $x_0 = 1$ enthält.

Es ist $f(x) = x^{-2}$ und $g(y) = y$.

Es wird $F(x) = \int_{x_0}^x f(t)\,\mathrm{d}t = \int_1^x t^{-2}\,\mathrm{d}t = 1 - x^{-1}$.

Es wird $H(w) = \int_{y_0}^w \frac{1}{g(t)}\,\mathrm{d}t = \int_1^w t^{-1}\,\mathrm{d}t = \ln(w)$.

Aus $\ln(w) = v$ folgt $w = \mathrm{e}^v =: U(v)$.

Aufgelöst nach y wird

$$y \;=\; y(x) \;=\; U(F(x)) \;=\; \mathrm{e}^{1-x^{-1}}\;.$$

Definiert ist diese Funktion auf dem offenen Intervall $(0, \infty)$, welches $x_0 = 1$ enthält.

Machen wir die Probe. Es wird

$$\begin{aligned} y' &= (\mathrm{e}^{1-x^{-1}})' \\ &= x^{-2}\,\mathrm{e}^{1-x^{-1}} \\ &= y/x^2\;, \end{aligned}$$

wie erwartet. Ferner wird $y(x_0) = \mathrm{e}^{1-1^{-1}} = \mathrm{e}^0 = 1 = y_0$, wie erwartet.

Wer keine Probe macht, ist selbst schuld.

12.3 Lineare Differentialgleichungen erster Ordnung

Sei $D \subseteq \mathbf{R}$ ein offenes Intervall. Sei $x_0 \in D$. Sei $y_0 \in \mathbf{R}$.

Sei $a : D \longrightarrow \mathbf{R},\ x \longmapsto a(x)$ und $b : D \longrightarrow \mathbf{R},\ x \longmapsto b(x)$ stetige Funktionen.

Wir suchen eine differenzierbare Funktionen $y : D \longrightarrow \mathbf{R},\ x \longmapsto y(x)$ mit $y(x_0) = y_0$, welche

$$y'(x) \ = \ a(x)y(x) + b(x)$$

erfüllt für $x \in D$.

Kurz, wir suchen die Lösung der linearen Differentialgleichung erster Ordnung

$$(**) \qquad \boxed{y' \ = \ a(x)y + b(x)}$$

auf D unter der Anfangswertbedingung $y(x_0) = y_0$.

Ist $b(x) = 0$ für alle $x \in D$, so nennt man $(**)$ *homogen,* ansonsten *inhomogen.*

Setze

$$A(x) \ := \ \int_{x_0}^{x} a(t)\,\mathrm{d}t$$

für $x \in D$.

Lemma. Ist speziell $b(x) = 0$ für $x \in D$, sind wir also im homogenen Fall, so ist die Lösung der Differentialgleichung $(**)$ unter der Anfangswertbedingung $y(x_0) = y_0$ eindeutig gegeben durch

$$y(x) \ := \ \mathrm{e}^{A(x)} y_0$$

für $x \in D$.

Bemerkung. Im homogenen Fall liegt eine separierbare Differentialgleichung vor, wie in §12.2 behandelt. Das dortige Verfahren führt für $y_0 \neq 0$ auch auf die hier gegebene Lösung.

Setze

$$F(x) \ := \ \int_{x_0}^{x} b(t)\,\mathrm{e}^{-A(t)}\,\mathrm{d}t$$

für $x \in D$.

Lemma. Die Lösung der Differentialgleichung $(**)$ unter der Anfangswertbedingung $y(x_0) = y_0$ ist eindeutig gegeben durch

$$y(x) \ := \ \mathrm{e}^{A(x)}(F(x) + y_0)$$

für $x \in D$. Vgl. Aufgabe 165.(1).

Bemerkung. Wir erkennen, daß im homogenen Fall jede Lösung der Differentialgleichung $(**)$ von der Form $C\,\mathrm{e}^{A(x)}$ ist für eine Konstante $C \in \mathbf{R}$. Die Menge ihrer Lösungen ist also der eindimensionale Unterraum

$$\langle \mathrm{e}^{A(x)} \rangle \;\subseteq\; \mathbf{R}^D \;,$$

wobei $\mathbf{R}^D$ den Raum der reellwertigen Funktionen auf D bezeichnet; vgl. §5.4.1, Beispiel, (2). In anderen Worten, es ist $(\mathrm{e}^{A(x)})$ eine (einelementige) Basis des Lösungsraums $\langle \mathrm{e}^{A(x)} \rangle$.

Im inhomogenen Fall kommt noch ein Summand hinzu.

Ähnlich also wie bei linearen Gleichungssystemen; vgl. §5.3.

Beispiel.

(1) Sei $D = \mathbf{R}_{>0}$. Wir suchen eine Funktion $y(x)$ auf $\mathbf{R}_{>0}$ mit $y_0 = y(1) = 2$ bei $x_0 = 1$ und

$$y' \;=\; x^{-1}y + x^2 \;.$$

Es ist $a(x) = x^{-1}$ und $b(x) = x^2$.

Es ist $A(x) = \int_1^x t^{-1}\,\mathrm{d}t = \ln(x)$.

Es ist $F(x) = \int_1^x t^2\,\mathrm{e}^{-\ln(t)}\,\mathrm{d}t = \int_1^x t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}(x^2-1)$.

Als Lösung erhalten wir also

$$y(x) \;=\; \mathrm{e}^{\ln(x)}(\tfrac{1}{2}(x^2-1)+2) \;=\; \tfrac{1}{2}\,x^3 + \tfrac{3}{2}\,x \;.$$

Machen wir die Probe. Es ist $y(1) = \frac{1}{2}\,1^3 + \frac{3}{2}\,1 = 2$. Es wird $y'(x) = \frac{3}{2}\,x^2 + \frac{3}{2} = x^{-1}y(x) + x^2$, wie erwartet.

(2) Sei $D = \mathbf{R}$. Wir suchen eine Funktion $y(x)$ auf $\mathbf{R}_{>0}$ mit $y_0 = y(1) = 0$ bei $x_0 = 1$ und

$$y' \;=\; xy + x \;.$$

Es ist $a(x) = x$ und $b(x) = x$.

Es ist $A(x) = \int_1^x t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\,x^2 - \frac{1}{2}$.

Es ist $F(x) = \int_1^x t\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}t \overset{u\,=\,\frac{1}{2}t^2-\frac{1}{2}}{=} \int_0^{\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}} \mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u = 1 - \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}}$; vgl. §6.3.1.

Als Lösung erhalten wir also

$$y(x) \;=\; \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}}(1-\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}}) \;=\; \mathrm{e}^{(x^2-1)/2} - 1 \;.$$

Machen wir die Probe. Es ist $y(1) = \mathrm{e}^{(1^2-1)/2} - 1 = 0$. Es wird $y'(x) = x\,\mathrm{e}^{(x^2-1)/2} = x(\mathrm{e}^{(x^2-1)/2} - 1) + x = xy(x) + x$, wie erwartet.

12.4 Lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

12.4.1 Allgemeine Problemstellung

Sei $D \subseteq \mathbf{R}$ ein offenes Intervall. Sei $x_0 \in D$. Seien y_0, $y'_0 \in \mathbf{R}$.

Sei $a \in \mathbf{R}$. Sei $b \in \mathbf{R}$.

Sei $c : D \longrightarrow \mathbf{R}$, $x \longmapsto c(x)$ eine stetige Funktion.

Wir suchen eine zweimal differenzierbare Funktion $y : D \longrightarrow \mathbf{R}$, $x \longmapsto y(x)$ mit $y(x_0) = y_0$ und $y'(x_0) = y'_0$, welche

$$y''(x) + 2ay'(x) + by(x) = c(x)$$

erfüllt für $x \in D$.

Kurz, wir suchen die Lösung der Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$(***) \qquad \boxed{y'' + 2ay' + by \;=\; c(x)}$$

auf D unter den Anfangswertbedingungen $y(x_0) = y_0$ und $y'(x_0) = y'_0$.

Ist $c(x) = 0$ für alle $x \in D$, so nennt man $(***)$ *homogen,* ansonsten *inhomogen.*

Vorsicht, der Faktor 2 im Summanden $2ay'$ darf nicht vergessen werden.

12.4.2 Der homogene Fall

Sei $D = \mathbf{R}$. Sei $c(x) = 0$ für alle $x \in \mathbf{R}$ in der Situation von §12.4.1. Wir befinden uns also im homogenen Fall.

Lemma. Wir erinnern daran, daß nun $c(x) = 0$ ist für alle $x \in \mathbf{R}$.

(1) *Fall* $a^2 > b$. Schreibe $v := \sqrt{a^2 - b} \in \mathbf{R}_{>0}$. Für r, $s \in \mathbf{R}$ ist

$$y(x) \;:=\; \mathrm{e}^{-ax}(r\,\mathrm{e}^{vx} + s\,\mathrm{e}^{-vx})$$

eine Lösung von $(***)$ auf $\mathbf{R}$, und jede ihrer Lösungen ist von dieser Form.

(2) *Fall* $a^2 < b$. Schreibe $w := \sqrt{b - a^2} \in \mathbf{R}_{>0}$. Für r, $s \in \mathbf{R}$ ist

$$y(x) \;:=\; \mathrm{e}^{-ax}(r\sin(wx) + s\cos(wx))$$

eine Lösung von $(***)$ auf $\mathbf{R}$, und jede ihrer Lösungen ist von dieser Form.

(3) *Fall* $a^2 = b$. Für $r,\ s\ \in\ \mathbf{R}$ ist

$$y(x)\ :=\ \mathrm{e}^{-ax}(r+sx)$$

eine Lösung von $(***)$ auf $\mathbf{R}$, und jede ihrer Lösungen davon ist von dieser Form.

In jedem Fall stellen die beiden Anfangswertbedingungen nach Einsetzen von x_0 ein lineares Gleichungssystem in den zu bestimmenden konstanten Größen r und s dar; vgl. §5.3.

Komplexe Zahlen helfen hier beim Verständnis.

Von vorneherein sieht man, daß Linearkombinationen mit konstanten Koeffizienten von Lösungen von $(***)$ wieder Lösungen davon sind.

Setzen wir $y(x) = \mathrm{e}^{\lambda x}$ an und fragen, ob es ein $\lambda \in \mathbf{C}$ so gibt, daß $y'' + 2ay' + by = 0$, dann erhalten wir $(\lambda^2 + 2a\lambda + b)\,\mathrm{e}^{\lambda x} = 0$, woraus $\lambda = -a \pm \sqrt{a^2 - b}$ folgt.

Falls $a^2 > b$, so schreibe $v := \sqrt{a^2 - b} \in \mathbf{R}_{>0}$. Es sind $\mathrm{e}^{(-a+v)x}$ und $\mathrm{e}^{(-a-v)x}$ Lösungen.

Falls $a^2 < b$, so schreibe $w := \sqrt{b - a^2} \in \mathbf{R}_{>0}$. Es sind $\mathrm{e}^{(-a+\mathrm{i}w)x}$ und $\mathrm{e}^{(-a-\mathrm{i}w)x}$ komplexwertige Lösungen. Da nun Linearkombinationen von Lösungen wieder Lösungen sind, sind auch

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2\mathrm{i}}(\mathrm{e}^{(-a+\mathrm{i}w)x} - \mathrm{e}^{(-a-\mathrm{i}w)x}) &= \mathrm{e}^{-ax}\sin(wx) \\ \tfrac{1}{2}(\mathrm{e}^{(-a+\mathrm{i}w)x} + \mathrm{e}^{(-a-\mathrm{i}w)x}) &= \mathrm{e}^{-ax}\cos(wx) \end{aligned}$$

Lösungen; vgl. §11.2.2. Letztere sind reell, wie gesucht.

Falls $a^2 = b$, so ist e^{-ax} eine Lösung. Mit etwas Glück sieht man die weitere Lösung $x\,\mathrm{e}^{-ax}$.

Vgl. Aufgabe 165.(2).

Beispiel. Wir lösen

$$y'' + y' + y\ =\ 0$$

auf $\mathbf{R}$ unter den Anfangswertbedingungen $y_0 = 0$ und $y_0' = 1$ bei $x_0 = 0$.

Da $y'' + y' + y = y'' + 2(1/2)y' + y$ ist, ist $a = \frac{1}{2}$ und $b = 1$; vgl. $(***)$. Somit ist $a^2 = \frac{1}{4} < 1 = b$ und wir befinden uns im zweiten Fall des Lemmas. Es ist $w = \sqrt{b - a^2} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$. Wir suchen also Konstanten $r,\ s\ \in\ \mathbf{R}$ so, daß die Funktion

$$y(x)\ =\ \mathrm{e}^{-x/2}(r\sin(\tfrac{x\sqrt{3}}{2}) + s\cos(\tfrac{x\sqrt{3}}{2}))$$

die Anfangsbedingungen erfüllt. Halten wir dazu zunächst fest, daß

$$y'(x)\ =\ -\tfrac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-x/2}(r\sin(\tfrac{x\sqrt{3}}{2}) + s\cos(\tfrac{x\sqrt{3}}{2})) + \tfrac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{e}^{-x/2}(r\cos(\tfrac{x\sqrt{3}}{2}) - s\sin(\tfrac{x\sqrt{3}}{2}))\ .$$

Also

$$\begin{aligned} y(x_0) &= \mathrm{e}^{-0/2}(r\sin(\tfrac{0}{2}\sqrt{3}) + s\cos(\tfrac{0}{2}\sqrt{3})) \\ &= s \\ &\overset{!}{=} 0 \\ y'(x_0) &= -\tfrac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-0/2}(r\sin(\tfrac{0\sqrt{3}}{2}) + s\cos(\tfrac{0\sqrt{3}}{2})) + \tfrac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{e}^{-0/2}(r\cos(\tfrac{0\sqrt{3}}{2}) - s\sin(\tfrac{0\sqrt{3}}{2})) \\ &= -\tfrac{1}{2}\,s + \tfrac{\sqrt{3}}{2}\,r \\ &\overset{!}{=} 1\ . \end{aligned}$$

Auch ohne Verfahren erkennt man, daß $s = 0$ und $r = \frac{2}{3}\sqrt{3}$ zu sein hat. Dies gibt die Lösung

$$y(x) \;=\; \tfrac{2\sqrt{3}}{3}\,\mathrm{e}^{-x/2}\sin(\tfrac{x\sqrt{3}}{2})$$

der gegebenen Differentialgleichung unter den gegebenen Anfangswertbedingungen.

Zur Probe setze man ein.

12.4.3 Der inhomogene Fall

Nun ist $c(x)$ beliebig vorgegeben in der Situation von §12.4.1. Wähle eine Lösung $\hat{u}(x)$ der *zugehörigen homogenen Differentialgleichung* $u'' + 2au' + bu = 0$ derart, daß $\hat{u}(x) \neq 0$ für alle $x \in D$; vgl. §12.4.2.

Im Falle $a^2 < b$ wähle man dabei die (eigentlich nicht zu betrachtende) komplexe Lösung $\hat{u}(x) = \mathrm{e}^{(\mathrm{i}w-a)x} = \mathrm{e}^{-ax}(\cos(wx) + \mathrm{i}\sin(wx))$, wobei $w = \sqrt{b-a^2}$, und verwende am Ende, daß der Realteil der so gefundenen Lösung ebenfalls eine Lösung ist; vgl. §11.2.2.

Auch in den anderen beiden Fällen empfiehlt es sich, dabei eine Exponentialfunktion mit entsprechendem Exponenten zu wählen.

Setze

$$G(x) \;:=\; \int_{x_0}^{x} c(t)\,\hat{u}(t)\,\mathrm{e}^{2at}\,\mathrm{d}t\ .$$

für $x \in D$. Es darf $G(x)$ noch durch Addition einer Konstanten abgeändert werden.

Setze

$$H(x) \;:=\; \int_{x_0}^{x} \hat{u}(t)^{-2}\,\mathrm{e}^{-2at}\,G(t)\,\mathrm{d}t\ .$$

für $x \in D$. Es darf $H(x)$ noch durch Addition einer Konstanten abgeändert werden.

Lemma. Wir erinnern daran, daß nun $c(x)$ beliebig vorgegeben ist.

(1) *Fall* $a^2 > b$. Schreibe $v := \sqrt{a^2 - b} \in \mathbf{R}_{>0}$. Für $r,\ s\ \in\ \mathbf{R}$ ist

$$y(x) \;:=\; \mathrm{e}^{-ax}(r\,\mathrm{e}^{vx} + s\,\mathrm{e}^{-vx}) + \hat{u}(x)H(x)$$

eine Lösung von $(***)$ auf D, und jede ihrer Lösungen ist von dieser Form.

(2) *Fall* $a^2 < b$. Schreibe $w := \sqrt{b - a^2} \in \mathbf{R}_{>0}$. Für $r,\ s\ \in\ \mathbf{R}$ ist

$$y(x) \;:=\; \mathrm{e}^{-ax}(r\sin(wx) + s\cos(wx)) + \hat{u}(x)H(x)$$

eine Lösung von $(***)$ auf D, und jede ihrer Lösungen ist von dieser Form.

(3) *Fall* $a^2 = b$. Für $r,\ s\ \in\ \mathbf{R}$ ist

$$y(x) \;:=\; \mathrm{e}^{-ax}(r + sx) + \hat{u}(x)H(x)$$

eine Lösung von $(***)$ auf D, und jede ihrer Lösungen ist von dieser Form.

In jedem Fall stellen die beiden Anfangswertbedingungen nach Einsetzen von x_0 ein lineares Gleichungssystem in den zu bestimmenden Größen r und s dar; vgl. §5.3.

Auf $H(x)$ kommt man durch den Ansatz, eine Lösung der Form $\hat{u}(x)H(x)$ zu suchen. Dies führt auf die Bedingung $H'' = -(2\frac{\hat{u}'}{\hat{u}} + a)H' + \frac{c}{\hat{u}}$, welche nach Substitution $h = H'$ zur linearen Differentialgleichung erster Ordnung $h' = -(2\frac{\hat{u}'}{\hat{u}} + a)h + \frac{c}{\hat{u}}$ wird, die mit dem Verfahren aus §12.3 gelöst werden kann. Aus h gewinnt man dann H durch Bilden einer Stammfunktion.

Vgl. Aufgabe 170.(1).

Bemerkung. Wir erkennen, daß im homogenen Fall die Menge der Lösungen von $(***)$ ein zweidimensionaler Unterraum des Raums aller Funktionen auf D ist, nämlich, in den Bezeichnungen des Lemmas,

$$\begin{array}{lcll} \langle \mathrm{e}^{(v-a)x},\, \mathrm{e}^{(-v-a)x} \rangle & \subseteq & \mathbf{R}^D & \text{falls } a^2 > b \\ \langle \mathrm{e}^{-ax}\sin(wx),\, \mathrm{e}^{-ax}\cos(wx) \rangle & \subseteq & \mathbf{R}^D & \text{falls } a^2 < b \\ \langle \mathrm{e}^{-ax},\, x\,\mathrm{e}^{-ax} \rangle & \subseteq & \mathbf{R}^D & \text{falls } a^2 = b\,; \end{array}$$

vgl. §5.4.1, Beispiel, (2). In anderen Worten, es bilden jeweils die beiden angeführten Funktionen eine (zweielementige) Basis des Lösungsraums.

Im inhomogenen Fall kommt noch ein Summand hinzu.

Wiederum ähnlich also wie bei linearen Gleichungssystemen; vgl. §5.3.

Beispiel. Wir lösen

$$y'' + y' + y \;=\; x$$

unter den Anfangswertbedingungen $y_0 = 1$ und $y_0' = 1$ bei $x_0 = 0$ in einem offenen Intervall, das 0 enthält. Es ist also $a = \frac{1}{2}$, $b = 1$ und $c(x) = x$.

Im Beispiel in §12.4.2 haben wir den linearen Fall gelöst. Eine (eigentlich nicht betrachtete komplexe) Lösung von $u'' + u' + u = 0$ ist

$$\hat{u}(x) \;=\; \mathrm{e}^{(-\frac{1}{2}+\frac{\mathrm{i}\sqrt{3}}{2})x}\,.$$

Mit ihr wird

$$\begin{array}{rcl} G(x) & = & \int_{x_0}^{x} c(t)\,\hat{u}(t)\,\mathrm{e}^{2at}\,\mathrm{d}t \\ & = & \int_0^x t\,\mathrm{e}^{(\frac{1}{2}+\frac{\mathrm{i}\sqrt{3}}{2})t}\,\mathrm{d}t \\ & = & [t\,(\frac{1}{2}-\frac{\mathrm{i}\sqrt{3}}{2})\,\mathrm{e}^{(\frac{1}{2}+\frac{\mathrm{i}\sqrt{3}}{2})t}]_{t=0}^{x} - \int_0^x (\frac{1}{2}-\frac{\mathrm{i}\sqrt{3}}{2})\,\mathrm{e}^{(\frac{1}{2}+\frac{\mathrm{i}\sqrt{3}}{2})t}\,\mathrm{d}t \\ & = & x\,(\frac{1}{2}-\frac{\mathrm{i}\sqrt{3}}{2})\,\mathrm{e}^{(\frac{1}{2}+\frac{\mathrm{i}\sqrt{3}}{2})x} + (\frac{1}{2}+\frac{\mathrm{i}\sqrt{3}}{2})(\mathrm{e}^{(\frac{1}{2}+\frac{\mathrm{i}\sqrt{3}}{2})x} - 1)\,; \end{array}$$

vgl. §6.3.2.

Wir ändern noch durch Addition einer Konstanten ab zu

$$G(x) \;=\; (x\,(\tfrac{1}{2} - \tfrac{\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}) + (\tfrac{1}{2} + \tfrac{\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}))\,\mathrm{e}^{(\frac{1}{2}+\frac{\mathrm{i}\sqrt{3}}{2})x}\;.$$

Es wird

$$\begin{array}{rcl}
H(x) & = & \int_{x_0}^x \hat{u}(t)^{-2}\,\mathrm{e}^{-2at}\,G(t)\,\mathrm{d}t \\
& = & \int_0^x \mathrm{e}^{1-\mathrm{i}\sqrt{3}t}\,\mathrm{e}^{-t}(t\,(\tfrac{1}{2} - \tfrac{\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}) + (\tfrac{1}{2} + \tfrac{\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}))\,\mathrm{e}^{(\frac{1}{2}+\frac{\mathrm{i}\sqrt{3}}{2})t}\,\mathrm{d}t \\
& = & \int_0^x (t\,(\tfrac{1}{2} - \tfrac{\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}) + (\tfrac{1}{2} + \tfrac{\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}))\,\mathrm{e}^{(\frac{1}{2}-\frac{\mathrm{i}\sqrt{3}}{2})x}\,\mathrm{d}t \\
& = & [(t\,(\tfrac{1}{2} - \tfrac{\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}) + (\tfrac{1}{2} + \tfrac{\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}))(\tfrac{1}{2} + \tfrac{\mathrm{i}\sqrt{3}}{2})\,\mathrm{e}^{(\frac{1}{2}-\frac{\mathrm{i}\sqrt{3}}{2})t}]_{t=0}^x \\
& & -\int_0^x (\tfrac{1}{2} - \tfrac{\mathrm{i}\sqrt{3}}{2})(\tfrac{1}{2} + \tfrac{\mathrm{i}\sqrt{3}}{2})\,\mathrm{e}^{(\frac{1}{2}-\frac{\mathrm{i}\sqrt{3}}{2})x}\,\mathrm{d}t \\
& = & [(t + (-\tfrac{1}{2} + \tfrac{\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}))\,\mathrm{e}^{(\frac{1}{2}-\frac{\mathrm{i}\sqrt{3}}{2})t}]_{t=0}^x \\
& & -\int_0^x \mathrm{e}^{(\frac{1}{2}-\frac{\mathrm{i}\sqrt{3}}{2})t}\,\mathrm{d}t \\
& \overset{\text{b.a. Konst.}}{=} & (x + (-\tfrac{1}{2} + \tfrac{\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}))\,\mathrm{e}^{(\frac{1}{2}-\frac{\mathrm{i}\sqrt{3}}{2})x} \\
& & -(\tfrac{1}{2} + \tfrac{\mathrm{i}\sqrt{3}}{2})\,\mathrm{e}^{(\frac{1}{2}-\frac{\mathrm{i}\sqrt{3}}{2})x} \\
& = & (x + (-\tfrac{1}{2} + \tfrac{\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}))\,\mathrm{e}^{(\frac{1}{2}-\frac{\mathrm{i}\sqrt{3}}{2})x} \\
& & -(\tfrac{1}{2} + \tfrac{\mathrm{i}\sqrt{3}}{2})\,\mathrm{e}^{(\frac{1}{2}-\frac{\mathrm{i}\sqrt{3}}{2})x} \\
& = & (x-1)\,\mathrm{e}^{(\frac{1}{2}-\frac{\mathrm{i}\sqrt{3}}{2})x}\;.
\end{array}$$

vgl. §6.3.2. Also wird

$$\begin{array}{rcl}
y(x) & = & \mathrm{e}^{-ax}(r\sin(wx) + s\cos(wx)) + \hat{u}(x)H(x) \\
& = & \mathrm{e}^{-x/2}(r\sin(\tfrac{x\sqrt{3}}{2}) + s\cos(\tfrac{x\sqrt{3}}{2})) + (x-1)
\end{array}$$

für gewisse $r,\ s\ \in\ \mathbf{R}$. Es ist

$$y'(x) \;=\; -\tfrac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-x/2}(r\sin(\tfrac{x\sqrt{3}}{2}) + s\cos(\tfrac{x\sqrt{3}}{2})) + \tfrac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{e}^{-x/2}(r\cos(\tfrac{x\sqrt{3}}{2}) - s\sin(\tfrac{x\sqrt{3}}{2})) + 1\;.$$

Die Anfangswertbedingung $y(x_0) = y(0) = 1 = y_0$ gibt $t = 2$. Die Anfangswertbedingung $y'(x_0) = y'(0) = 1 = y'_0$ gibt dann $s = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Insgesamt erhalten wir als Lösung

$$y(x) \;=\; \mathrm{e}^{-x/2}(\tfrac{2\sqrt{3}}{3}\sin(\tfrac{x\sqrt{3}}{2}) + 2\cos(\tfrac{x\sqrt{3}}{2})) + (x-1)$$

auf $\mathbf{R}$.

Bemerkung.

Noch ein paar Tricks zum Auffinden einer Lösung von $(***)$. Ist $c(x)$ in der folgenden Auflistung enthalten, so braucht man G und H nicht zu bestimmen, sondern kann vorgehen wie im folgenden angegeben. Das ist in der Regel eine erhebliche Erleichterung.

Hat man eine Lösung $\hat{y}(x)$ von $y'' + 2ay' + by = c(x)$ bestimmt, so ist jede Lösung davon von der Form $\hat{y}(x) + u(x)$, wobei $u'' + 2au' + bu = 0$.

In anderen Worten, wir müssen uns nur eine Lösung von $(***)$ beschaffen, die übrigen erhalten wir durch Addition der allgemeinen Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung aus dem Lemma aus §12.4.2.

(1) Sei $n \in \mathbf{Z}_{\geqslant 1}$. Ist $c(x)$ ein Polynom von Grad $\leqslant n$, so suche man eine Lösung $\hat{y}(x)$ von $(***)$, die ebenfalls ein Polynom von Grad $\leqslant n$ ist. Um dessen Koeffizienten zu bestimmen, setze man ein beliebiges solches Polynom in die Differentialgleichung ein und vergleiche Koeffizienten.

(2) Sei $c(x) = \mu\, \mathrm{e}^{\lambda x}$ für gewisse $\lambda,\ \mu \in \mathbf{C}$.

Falls $\lambda^2 + 2a\lambda + b \neq 0$ ist, dann suche man eine Lösung $\hat{y}(x)$ von $(***)$ der Form $\nu\, \mathrm{e}^{\lambda x}$ mit $\nu \in \mathbf{C}$, welches durch Einsetzen dieses Ansatzes in die Differentialgleichung bestimmt wird.

Falls $\lambda^2 + 2a\lambda + b = 0$, aber $\lambda + a \neq 0$ ist, dann suche man eine Lösung $\hat{y}(x)$ von $(***)$ der Form $\nu x\, \mathrm{e}^{\lambda x}$ mit $\nu \in \mathbf{C}$, welches durch Einsetzen dieses Ansatzes in die Differentialgleichung bestimmt wird.

Falls $\lambda^2 + 2a\lambda + b = 0$ und $\lambda + a = 0$ ist, dann suche man eine Lösung $\hat{y}(x)$ von $(***)$ der Form $\nu x^2\, \mathrm{e}^{\lambda x}$ mit $\nu \in \mathbf{C}$, welches durch Einsetzen dieses Ansatzes in die Differentialgleichung bestimmt wird.

(3) Sei $c(x) = \mu \cos(\lambda x) + \mu' \sin(\lambda x)$ für gewisse $\lambda,\ \mu,\ \mu' \in \mathbf{R}$. Man löse Cosinus und Sinus auf mittels der Eulerschen Formel aus der Bemerkung aus §11.2.2, wende (2) auf alle entstandenen Summanden an und addiere die erhaltenen Lösungen zu einer Lösung $\hat{y}(x)$ von $(***)$; vgl. Bemerkung aus §11.2.2.

(4) Ist $c(x)$ eine Summe von Funktionen wie in $(1,2,3)$, so suche man Lösungen für die Summanden als rechte Seiten einzeln und addiere diese dann zu einer Lösung $\hat{y}(x)$ von $(***)$.

Beispiel. Im vorigen Beispiel $y'' + y' + y = x$ war $c(x) = x$ ein Polynom von Grad $\leqslant 1$. Wir suchen also eine Lösung von $y'' + y' + y = x$ von der Form $\hat{y}(x) = \lambda x + \mu$ für gewisse $\lambda,\ \mu \in \mathbf{R}$. Einsetzen gibt die Bedingung

$$x \overset{!}{=} (\lambda x + \mu)'' + (\lambda x + \mu)' + (\lambda x + \mu) \ = \ \lambda x + (\lambda + \mu)\ .$$

Koeffizientenvergleich bei x^0 und x^1 führt auf das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 1 &= \lambda \\ 0 &= \lambda + \mu \end{aligned}$$

mit der Lösung $\lambda = 1$ und $\mu = -1$. Dies gibt die Lösung $\hat{y}(x) = x - 1$. Also ist jede Lösung von $y'' + y' + y = x$ von der Form

$$y(x) \ = \ \underbrace{(x-1)}_{\hat{y}(x)} + \underbrace{\mathrm{e}^{-x/2}(r \sin(\tfrac{x\sqrt{3}}{2}) + s \cos(\tfrac{x\sqrt{3}}{2}))}_{u(x)}$$

für gewisse r, $s \in \mathbf{R}$, unter Verwendung der allgemeinen Lösung $u(x)$ der zugehörigen homogenen Differentialgleichung aus Beispiel aus §12.4.2.

Nun können r und s noch durch Einsetzen der Anfangswertbedingungen bestimmt werden, wie dies bereits im vorangegangenen Beispiel geschah. Man vergleiche auch den jeweilig betriebenen Aufwand.

12.5 Etwas zu linearen Differenzengleichungen

12.5.1 Lineare Differenzengleichungen erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Seien a, b, $c \in \mathbf{R}$ gegeben, wobei $c \neq 0$.

Wir suchen alle reellen Folgen $(x_n)_{n\geqslant 0}$, für die

$$x_{n+1} \;=\; ax_n + bc^n$$

ist für alle $n \in \mathbf{Z}_{\geqslant 0}$.

Lemma.

(1) Ist $a \neq c$, dann ist jede Lösung von der Form

$$(x_n)_{n\geqslant 0} \;=\; (\tfrac{b}{c-a}\, c^n + ra^n)_{n\geqslant 0}$$

mit $r \in \mathbf{R}$. Ist der Anfangswert x_0 vorgegeben, so wird $r = x_0 - \frac{b}{c-a}$.

(2) Ist $a = c$, dann ist jede Lösung von der Form

$$(x_n)_{n\geqslant 0} \;=\; ((bn + ra)a^{n-1})_{n\geqslant 0}$$

mit $r \in \mathbf{R}$. Ist der Anfangswert x_0 vorgegeben, so wird $r = x_0$.

Vgl. Aufgabe 170.(2).

Beispiel. Wir suchen die reelle Folge $(x_n)_{n\geqslant 0}$ mit $x_{n+1} \;=\; 2x_n + 3^n$ für $n \geqslant 0$ und $x_0 = 0$. Es ist $a = 2$, $b = 1$ und $c = 3$. Also sind wir in Fall (1). Wir erhalten $r = -\frac{b}{c-a} = -1$ und also

$$x_n \;=\; \tfrac{b}{c-a}\, c^n + ra^n \;=\; 3^n - 2^n$$

für $n \geqslant 0$, also $(x_n)_{n\geqslant 0} = (0, 1, 5, 19, \ldots)$.

12.5.2 Lineare Differenzengleichungen zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Seien a, b, c, $d \in \mathbf{R}$ gegeben, wobei $d \neq 0$.

Wir suchen alle reellen Folgen $(x_n)_{n\geqslant 0}$, für die

$$x_{n+2} \;=\; 2ax_{n+1} + bx_n + cd^n$$

ist für alle $n \in \mathbf{Z}_{\geqslant 0}$.

Sei $\lambda_1 := a + \sqrt{a^2+b} \in \mathbf{C}$ und $\lambda_2 := a - \sqrt{a^2+b} \in \mathbf{C}$, wobei $\sqrt{-t} = \mathrm{i}\sqrt{t}$ für $t \in \mathbf{R}_{>0}$.

Lemma.

(1) Falls $a^2 + b \neq 0$ und $d^2 - 2ad - b \neq 0$, dann ist jede Lösung von der Form

$$(x_n)_{n\geqslant 0} \;=\; \left(\tfrac{c}{d^2-2ad-b}\, d^n + r\lambda_1^n + s\lambda_2^n\right)_{n\geqslant 0}$$

mit r, $s \in \mathbf{C}$.

(2) Falls $a^2 + b \neq 0$ und $d^2 - 2ad - b = 0$, dann ist $d \neq a$, und jede Lösung ist von der Form

$$(x_n)_{n\geqslant 0} \;=\; \left(\tfrac{c}{2(d-a)}\, nd^{n-1} + r\lambda_1^n + s\lambda_2^n\right)_{n\geqslant 0}$$

mit r, $s \in \mathbf{C}$.

(3) Falls $a^2 + b = 0$ und $d \neq a$, dann ist jede Lösung von der Form

$$(x_n)_{n\geqslant 0} \;=\; \left(\tfrac{c}{(d-a)^2}\, d^n + ra^n + sna^n\right)_{n\geqslant 0}$$

mit r, $s \in \mathbf{R}$.

(4) Falls $a^2 + b = 0$ und $d = a$, dann ist $a \neq 0$ und jede Lösung ist von der Form

$$(x_n)_{n\geqslant 0} \;=\; \left(\tfrac{c}{2}\, n^2a^{n-2} + ra^n + sna^n\right)_{n\geqslant 0}$$

mit r, $s \in \mathbf{R}$.

Sind x_0 und x_1 vorgegeben, so können daraus r und s durch Einsetzen von $n = 0$ und $n = 1$ bestimmt werden.

Vgl. Aufgabe 170.(3).

Beispiel. Sei eine reelle Folge $(x_n)_{n\geqslant 0}$ so gesucht, daß $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ und

$$x_{n+2} \;=\; x_{n+1} + x_n$$

ist für $n \geqslant 0$ (Fibonacci-Folge).

Es ist $a = \frac{1}{2}$, $b = 1$, $c = 0$ und d egal. Wir sind im Fall (1) oder (2), was wegen $c = 0$ auf dasselbe hinausläuft.

Es ist $\lambda_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$ und $\lambda_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}$.

Wir suchen $r,\, s \in \mathbf{R}$ so, daß $r + s \overset{!}{=} 0$ und $r\lambda_1 + s\lambda_2 \overset{!}{=} 1$. Auch ohne Verfahren sehen wir, daß $s = -r$ und daher $1 \overset{!}{=} r(\lambda_1 - \lambda_2) = r\sqrt{5}$ sein sollte. Wir erhalten $r = 1/\sqrt{5}$, $s = -1/\sqrt{5}$ und also

$$x_n \;=\; \tfrac{1}{\sqrt{5}}(\lambda_1^n - \lambda_2^n) \;=\; \tfrac{1}{2^n\sqrt{5}}\big((1+\sqrt{5})^n - (1-\sqrt{5})^n\big)$$

für $n \geqslant 0$. Also $(x_n)_{n\geqslant 0} = (0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \ldots)$.

Anhang A

Aufgaben und Lösungen

A.1 Aufgaben

Aufgabe 1 (§1.1.2)

(1) Schreibe $\frac{1}{11}$ als Dezimalbruch.

(2) Schreibe $0,291\overline{6} = 0,2916666\ldots$ als vollständig gekürzten Bruch ganzer Zahlen.

Aufgabe 2 (§1.1.2)

(1) Schreibe als Dezimalbruch.

(i) $\frac{1}{7}$
(ii) $\frac{4}{41}$

(2) Schreibe als vollständig gekürzten Bruch ganzer Zahlen.

(i) $0,\overline{629} = 0,629629629\ldots.$
(ii) $0,3\overline{1122} = 0,3112211221122\ldots.$

Aufgabe 3 (§1.2) Seien $r,\ s\ \in\ \mathbf{R}$.

(1) Ist $|rs| = |r||s|$?

(2) Ist $|r-s| = |r|-|s|$?

(3) Ist $\sqrt{r^2} = |r|$?

Aufgabe 4 (§1.2) Schreibe $\mathbf{R}\times\mathbf{R} := \{(x,y)\ :\ x,\ y\ \in\ \mathbf{R}\}$. Skizziere in der Ebene.

(1) $\{(x,y)\in\mathbf{R}\times\mathbf{R}\ :\ |x+y|\in[1,2)\}$.

(2) $\{(x,y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} \,:\, |x+y| \leqslant |x-y|\}$.

Aufgabe 5 (§1.3.2) Leite eine Formel für $(x-y)^3$ aus dem binomischen Lehrsatz ab.

Aufgabe 6 (§1.3.2) Leite eine Formel für $(x-y)^4$ aus dem binomischen Lehrsatz ab.

Aufgabe 7 (§1.3.2) Finde eine Formel für

$$f(n) \;=\; \sum_{k=1}^{n}(k+1)$$

für $n \geqslant 1$ ohne Summenzeichen. Beweise diese mit Induktion. (Hinweis: $\frac{1}{2}n^2 + \ldots$)

Aufgabe 8 (§1.3.2)
Finde eine Formel für $f(n)$ ohne Summenzeichen. Beweise diese mit Induktion.

(1) $f(n) = \sum_{k=2}^{n} \binom{k}{2}$ für $n \geqslant 2$. (Hinweis: $\binom{n+1}{3}$.)

(2) $f(n) = \sum_{k=-1}^{n} 2k$ für $n \geqslant -1$. (Hinweis: $n^2 + \ldots$).

Aufgabe 9 (§2.1.1, §2.1.2, §2.1.4)
Sei $X := \{x_1\,,\, x_2\,,\, x_3\}$, $Y := \{y_1\,,\, y_2\}$ und $Z := \{z_1\,,\, z_2\,,\, z_3\}$.
Hierbei sei jeweils $x_i \neq x_j$, $y_i \neq y_j$ und $z_i \neq z_j$ falls $i \neq j$.
Sei $f : X \longrightarrow Y$, $x_1 \longmapsto y_2$, $x_2 \longmapsto y_1$, $x_3 \longmapsto y_2$.
Sei $g : Y \longrightarrow Z$, $y_1 \longmapsto z_3$, $y_2 \longmapsto z_1$.

(1) Berechne $f(\{x_1\,,\, x_2\})$.

(2) Berechne $f^{-1}(\{y_2\})$.

(3) Berechne $(g \circ f)^{-1}(\{z_1\,,\, z_3\})$.

(4) Ist $g \circ f$ injektiv oder surjektiv?

Aufgabe 10 (§2.1.1, §2.1.2, §2.1.3, §2.1.4)
Sei $X := \{1,2,3,4\}$, $Y := \{1,2,3\}$ und $Z := \{1,3,5,7\}$.
Sei $f : X \longrightarrow Y$, $1 \longmapsto 2$, $2 \longmapsto 1$, $3 \longmapsto 2$, $4 \longmapsto 3$.
Sei $g : Y \longrightarrow Z$, $1 \longmapsto 5$, $2 \longmapsto 1$, $3 \longmapsto 5$.

(1) Berechne $f(\{1,2,3\})$.

(2) Berechne $f^{-1}(\{2,3\})$.

(3) Ist $g \circ f$ injektiv oder surjektiv?

(4) Berechne $(g \circ f)^{-1}(\{5\})$.

(5) Finde Teilmengen U_1, $U_2 \subseteq X$ mit $f(U_1 \cap U_2) \neq f(U_1) \cap f(U_2)$.

Aufgabe 11 (§2.1.1) Seien X und Y Mengen. Sei $G \subseteq X \times Y$.

Ist G der Graph einer Abbildung von X nach Y?

(1) $X = \{1, 2, 3, 4\}$, $Y = \{1, 2, 3\}$, $G = \{(1, 2), (3, 1), (2, 1), (4, 2)\}$.

(2) $X = \{1, 2, 4\}$, $Y = \{1, 5\}$, $G = \{(4, 5), (1, 6)\}$.

(3) $X = \mathbf{R}_{\geqslant 0}$, $Y = \mathbf{R}$, $G = \{(y^2, y) \ : \ y \in \mathbf{R}\}$.

Aufgabe 12 (§2.2.2, §2.3.2, §2.3.3)

Entscheide auf Existenz und berechne gegebenenfalls. Das Ergebnis darf e beinhalten.

Vergleiche mit dem Wert für $n = 3$ bzw. mit der Summe der ersten 3 Terme.

Vergleiche mit dem Wert für $n = 10$ bzw. mit der Summe der ersten 10 Terme.

(1) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1 + 4n^3 - 2n}{n^4 + 1}$

(2) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{2 - n^3 - 2n}{2n^3 + n^2 - n + 1}$

(3) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n^2 - 2n + \sqrt{n}}{n^2 + 1/n}$

(4) $\sum_{n=3}^{\infty} 3^{-n}$

(5) $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n/3^{n+2}$

(6) $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n/n!$

Aufgabe 13 (§2.3.3)

(1) Bestimme eine Näherung von $e^{3/2}$ unter Verwendung der ersten 5 Summanden der definierenden Reihe. Vergleiche mit dem tatsächlichen Wert.

(2) Bestimme eine Näherung von e^{-1} unter Verwendung der ersten 2, 3 und 4 Summanden der definierenden Reihe. Vergleiche mit dem tatsächlichen Wert.

(Taschenrechner!)

Aufgabe 14 (§2.3.3)

(1) Bestimme eine Näherung von $\mathrm{e} = \mathrm{e}^1$ unter Verwendung der ersten 8 Summanden der definierenden Reihe. Vergleiche mit dem tatsächlichen Wert.

(2) Bestimme eine Näherung von $\mathrm{e}^{5/2}$ unter Verwendung der ersten 3 und der ersten 10 Summanden der definierenden Reihe. Vergleiche mit dem tatsächlichen Wert.

(3) Bestimme eine Näherung von $\mathrm{e}^{-\sqrt{2}}$ unter Verwendung der ersten 7 Summanden der definierenden Reihe. Vergleiche mit dem tatsächlichen Wert.

(Taschenrechner !)

Aufgabe 15 (§2.4.1) Welche zwei Elemente in $\mathbf{R}^2$ aus

$$A := (2,0)\ ,\quad B := (-3,-5)\ ,\quad C := (4,-2)$$

haben voneinander minimalen Abstand, und welche maximalen?

Aufgabe 16 (§2.4.1) Welche zwei Elemente in $\mathbf{R}^3$ aus

$$(1,0,1)\ ,\quad (1,4,1)\ ,\quad (3,2,-2)\ ,\quad (-1,-1,-1)$$

haben voneinander minimalen Abstand, und welche maximalen?

Aufgabe 17 (§2.2.2, §2.3.3)

(1) Sei $k \in \mathbf{Z}_{\geqslant 0}$. Bestimme $\lim_{n\to\infty} n^k \mathrm{e}^{-n}$.

(2) Sei $k \in \mathbf{Z}_{\geqslant 0}$. Bestimme $\lim_{n\to\infty} n^k/n!$.

Aufgabe 18 (§2.3.2)

(1) Berechne

$$\sum_{k=2}^{10} \left(\frac{2}{3}\right)^k \qquad \text{und} \qquad \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^k .$$

(2) Berechne

$$\sum_{k=2}^{10} \left(-\frac{1}{2}\right)^{2k} \qquad \text{und} \qquad \sum_{k=2}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^{2k} .$$

Aufgabe 19 (§2.3.2, §2.4.2)

(1) Berechne $\sum_{k=2}^{50} \left(-\frac{4}{5}\right)^k$ und $\sum_{k=2}^{\infty} \left(-\frac{4}{5}\right)^k$.

(2) Gib eine Formel ohne Summenzeichen an für $\sum_{k=3}^{n}(q^k + (-q)^k)$, wobei $q \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ und $n \in \mathbf{Z}_{\geqslant 3}$ ungerade.

(3) Sei $f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-kx}$ für $x \in \mathbf{R}_{>0}$.
Definiert dies eine stetige Funktion $f : \mathbf{R}_{>0} \longrightarrow \mathbf{R}$? Skizze!

Aufgabe 20 (§2.3.1) Bestimme

$$\frac{\pi^2}{6} - \sum_{k=1}^{n} k^{-2} \qquad \text{für } n \in \{5, 10, 50\}.$$

Welche Vermutung ergibt sich für den Grenzwert für $n \to \infty$?

Aufgabe 21 (§2.3.1, §2.3.3)

(1) Sei $f(n) := (1+n^{-1})^n$ für $n \in \mathbf{Z}_{\geqslant 1}$. Bestimme $f(100)$, $f(10000)$, $f(10^6)$. Wende den Binomischen Lehrsatz auf $f(n)$ an und bestimme darin für $k \geqslant 0$ den Grenzwert des k-ten Summanden für $n \to \infty$. Welche Vermutung ergibt sich für $\lim_{n\to\infty}(1+n^{-1})^n$?

(2) Bestimme $\frac{\pi^6}{945} - \sum_{k=1}^{n} k^{-6}$ für $n \in \{5, 10, 50\}$. Welche Vermutung ergibt sich für den Grenzwert für $n \to \infty$?

Aufgabe 22 (§2.4.2) Sei $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ eine Funktion. Sei $x_0 \in \mathbf{R}$.

Entscheide, ob f in x_0 stetig ist. Skizze!

(1) $f(x) := |x|$, $x_0 := 0$.

(2) $f(x) := x^2$ für $x \leqslant 0$, $f(x) := x + 1$ für $x > 0$, $x_0 := 0$.

Aufgabe 23 (§2.4.2) Sei $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ eine Funktion. Sei $x_0 \in \mathbf{R}$.

Entscheide, ob f in x_0 stetig ist. Skizze!

(1) $f(x) := x$ für $x \leqslant -1$, $f(x) := -x$ für $x > -1$, $x_0 := -1$.

(2) $f(x) := -x$ für $x \leqslant 1$, $f(x) := 2x - 3$ für $x > 1$, $x_0 := 1$.

(3) $f(x) := \sin(1/x)$ für $x \neq 0$, $f(0) := 0$, $x_0 := 0$.

Aufgabe 24 (§2.4.2)
Warum ist f stetig? Begründe so weit wie möglich mit der Bemerkung aus §2.4.2.

(1) $f : \mathbf{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbf{R}$, $f(x) := 1/x^3$. Skizze! (Taschenrechner!)

(2) $f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$, $f(x, y) := \mathrm{e}^{xy}$.

Aufgabe 25 (§2.4.2)

Warum ist f stetig? Begründe so weit wie möglich mit der Bemerkung aus §2.4.2. Skizze (außer in (3); und (4, 5) zusammen)! (Taschenrechner!)

(1) $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$, $f(x) := \sqrt[5]{x-2} + \sin(x)$.

(2) $f : \mathbf{R} \setminus \{\, \pi/2 + z\pi \;:\; z \in \mathbf{Z} \,\} \longrightarrow \mathbf{R}$, $f(x) := \tan(x)^2$.

(3) $f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$, $f(x, y) := \sin(x^2 + y^2)$.

(4) $f : \mathbf{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbf{R}$, $f(x) := \mathrm{e}^{-1/x^4}$.

(5) $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$, $f(x) := \mathrm{e}^{-1/x^4}$ falls $x \neq 0$, und $f(0) := 0$.

Aufgabe 26 (§2.4.4)

Bestimme Polynome $g(x)$ und $h(x)$ so, daß $f(x) := \frac{g(x)}{h(x)}$ die folgenden Eigenschaften hat.

$$\lim_{x\to\infty} f(x) \;=\; 1, \qquad f(-1) \;=\; 3, \qquad f(0) \;=\; 2\,.$$

Skizze! (Hinweis: Grad 1/Grad 1.)

Aufgabe 27 (§2.4.4)

Bestimme Polynome $g(x)$ und $h(x)$ so, daß $f(x) := \frac{g(x)}{h(x)}$ die angegebenen Eigenschaften hat. (Die Lösung ist jeweils nicht eindeutig.) Skizze!

(1) $\lim_{x\to\infty} f(x) = 1$, $f(1) = 0$, $f(0) = 1$, $f(-1) = 0$. (Hinweis: Grad 2/Grad 2.)

(2) $\lim_{x\to\infty} f(x) = 1$, $f(-1) = -1$, $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, $f(2) = 2$.
(Hinweis: Grad 3/Grad 3.)

Aufgabe 28 (§3.2.1) Sei $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ eine Abbildung.

Ist f differenzierbar an der Stelle 0? Überprüfe direkt mit der Definition. Skizze!

(1) $f(x) = x^2$.

(2) $f(x) = |x|$.

Aufgabe 29 (§3.2.1) Sei $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ eine Abbildung.

Ist f differenzierbar an der Stelle 0? Überprüfe direkt mit der Definition. Skizze!

(1) $f(x) = (x-1)^4$.

(2) $f(x) = \sqrt[3]{x}$.

(3) $f(x) = x \cdot |x|$.

Aufgabe 30 (§3.2.1) Sei $D \subseteq \mathbf{R}$ offen. Sei $f : D \longrightarrow \mathbf{R}$ eine Abbildung.
Berechne f' und f''.

(1) $f(x) = \frac{x^2}{1+x}$, $D = \mathbf{R} \setminus \{-1\}$.

(2) $f(x) = \mathrm{e}^x \sin(x)$, $D = \mathbf{R}$.

(3) $f(x) = \sin(\cos(x))$, $D = \mathbf{R}$.

Aufgabe 31 (§3.2.1) Sei $D \subseteq \mathbf{R}$ offen. Sei $f : D \longrightarrow \mathbf{R}$ eine Abbildung.
Berechne f', f'' und f'''.

(1) $f(x) = \frac{x}{x^3-1}$, $D = \mathbf{R} \setminus \{1\}$.

(2) $f(x) = \frac{\sin(x)}{2+\cos(x)}$, $D = \mathbf{R}$.

(3) $f(x) = \sin(x^3)$, $D = \mathbf{R}$.

(4) $f(x) = \mathrm{e}^{1/(x^2-1)}$, $D = \mathbf{R} \setminus \{-1, +1\}$.

(5) $f(x) = \cos(\mathrm{e}^{1/x})$, $D = \mathbf{R} \setminus \{0\}$.

Aufgabe 32 (§3.2.1) Leite die Quotientenregel aus Produkt- und Kettenregel her.

Aufgabe 33 (§3.2.2) Seien $a, b \in \mathbf{R}$ mit $a < b$. Sei $f : (a, b) \longrightarrow \mathbf{R}$.
Untersuche unter Verwendung von f', in welchen Teilintervallen f monoton wächst und in welchen monoton fällt. Skizze von f und f' !

(1) $f(x) = x^3 - x$, $(a, b) = (-2, 2)$.

(2) $f(x) = \mathrm{e}^{2x} x^2$, $(a, b) = (-2, \frac{1}{2})$.

Aufgabe 34 (§3.2.2) Seien $a, b \in \mathbf{R}$ mit $a < b$. Sei $f : (a, b) \longrightarrow \mathbf{R}$.
Untersuche unter Verwendung von f', in welchen Teilintervallen f monoton wächst und in welchen monoton fällt. Skizze von f und f' !

(1) $f(x) = x^4 - 4x^2$, $(a, b) = (-2, 2)$.

(2) $f(x) = \sin(x^2)$, $(a, b) = (-2, 2)$.

(3) $f(x) = \frac{x^2}{2} + \cos(x)$, $(a, b) = (-1, 1)$. (Hinweis: f'' hilft für f'.)

Aufgabe 35 (§3.2.3.2) Sei $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$.

Bestimme alle lokalen Maximal- und Minimalstellen von f. Skizze (sinnvoller Ausschnitt)!

(1) $f(x) = 3x^2 - x^3$.

(2) $f(x) = x^2 \mathrm{e}^x$.

Aufgabe 36 (§3.2.3.2) Sei $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$.

Bestimme alle lokalen Maximal- und Minimalstellen von f. Skizze (sinnvoller Ausschnitt)!

(1) $f(x) = x^4 - 2x^2$.

(2) $f(x) = \sin(x) + \cos(x)$.

(3) $f(x) = \arctan(x) + \ln(1 + x^2)$. (Hinweis: Vgl. Aufgabe 38.(2).)

Aufgabe 37 (§3.2.2, §3.2.4.1) Ist $f : (0, \pi) \longrightarrow (-1, 1)$, $x \longmapsto \cos(x)$ bijektiv? Skizze!

Falls ja, so bezeichne mit $\arccos : (-1, 1) \longrightarrow (0, \pi)$ die Umkehrfunktion und bestimme $\arccos'(x)$.

Aufgabe 38 (§3.2.2, §3.2.4.1)

(1) Ist $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$, $x \longmapsto \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}$ bijektiv? Skizze!
Falls ja, so bezeichne mit $g : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ die Umkehrfunktion und bestimme $g'(x)$.
(Hinweis: betrachte $f(x)^2$.)

(2) Ist $f : (-\pi/2, \pi/2) \longrightarrow \mathbf{R}$, $x \longmapsto \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ bijektiv? Skizze!
Falls ja, so bezeichne mit $\arctan : \mathbf{R} \longrightarrow (-\pi/2, \pi/2) \subseteq \mathbf{R}$ die Umkehrfunktion und bestimme $\arctan'(x)$. (Hinweis: betrachte $f(x)^2$.)

Aufgabe 39 (§3.2.4.3.2) Berechne $\log_3(8)$ und $3^{\log_3(8)}$ mit Taschenrechner.

Aufgabe 40 (§3.2.4.3.2) Berechne mit Taschenrechner.

(1) $\log_7(9)$, $7^{\log_7(9)}$

(2) $\log_{17}(25)$, $17^{\log_{17}(25)}$

Aufgabe 41 (§3.2.4.3.2) Seien $a, b \in \mathbf{R}_{>0} \smallsetminus \{1\}$. Seien $x, y > 0$. Sei $z \in \mathbf{R}$.

Leite her, daß $\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$, daß $a^{\log_a(x)} = x$, daß $\log_a(a^z) = z$ und daß, falls $x \neq 1$, auch $\frac{\log_a(x)}{\log_b(x)} = \log_a(b)$.

Aufgabe 42 (§3.2.5) Berechne unter Verwendung von l'Hôpital. Skizze!

(1) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2}$

(2) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x e^x - \ln(1+x)}{x^2}$

Aufgabe 43 (§3.2.5) Berechne unter Verwendung von l'Hôpital. Skizze!

(1) $\lim\limits_{x \to e} \frac{\ln(\ln(x))}{x - e}$.

(2) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{2^x - 1}{x}$.

(3) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x^5}{\sin(x) - x + x^3/6}$.

(4) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1}\right)$.

Aufgabe 44 (§3.3.1) Sei $D \subseteq \mathbf{R}^2$ offen.

Habe $f : D \longrightarrow \mathbf{R}$ stetige zweite partielle Ableitungen.

Verifiziere das Lemma von Schwarz, d.h. berechne f_{xy} und f_{yx} und vergleiche.

(1) $f(x, y) = x^y$, wobei $D = \mathbf{R}_{>0} \times \mathbf{R}$.

(2) $f(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2}$, wobei $D = \mathbf{R}^2 \smallsetminus \{(0, 0)\}$.

Aufgabe 45 (§3.3.1) Sei $D \subseteq \mathbf{R}^2$ offen.

Habe $f : D \longrightarrow \mathbf{R}$ stetige zweite partielle Ableitungen.

Verifiziere das Lemma von Schwarz, d.h. berechne f_{xy} und f_{yx} und vergleiche.

(1) $f(x, y) = 3^{x^2 y}$, wobei $D = \mathbf{R}^2$.

(2) $f(x, y) = \ln(\frac{1}{x^4 + y^2})$, wobei $D = \mathbf{R}^2 \smallsetminus \{(0, 0)\}$.

Aufgabe 46 (§3.3.1) Sei $D := \mathbf{R} \smallsetminus \{ k\pi + \frac{\pi}{2} : k \in \mathbf{Z} \} \subseteq \mathbf{R}$.

Seien $f,\, g \,:\, D \longrightarrow \mathbf{R}$ definiert durch $f(t) := 1/\cos(t)$ und $g(t) := \tan(t)$.

Sei $h : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$ definiert durch $h(x, y) := x^2 - y^2$.

Berechne $(h \circ (f, g))'(t)$ einmal nach Kettenregel und einmal direkt. Vergleiche!

Aufgabe 47 (§3.3.1) Sei $D \subseteq \mathbf{R}$ offen. Seien $f,\, g \,:\, D \longrightarrow \mathbf{R}$ differenzierbar.

Sei $h : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$ partiell differenzierbar.

Berechne $(h \circ (f, g))'(t)$ einmal nach Kettenregel und einmal direkt. Vergleiche!

(1) $f(t) = t^2$, $g(t) = 1/t$, $h(x,y) = xy^2$, $D = \mathbf{R} \setminus \{0\}$.

(2) $f(t) = \sin(t)$, $g(t) = \cos(t)$, $h(x,y) = x^2 + y^2$, $D = \mathbf{R}$.

Aufgabe 48 (§3.3.1) Seien f, g : $\mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ differenzierbar.

Sei $h : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$, $h(x,y) := xy$.

Leite aus einer Anwendung der Kettenregel auf $h \circ (f,g)$ die Produktregel

$$(fg)' \;=\; f'g + fg'$$

ab.

Aufgabe 49 (§3.4) Sei $f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$.

Bestimme alle lokalen Minimal- und Maximalstellen von f.

(1) $f(x,y) = -3x^2 + 2xy - y^2$.

(2) $f(x,y) = (1 + \mathrm{e}^y)\cos(x) - y\,\mathrm{e}^y$.

Aufgabe 50 (§3.4) Sei $f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$.

Bestimme alle lokalen Minimal- und Maximalstellen von f.

(1) $f(x,y) = x^2 - y^2 - x^4$.

(2) $f(x,y) = \sin(x)\sin(y)$.

(3) $f(x,y) = xy\,\mathrm{e}^{x+y}$.

Aufgabe 51 (§3.4) Habe ein Quader die Kantenlängen a, b, $c > 0$ und die Oberfläche 6. Diese Bedingung liefert c in Abhängigkeit von a und b. Insbesondere hängt das Volumen unseres Quaders unter dieser Bedingung nur noch von a und b ab. Überprüfe, daß dieses Volumen nur bei $(a,b) = (1,1)$ eine lokale Maximalstelle besitzt, an der dann ein Würfel vorliegt.

Aufgabe 52 (§4.1) Es sollen 10.000 Euro für 50 Jahre zu jährlich 2,5% verzinst werden. Es sollen davon am Anfang jeden Jahres 100 Euro ausbezahlt werden.

(1) Wieviel Kapital steht nach Ablauf der 50 Jahre zu Buche?

(2) Wieviel Kapital stünde nach Ablauf der 50 Jahre zu Buche, wenn die 100 Euro jeweils am Ende jeden Jahres ausbezahlt würden?

Aufgabe 53 (§4.1) Es sollen 2.000 Euro für 10 Jahre zu jährlich 4% verzinst werden. Es sollen davon am Ende jeden Jahres 200 Euro ausbezahlt werden.

(1) Wieviel Kapital steht nach Ablauf der 10 Jahre zu Buche?

(2) Wieviel Kapital stünde nach Ablauf der 10 Jahre zu Buche, wenn die 200 Euro jeweils am Anfang jeden Jahres ausbezahlt würden?

Aufgabe 54 (§4.1) Wir legen 10.000 Euro festverzinslich an.

(1) Bei welchem jährlichen Zinssatz beläuft sich das Kapital nach 5 Jahren auf 15.000 Euro?

(2) Bei welchem monatlichen Zinssatz beläuft sich das Kapital nach 5 Jahren auf 15.000 Euro?

Aufgabe 55 (§4.1)

(1) Wieviel Kapital muß man anlegen bei einem jährlichen Zinssatz von 2,5% und zusätzlichen Sparraten von 1.000 Euro am Ende jeden Jahres, um nach 4 Jahren 5.000 Euro zu erreichen?

(2) Wir legen 10.000 Euro festverzinslich an. Bei welchem jährlichen Zinssatz beläuft sich das Kapital nach 10 Jahren auf 18.000 Euro?

(3) Wir legen 10.000 Euro zu einem jährlichen Zinssatz von 5,2% an, mit einer zusätzlichen Sparrate von 500 Euro an jedem Jahresende. Nach wieviel Jahren ist die Summe von 30.000 Euro erreicht?

(4) Welcher monatliche Zinssatz entspricht einem jährlichen Zinssatz von 4,3% ?

Aufgabe 56 (§4.1)

(1) Wieviel Kapital muß man anlegen bei einem jährlichen Zinssatz von 4,2% und zusätzlichen Sparraten von 83 Euro am Ende jeden Jahres, um nach 3 Jahren 1000 Euro zu erreichen?

(2) Bei einem Anfangskapital von 5.000 Euro und einem jährlichen Zinssatz von 3,5%, wie hoch muß die am Ende jeden Jahres einzuzahlende Sparrate sein, um in 5 Jahren 10.000 Euro auf dem Konto zu haben?

(3) Einem Jahreszinssatz von 5% entspricht welcher Tageszinssatz? (Ein Jahr habe 365 Tage.)

(4) Wie lange muß ein Anfangskapital von 1.000 Euro bei 3% Jahreszins und einer monatlichen Kontoführungsgebühr von 2 Euro angelegt werden, um 1.100 Euro zu erzielen? Wie lange würde es ohne Kontoführungsgebühr dauern? (Die Bank rechne die Zinsen monatlich ab, jeder Monat sei 1/12 Jahr.)

(5) Wie lange braucht es, bis ein Kredit von 800.000 Euro abbezahlt ist bei einer Rate von 10.000 Euro an jedem Monatsende und Kreditzinsen von 7,3% jährlich? Wie lange würde es ohne Kreditzinsen dauern?

Aufgabe 57 (§4.2) Ein Investitionsplan sieht vor, zu Beginn 10.000 Euro Anschaffungskosten zu verbuchen, in den ersten 4 Jahren mit den Einnahmen gerade die Ausgaben decken zu können, und im 5-ten Jahr und im 6-ten Jahr je 6.000 Euro Gewinn verbuchen zu können.

Welchen Darlehenszins sollte man der Bank höchstenfalls zahlen, so man kein Verlustgeschäft machen möchte?

Aufgabe 58 (§4.2) Ein Investitionsplan sieht vor, zu Beginn 5.000 Euro Anschaffungskosten zu verbuchen, nach dem ersten Jahr 8.000 Euro zuschießen zu müssen, im zweiten Jahr mit den Einkünften gerade die Kosten decken zu können, und in den folgenden 3 Jahren jeweils 5.000 Euro Gewinn verbuchen zu können.

Welchen Darlehenszins sollte man der Bank höchstenfalls zahlen, so man kein Verlustgeschäft machen möchte?

Aufgabe 59 (§5.1)
Bilde alle bildbaren Produkte von je zwei verschiedenen der folgenden Matrizen.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 60 (§5.1)
Bilde alle bildbaren Produkte von je zwei verschiedenen der folgenden Matrizen.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 61 (§5.1) Berechne $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^3$.

Aufgabe 62 (§5.1)

(1) Sei $A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Bestimme A^k für alle $0 \leqslant k \leqslant 5$.

(2) Sei $A := \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Bestimme A^k für alle $k \geqslant 0$.

Aufgabe 63 (§5.1) Ist $A^2 \neq 0$ für alle $A \in \mathbf{R}^{2\times 2} \smallsetminus \{0\}$?

Aufgabe 64 (§5.1)

(1) Seien $A,\, B \in \mathbf{R}^{2\times 2}$. Kann man aus $AB = 0$ auch $BA = 0$ folgern?

(2) Ist $AB \neq \mathrm{E}_2$ für alle $A \in \mathbf{R}^{2\times 1}$ und alle $B \in \mathbf{R}^{1\times 2}$?

Aufgabe 65 (§5.1) Sei $f : \mathbf{R}^{2\times 1} \longrightarrow \mathbf{R}^{2\times 1},\ b \longmapsto \left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right) b$.

(1) Bestimme $f(\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right))$.

(2) Bestimme $\{\, b \in \mathbf{R}^{2\times 1} \;:\; f(b) = b \,\}$.

(3) Gib eine (möglichst kurze) Abbildungsvorschrift für $f \circ f$ an.

Aufgabe 66 (§5.1) Sei $a = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbf{R}^{3\times 1}$. Sei $f : \mathbf{R}^{3\times 1} \longrightarrow \mathbf{R}^{3\times 1},\ b \longmapsto b - (a^{\mathrm{t}}\, b)\, a$.

(1) Berechne $f(\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right))$, $f(\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right))$ und $f(\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right))$.

(2) Bestimme $\{\, b \in \mathbf{R}^{3\times 1} \;:\; f(b) = b \,\}$.

(3) Bestimme $\{\, b \in \mathbf{R}^{3\times 1} \;:\; f(b) = -b \,\}$.

(4) Gib eine Abbildungsvorschrift für $f \circ f$ an.

Aufgabe 67 (§5.2.2)
Bestimme den Winkel zwischen je zwei verschiedenen der folgenden Vektoren (in Grad).

$$a := \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right), \quad b := \left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \quad c := \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$$

Aufgabe 68 (§5.2.2)
Bestimme den Winkel zwischen je zwei verschiedenen der folgenden Vektoren (in Grad).

$$a := \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right), \quad b := \left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right), \quad c := \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \quad d := \left(\begin{smallmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$$

Aufgabe 69 (§5.2.2) Sei $n \geqslant 1$. Seien $a,\, b \in \mathbf{R}^{n\times 1} \smallsetminus \{0\}$. Verifiziere, daß a und $(a^{\mathrm{t}}\, a) \cdot b - (a^{\mathrm{t}}\, b) \cdot a$ zueinander orthogonal sind. Wann ist letzterer Vektor null?

Aufgabe 70 (§5.2.2) Sei $n \geqslant 1$. Seien $a,\, b \in \mathbf{R}^{n\times 1}$. Bestätige folgende Dreiecksungleichung für Vektoren unter Verwendung von Cauchy-Schwarz.

$$\|a + b\| \;\leqslant\; \|a\| + \|b\|$$

Aufgabe 71 (§5.2.2) Sei $f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$ mit $f(x,y) = xy$. Skizziere die Höhenlinien $f(x,y) = 1$ und $f(x,y) = 2$. Verifiziere anhand der Skizze, daß der Gradient $\binom{f_x(1,1)}{f_y(1,1)}$ orthogonal zur Höhenlinie durch den Punkt $(1,1)$ steht.

Aufgabe 72 (§5.2.2) Sei $f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$ mit $f(x,y) = \sin(x) \cdot \sin(y)$. Skizziere die Höhenlinien $f(x,y) = 0{,}25$, $f(x,y) = 0{,}5$ und $f(x,y) = 0{,}75$. Verifiziere anhand der Skizze, daß der Gradient $\binom{f_x(\pi/6,\pi/2)}{f_y(\pi/6,\pi/2)}$ orthogonal zur Höhenlinie durch den Punkt $(\pi/6, \pi/2)$ steht.

Aufgabe 73 (§5.2.3)

(1) Sei $a = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Sei $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. Berechne $a^{\mathrm{t}}\, b$ und $a \times b$. Bestimme den Flächeninhalt des von a und b aufgespannten Parallelogramms.

(2) Sei $a = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Sei $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Sei $c = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Bestimme den Rauminhalt des von a, b und c aufgespannten Parallelepipeds. Vergleiche mit der Anschauung.

Aufgabe 74 (§5.2.3)

(1) Sei $a = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$. Sei $b = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Berechne $a^{\mathrm{t}}\, b$ und $a \times b$. Bestimme den Flächeninhalt des von a und b aufgespannten Parallelogramms.

(2) Sei $a = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Sei $b = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Sei $c = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Bestimme den Rauminhalt des von a, b und c aufgespannten Parallelepipeds.

Aufgabe 75 (§5.2.3) Seien $a = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix}$, $c = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^{3\times 1}$.

(1) Überprüfe, daß $a \times b = -(b \times a)$. Folgere erneut, daß $a \times a = 0$.

(2) Überprüfe, daß $a \times b$ senkrecht auf a und auf b steht.

(3) Überprüfe, daß $a \times (b \times c) + b \times (c \times a) + c \times (a \times b) = 0$.

(4) Überprüfe, daß $a^{\mathrm{t}}\,(b \times c) = -b^{\mathrm{t}}\,(a \times c)$. Folgere erneut, daß a senkrecht auf $a \times b$ steht.

Aufgabe 76 (§5.2.3) Sei E die von $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ aufgespannte Ebene durch $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ in $\mathbf{R}^{3\times 1}$. Sei $P := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Sei g die Gerade durch P senkrecht zu E. Bestimme den Schnittpunkt von g mit E. (Hinweis: Kreuzprodukt der aufspannenden Vektoren!)

Aufgabe 77 (§5.2.3) Sei E die von $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ aufgespannte Ebene durch $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ in $\mathbf{R}^{3\times 1}$. Sei $P := \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Sei g die Gerade durch P senkrecht zu E. Bestimme den Schnittpunkt von g mit E. Bestimme den Abstand von P und E. Spiegele P an E.
(Hinweis: Kreuzprodukt der aufspannenden Vektoren!)

Aufgabe 78 (§5.3) Seien $m, n \geqslant 1$. Sei $A \in \mathbf{R}^{m\times n}$. Sei $b \in \mathbf{R}^{m\times 1}$.
Bestimme $\{\, x \in \mathbf{R}^{n\times 1} \,:\, Ax = b \,\}$.

(1) $A = \begin{pmatrix} 0&1&1 \\ 2&1&1 \\ 2&2&2 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(2) $A = \begin{pmatrix} 0&1&1 \\ 2&1&1 \\ 2&2&2 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(3) $A = \begin{pmatrix} 1&1&1&1 \\ 1&0&1&1 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(4) $A = \begin{pmatrix} 0&1&1 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 79 (§5.3) Seien $m, n \geqslant 1$. Sei $A \in \mathbf{R}^{m\times n}$. Sei $b \in \mathbf{R}^{m\times 1}$.
Bestimme $\{\, x \in \mathbf{R}^{n\times 1} \,:\, Ax = 0 \,\}$ und $\{\, x \in \mathbf{R}^{n\times 1} \,:\, Ax = b \,\}$.

(1) $A = \begin{pmatrix} 1&1&1&1&1 \\ 1&1&1&0&2 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(2) $A = \begin{pmatrix} 0&1&1&0 \\ 2&1&1&2 \\ 2&2&2&2 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(3) $A = \begin{pmatrix} 2&2&4&1&0&-1 \\ 4&4&8&1&2&1 \\ 2&2&4&5&-8&2 \\ 2&2&4&2&-2&-1 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ -11 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(4) $A = \begin{pmatrix} 0&1&1&2 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 3 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 80 (§5.3) Wir suchen alle $s, t, u, v, w \in \mathbf{R}$, welche das Gleichungssystem

$$\begin{array}{ccccccccccc} s & + & t & + & u & + & v & + & w & = & 1 \\ s & & & + & u & + & (-2)v & + & (-1)w & = & 0 \\ 2s & + & t & + & (-1)u & & & + & w & = & 0 \end{array}$$

erfüllen. Gibt es eine Lösung mit $s, t, u, v, w \in \mathbf{Z}$?

Aufgabe 81 (§5.3) Bestimme, falls möglich, die Inverse von $A := \begin{pmatrix} 0&1&1 \\ 1&1&1 \\ 1&1&0 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 82 (§5.3)

(1) Bestimme, falls möglich, die Inverse von $A := \begin{pmatrix} 0&1&1 \\ 1&2&1 \\ 1&1&0 \end{pmatrix}$.

(2) Bestimme, falls möglich, die Inverse von $A := \begin{pmatrix} 0&0&1&1 \\ 0&1&1&1 \\ 1&1&1&0 \\ 1&1&0&0 \end{pmatrix}$.

(3) Seien α, β, γ, $\delta \in \mathbf{R}$ so gegeben, daß $\alpha\delta \neq \beta\gamma$. Zeige, daß

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\alpha\delta - \beta\gamma} \begin{pmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{pmatrix} .$$

Aufgabe 83 (§5.4.2) Seien x_1, x_2, $x_3 \in \mathbf{R}^{3\times 1}$.
Ist (x_1, x_2, x_3) linear unabhängig?
Ist (x_1, x_2, x_3) erzeugend?
Ist (x_1, x_2, x_3) eine Basis von $\mathbf{R}^{3\times 1}$?

(1) $x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $x_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(2) $x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $x_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 84 (§5.4.2) Sei $n \geqslant 1$. Seien x_1, x_2, $x_3 \in \mathbf{R}^{n\times 1}$.
Ist (x_1, x_2, x_3) linear unabhängig?
Ist (x_1, x_2, x_3) erzeugend?
Ist (x_1, x_2, x_3) eine Basis von $\mathbf{R}^{n\times 1}$?

(1) $x_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $x_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(2) $x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $x_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(3) $x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $x_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $x_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

(4) $x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $x_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $x_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 85 (§5.4.3) Sei $T := \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$. Sei $U := \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$.

(1) Verifiziere die lineare Unabhängigkeit der angegebenen Tupel für T und für U.

(2) Bestimme Basen von $T \cap U$ und $T + U$.

Aufgabe 86 (§5.4.3) Sei $T := \langle \begin{pmatrix} 0\\1\\1\\0\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1\\1\\1\\1\\1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\0\\1\\1\\0 \end{pmatrix} \rangle$. Sei $U := \langle \begin{pmatrix} 1\\2\\4\\3\\1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1\\1\\1\\-1\\1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2\\3\\3\\0\\2 \end{pmatrix} \rangle$.

(1) Verifiziere die lineare Unabhängigkeit der angegebenen Tupel für T und für U.

(2) Bestimme Basen von $T \cap U$ und $T + U$.

(3) Verifiziere im vorliegenden Fall, daß $\dim(T) + \dim(U) = \dim(T + U) + \dim(T \cap U)$.

Aufgabe 87 (§5.4.3) Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum. Seien m, $n \geqslant 0$.

Seien T, U, $W \subseteq V$ Unterräume.

Verifiziere oder gib ein Gegenbeispiel.

(1) Es ist $T \cap (U + W) = (T \cap U) + (T \cap W)$.

(2) Es ist $\dim(T \cap W) - \dim(T \cap U) = \dim((T + U) \cap W) - \dim((T + W) \cap U)$.

(3) Es ist $\dim(\mathbf{R}^{m \times n}) = m \cdot n$.

Aufgabe 88 (§6.2) Berechne $\int_1^2 x \, \mathrm{d}x$ einmal mittels Hauptsatz und einmal mittels aus der Geometrie bekannter Formeln für Flächeninhalte.

Aufgabe 89 (§6.2) Vergleiche den Flächeninhalt zwischen der Parabel $f(x) := 1 - x^2$ und der x-Achse mit dem aus der Geometrie bekannten Flächeninhalt eines Halbkreises von Radius 1. Welcher Flächeninhalt ist größer? Skizziere die fraglichen Flächen übereinander!

Aufgabe 90 (§6.2) Berechne.

(1) $\int_{-1}^2 x^3 \, \mathrm{d}x$.

(2) $\int_1^2 \sqrt{x} \, \mathrm{d}x$.

(3) $\int_0^\pi (\sin(x)) \, \mathrm{d}x$.

Aufgabe 91 (§6.2) Berechne.

(1) $\int_0^1 (x^4 - x^3) \, \mathrm{d}x$.

(2) $\int_1^2 \sqrt[3]{x} \, \mathrm{d}x$.

(3) $\int_{1/10}^1 x^{-1} \, \mathrm{d}x$.

(4) $\int_{-1}^1 (\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}) \, \mathrm{d}x$.

Aufgabe 92 (§6.3.1) Berechne $\int_0^\pi \sqrt{\sin(x)} \cdot \cos(x)\,\mathrm{d}x$. (Hinweis: $g(x) := \sin(x)$.)

Aufgabe 93 (§6.3.1, §6.3.2) Berechne. Skizze!

(1) $\int_3^4 \frac{\ln(\ln(x))}{\ln(x)x}\,\mathrm{d}x$. (Hinweis: $g(x) := \ln(x)$, $h(u) := \ln(u)$.)

(2) $\int_1^s \frac{\sqrt{x}}{1+x}\,\mathrm{d}x$ für $s \in \mathbf{R}_{>0}$. (Hinweis: $g(x) := x^{1/2}$.)

(3) $\int_{-1}^{+1} \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$. (Hinweis: $x = g(t) := \sin(t)$. Dann Produktregel und Pythagoras.)

Aufgabe 94 (§6.3.2) Berechne $\int_1^2 (\ln(x))x^{-2}\,\mathrm{d}x$. (Hinweis: Produktregel.)

Aufgabe 95 (§6.3.2) Berechne.

(1) $\int_0^1 x^2 \mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x$. (Hinweis: Zweimal Produktregel.)

(2) $\int_1^u (x\ln(x) - x)\,\mathrm{d}x$ für $u \in \mathbf{R}_{>0}$.

(3) $\int_0^s \arctan(x)\,\mathrm{d}x$ für $s \in \mathbf{R}$. (Hinweis: Produktregel mit Faktor 1!)

Aufgabe 96 (§6.3.3) Berechne $\int_2^4 \frac{1}{x^2(x-1)}\,\mathrm{d}x$. (Hinweis: Partialbruchzerlegung.)

Aufgabe 97 (§6.3.3) Berechne. (Hinweis: Partialbruchzerlegung.)

(1) $\int_2^3 \frac{x^4}{x^4-2x^2+1}\,\mathrm{d}x$.

(2) $\int_2^3 \frac{1}{x^3(x-1)^2(x+1)^2}\,\mathrm{d}x$.

Aufgabe 98 (§6.4) Berechne $\int_{-\infty}^0 \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$. Skizze!

Aufgabe 99 (§6.4)

(1) Berechne $\int_0^1 x^{-\alpha}\,\mathrm{d}x$ für $\alpha \in (0,1)$.

(2) Zeige durch Vergleich mit $\int_1^\infty x^{-3/2}\,\mathrm{d}x$, daß die Reihe $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^{3/2}}$ konvergiert. Skizze! Welchen Wert hat das Integral? Vergleiche mit $\sum_{n=1}^{100} \frac{1}{n^{3/2}}$.

(3) Zeige durch Vergleich mit $\int_1^\infty x^{-1}\,\mathrm{d}x$, daß $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$ divergiert. Skizze!

Aufgabe 100 (§7.1) Ein Vermögen wird zum Teil mit Zins und Zinseszins angelegt, zum Teil als Barreserve zuhause gehortet. Der Jahreszins beträgt 6 Prozent. Angelegt werden 50.000 Euro zum Zeitpunkt $t = 0$, gehortet werden weitere 50.000 Euro. Bestimme die Wachstumsrate des Gesamtkapitals in Abhängigkeit von der Zeit t, gerechnet in Jahren. Wie groß ist diese nach 10 Jahren?

Aufgabe 101 (§7.1)

(1) Der Wert einer Wohnung betrage 100.000 Euro zum Zeitpunkt $t = 0$. Die Wertsteigerung betrage 2% jährlich. Zum Gesamtkapital werden die Miteinnahmen dazugerechnet, welche jährlich 6.000 Euro betragen. Berechne die jährliche Wachstumsrate des erzielten Gesamtkapitals in Abhängigkeit von der Zeit t, gerechnet in Jahren. Wie hoch ist sie nach 0, nach 10 und nach 20 Jahren? Skizze!

(2) Der Wert einer Wohnung betrage 100.000 Euro zum Zeitpunkt $t = 0$. Die Wertsteigerung betrage 2% jährlich. Zum Gesamtkapital werden die Miteinnahmen dazugerechnet, welche zu Beginn jährlich 6.000 Euro betragen, mit einer jährlichen Mieterhöhung um 10%. Berechne die jährliche Wachstumsrate des erzielten Gesamtkapitals in Abhängigkeit von der Zeit t, gerechnet in Jahren. Wie hoch ist sie nach 0, nach 10 und nach 20 Jahren? Skizze!

Aufgabe 102 (§7.2.1) Berechne die Ableitung und die Elastizität der Funktion $f : \mathbf{R}_{>0} \longrightarrow \mathbf{R}$, $x \longmapsto f(x) := \frac{1}{2x}$.

Aufgabe 103 (§7.2.2, §7.2.3)

(1) Erfahrungsgemäß werden am Hafenmarkt $f(x) := \frac{10.000}{900+x^2}$ Tonnen Eternit nachgefragt, wenn der Verkäufer den Gewinn zu x Euro pro Tonne ansetzt. Es kann die Nachfrage auch immer voll befriedigt werden. Bestimme die Elastizität von $f(x)$ und von $f'(x)$. Wie muß der Verkäufer den Gewinn pro Tonne ansetzen, um seinen Gesamtgewinn zu maximieren? Wieviel beträgt der maximale Gesamtgewinn? Skizze des Gesamtgewinns in Abhängigkeit von x!

(2) Pro Kilogramm Zirkonium lassen sich $f(x) := 12.000 \cdot (2x + 1)^{-1{,}4}$ Yen Gewinn erzielen, wenn x Kilogramm auf dem Markt sind, so die Faustregel. Es werde auch immer die gesamte angebotene Menge abgesetzt. Bestimme die Elastizität von $f(x)$ und von $f'(x)$. Wieviel Zirkonium muß der Verkäufer demgemäß auf den Markt werfen, um seinen Gesamtgewinn zu maximieren? Wieviel beträgt der maximale Gesamtgewinn? Skizze des Gesamtgewinns in Abhängigkeit von x!

Aufgabe 104 (§8.1) Gib das Taylorpolynom von $f(x) := \sqrt{x}$ um $x_0 := 1$ in 2-ter Ordnung an. Skizziere $f(x)$ und das Taylorpolynom!

Aufgabe 105 (§8.1) Sei $D \subseteq \mathbf{R}$ ein offenes Intervall und $f : D \longrightarrow \mathbf{R}$ eine Funktion. Gib eine Taylorentwicklung von $f(x)$ um x_0 in n-ter Ordnung an. Skizze von $f(x)$ und vom zugehörigen Taylorpolynom!

(1) Sei $D = (-\infty, 1)$, $f(x) = (1 - x)^{-1}$, $x_0 = 0$ und $n = 3$.

(2) Sei $D = (-\infty, 1)$, $f(x) = (1 - x)^{-2}$, $x_0 = 0$ und $n = 3$.

(3) Sei $D = (0, \infty)$, $f(x) = \ln x$, $x_0 = 1$ und $n = 5$.

(4) Sei $D = (0, \infty)$, $f(x) = x^{2/3}$, $x_0 = 1$ und $n = 3$.

Aufgabe 106 (§8.1) Bestimme das Taylorpolynom zweiter Ordnung von $f(x) := \mathrm{e}^x$ in 0, um das Integral $\int_{-1}^{1} \mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x$ zu approximieren. Vergleiche das approximative Ergebnis mit dem tatsächlichen Wert des Integrals.

Aufgabe 107 (§8.1)

(1) Bestimme die Taylorentwicklung von $\cos(x)$ um $x_0 = 0$.

(2) Verwende das Taylorpolynom von $\cos(x)$ in 2-ter, 4-ter und 6-ter Ordnung, um $\int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \cos(x) \, \mathrm{d}x$ anzunähern. Vergleiche mit dem exakten Wert des Integrals.

Aufgabe 108 (§8.2) Sei $f(x) = x^2 + 2x - 1$. Skizze von f!

Überprüfe, daß das Newtonverfahren für $f(x)$ auf dem Intervall $[0, 1]$ anwendbar ist.

Führe die ersten zwei Schritte des Newtonverfahrens aus. Skizze vom ersten Schritt!

Berechne die tatsächliche Nullstelle $\xi \in [0, 1]$ von $f(x)$ direkt. Vergleiche x_3 mit ξ.

Aufgabe 109 (§8.2) Sei $D \subseteq \mathbf{R}$ ein offenes Intervall. Sei $f : D \longrightarrow \mathbf{R}$ eine beliebig oft differenzierbare Funktion. Seien $a,\ b \in D$ mit $a < b$ gegeben.

Überprüfe die Voraussetzungen für das Newtonverfahren zur Näherung einer Nullstelle von $f(x)$ in $[a, b]$.

Falls die Voraussetzungen zutreffen, so führe die ersten drei Iterationsschritte durch, d.h. berechne x_4, und vergleiche die Abweichung von x_4 von der tatsächlichen Nullstelle mit der vom Lemma aus §8.2 garantierten oberen Schranke für diese Abweichung.

Falls die Voraussetzungen nicht zutreffen, so führe die ersten drei Iterationsschritte dennoch durch und beobachte das Verhalten der Iteration.

Skizze von $f(x)$ und des ersten Iterationsschritts wie in §8.2!

(1) $D = \mathbf{R}_{>0}$, $f(x) = x + x^{-1} - 3$, $a = 2$, $b = 4$.

(2) $D = \mathbf{R}$, $f(x) = x^{1/3}$, $a = -1$, $b = 1$.

(3) $D = \mathbf{R}$, $f(x) = \mathrm{e}^x - 4x$, $a = 2{,}1$, $b = 2{,}2$.

Aufgabe 110 (§8.2) Bestimme ein geignetes Intervall $[a, b]$, um $\sqrt{3}$ mit Hilfe des Newtonverfahrens mit einem Fehler von $\leqslant 10^{-4}$ anzunähern, wie mit der a-priori-Abschätzung aus §8.2 sichergestellt werden soll. (Hinweis: $[a, b] = [1{,}7, 1{,}8]$, $f(x) = x^2 - 3$.)

Aufgabe 111 (§8.2) Bestimme ξ näherungsweise unter Verwendung von $f(x)$ mit dem Newtonverfahren bis eine Abweichung von $\leqslant 10^{-6}$ genau, wobei dies mit der a-priori-Abschätzung aus dem Lemma aus §8.2 sichergestellt werden soll. Finde dazu ein geeignetes Intervall $[a, b]$, in der dortigen Notation.

(1) $\xi = 5^{1/4}$, $f(x) = x^4 - 5$.

(2) $\xi = \ln(2)$, $f(x) = \mathrm{e}^x - 2$.

Aufgabe 112 (§8.3) Bestimme den Gradienten und die Hessematrix von $f(x, y) = xy$.

Aufgabe 113 (§8.3) Bestimme den Gradienten und die Hessematrix von $f(x, y, z)$.

(1) $f(x, y, z) = x^3 + 2xyz$.

(2) $f(x, y, z) = x^4y - 2xz\,\mathrm{e}^{x+y}$.

Aufgabe 114 (§8.4) Bestimme die Taylorentwicklung in erster Ordnung von $f(x, y) = x + x^2y$ um $(1, 1)$. Berechne den Betrag der Differenz zwischen Funktionswert und Wert des Taylorpolynoms bei $(x, y) = (1{,}1\,, 1{,}2)$.

Aufgabe 115 (§8.4) Bestimme die Taylorentwicklung in erster Ordnung von $f(x, y) = \mathrm{e}^{x-y}$ um $(0, 0)$. Berechne den Betrag der Differenz zwischen Funktionswert und Wert des Taylorpolynoms bei $(x, y) = (0{,}2\,, 0{,}3)$.

Aufgabe 116 (§8.4) Bestimme die Taylorentwicklung in erster und die Taylorentwicklung in zweiter Ordnung von $f(x, y)$ um $(x_0\,, y_0)$.

Berechne jeweils den Betrag der Differenz zwischen Funktionswert und Wert des Taylorpolynoms bei $(x_0 + 0{,}1\,, y_0 + 0{,}1)$.

(1) $f(x, y) = x + x^2 + xy^3$, $(x_0\,, y_0) = (0, 0)$.

(2) $f(x, y) = x + x^2 + xy^3$, $(x_0\,, y_0) = (1, -1)$.

(3) $f(x, y) = \cos(x - 2y)$, $(x_0\,, y_0) = (0, 0)$.

Aufgabe 117 (§8.4) Bestimme das Taylorpolynom erster und zweiter Ordnung von $f(x, y, z) = \cos(x)\mathrm{e}^{yz}$ um $(0, 0, 0)$.

Berechne jeweils den Betrag der Differenz zwischen Funktionswert und Wert des Taylorpolynoms bei $(\ 0{,}1\ ,\ 0{,}1\ ,\ -0{,}1\ )$.

Aufgabe 118 (§9.1) Berechne $\det\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$ und $\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 119 (§9.1) Berechne.

(1) $\det\begin{pmatrix} 3 \end{pmatrix}$

(2) $\det\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

(3) $\det\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

(4) $\det\begin{pmatrix} 12 & 13 & 14 \\ 4 & 5 & 6 \\ 8 & 9 & 10 \end{pmatrix}$

(5) $\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

(6) $\det\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Aufgabe 120 (§9.1) Berechne $\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 8 & 8 \\ 0 & 5 & 9 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 2 & 8 \end{pmatrix}$ und $\det(\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^4)$ auf geschickte Weise.

Aufgabe 121 (§9.1) Berechne.

(1) $\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 8 & 7 \\ 2 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

(2) $\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 7 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Aufgabe 122 (§9.1)

(1) Sei $A \in \mathbf{R}^{3\times 3}$ mit $A = -A^{\mathrm{t}}$ gegeben (antisymmetrische Matrix).
Bestimme $\det(A)$ auf zwei Wegen, einer davon mit Sarrus.

(2) Sei $n \geqslant 1$. Sei $A \in \mathbf{R}^{n\times n}$ invertierbar.
Bestimme $\det(A^{-1})$ in Abhängigkeit von $\det(A)$.

Aufgabe 123 (§9.2) Sei $n \geqslant 1$. Sei $A \in \mathbf{R}^{n\times n}$ eine symmetrische Matrix.
Untersuche A auf Definitheit.

(1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

(2) $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

(3) $A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & 0 \\ -1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$. (Hinweis: vgl. (2).)

Aufgabe 124 (§9.2) Sei $n \geqslant 1$. Sei $A \in \mathbf{R}^{n\times n}$ eine symmetrische Matrix.
Untersuche A auf Definitheit.

(1) $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$

(2) $A = \left(\begin{smallmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{smallmatrix}\right)$

(3) $A = \left(\begin{smallmatrix} -3 & 2 & 2 \\ 2 & -3 & 2 \\ 2 & 2 & -3 \end{smallmatrix}\right)$

(4) $A = \left(\begin{smallmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$

(5) $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{smallmatrix}\right)$

(6) $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \alpha \end{smallmatrix}\right)$ für $\alpha \in \mathbf{R}$. (Fallunterscheidung!)

Aufgabe 125 (§9.1, §5.2.3, §9.2) Sei $n \geqslant 1$. Seien A, $B \in \mathbf{R}^{n\times n}$.

(1) Falls A und B symmetrisch und positiv definit sind, ist dann $A+B$ positiv definit?

(2) Ist stets $\det(A+B) = \det(A) + \det(B)$?

(3) Sei $n = 3$ und seien x_1, x_2 und x_3 die Spalten von A. Ist $\det A = x_1^{\mathrm{t}}(x_2 \times x_3)$?

(4) Falls A symmetrisch und negativ definit ist, ist A dann invertierbar?

Aufgabe 126 (§3.4, §10.1)
Untersuche $f(x,y) = x^4 - 2x^2y + y^2 + 2x^2$ auf $\mathbf{R}^2$ auf lokale Extremstellen.

(1) Verwende hierzu die alte Methode aus §3.4.

(2) Verwende hierzu die neue Methode aus §10.1.
Inwiefern stimmen die Methoden überein?

Aufgabe 127 (§10.1)
Untersuche $f(x,y,z) = xy + yz + zx + x^2 + y^2 + z^2$ auf $\mathbf{R}^3$ auf lokale Extremstellen.

Aufgabe 128 (§10.1) Definiere f auf $\mathbf{R}^3$ durch $f(x,y,z) := \sin(x)\sin(y)\sin(z)$.
Ist (x_0, y_0, z_0) eine lokale Extremstelle von f ? Wenn ja, was für eine ?

(1) $(x_0, y_0, z_0) = (\pi/4, \pi/4, \pi/4)$

(2) $(x_0, y_0, z_0) = (\pi/2, \pi/2, \pi/2)$

(3) $(x_0, y_0, z_0) = (\pi/2, -\pi/2, \pi/2)$

Aufgabe 129 (§10.1) Definiere f auf $\mathbf{R}^3$ durch $f(x, y, z) := \sin(xyz) - \sin(z)$.

Ist $(x_0\,, y_0\,, z_0)$ eine lokale Extremstelle von f? Entscheide, falls möglich.

(1) $(x_0\,, y_0\,, z_0) = (0, 0, \pi/2)$

(2) $(x_0\,, y_0\,, z_0) = (1, 1, 0)$

Aufgabe 130 (§10.1) Untersuche f auf lokale Extremstellen auf $\mathbf{R}^n$.

(1) $n = 3,\ f(x, y, z) = 2x^2 - 2xy + y^2 - 2y - xz^2 + 2z^2$.

(2) $n = 3,\ f(x, y, z) = (x + y)\mathrm{e}^{-(x^2+y^2+z^2)}$.

(3) $n = 4,\ f(x, y, z, w) = 2x^3 + y^2 + z^2 + w^2 - 2x^2 - 2xw$.

Aufgabe 131 (§10.2)

Der Flächeninhalt eines Rechtecks mit den Seitenlängen x und y beträgt $f(x, y) := xy$, mit $(x, y) \in D := \mathbf{R}_{>0} \times \mathbf{R}_{>0}$.

Verwende die Methode aus §10.2.1, um für den Flächeninhalt eine lokale Maximalstelle unter der Nebenbedingung, daß der Umfang des Rechtecks 4 ist, d.h. daß $g_1(x, y) := 2x + 2y - 4 = 0$ ist, zu finden.

Bestätige durch direkte Verifikation, daß dort der Flächeninhalt in der Tat maximal wird (also nicht nur lokal maximal).

Aufgabe 132 (§10.2)

Das Volumen eines Quaders mit den Kantenlängen x, y und z beträgt $f(x, y, z) = xyz$, wobei $(x, y, z) \in D := \mathbf{R}_{>0} \times \mathbf{R}_{>0} \times \mathbf{R}_{>0}$.

Seine Oberfläche beträgt $a(x, y, z) := 2xy + 2xz + 2yz$.

Seine Gesamtkantenlänge beträgt $k(x, y, z) := 4x + 4y + 4z$.

(1) Zeige, daß $(x_0\,, y_0\,, z_0) = (1, 1, 1)$ eine lokale Maximalstelle der Volumenfunktion $f(x, y, z)$ unter der Nebenbedingung $g_1(x, y, z) := a(x, y, z) - 6 = 0$ ist, d.h. unter der Nebenbedingung, daß die Oberfläche 6 beträgt.

(2) Zeige, daß $(x_0\,, y_0\,, z_0) = (\frac{11}{4}\,, \frac{1}{2}\,, \frac{1}{2})$ eine lokale Maximalstelle der Volumenfunktion $f(x, y, z)$ unter den Nebenbedingung $g_1(x, y, z) := a(x, y, z) - 6 = 0$ und $g_2(x, y, z) := k(x, y, z) - 15 = 0$ ist, d.h. unter den Nebenbedingungen, daß die Oberfläche 6 und die Gesamtkantenlänge 15 beträgt.

Aufgabe 133 (§10.2, §3.2.3.2)

Untersuche $f(x, y) := 2x^2 - y^2$ auf $\mathbf{R}^2$ unter der Nebenbedingung $g_1(x, y) = y - x^2 = 0$ mit der Methode aus §10.2.1.

Bestätige das Resultat durch Einsetzen der Nebenbedingung $y = x^2$ in $f(x, y)$ und Verwenden der Methode aus §3.2.3.2.

Aufgabe 134 (§10.2)

(1) Ist $(0,0,0)$ eine lokale Extremstelle von $f(x,y,z) := x^3+y^2+xyz+2y$ auf $\mathbf{R}^3$ unter der Nebenbedingung $g_1(x,y,z) := x^2+y^2+z^2+y = 0$?

(2) Ist $(1,-1,-1,1)$ eine lokale Extremstelle von $f(x,y,z,w) := x^3+y^3+z^3+w^3$ auf $\mathbf{R}^4$ unter den Nebenbedingungen $g_1(x,y,z,w) := x^2+y^2+z^2+w^2-4 = 0$ und $g_2(x,y,z,w) := xyz+yzw-2 = 0$?

(3) Untersuche $f(x,y,z,w,v) := x^2+y^2+2z-w^2-v^2$ auf $(\mathbf{R}_{>0})^5$ auf lokale Extremstellen unter den Nebenbedingungen $g_1(x,y,z,w,v) := xyz-4 = 0$ und $g_2(x,y,z,w,v) := zvw-1 = 0$.

Aufgabe 135 (§10.2)

(1) Für eine Dose von der Form eines Zylinders wird bei gegebenem Volumen nach dem minimalen Materialaufwand gefragt, d.h. nach der minimalen Oberfläche.

Sei h die Höhe und r der Radius des Zylinders.

Das vorgegebene Volumen ist $16\pi\,\text{cm}^3$ (also $\approx 50\,\text{ml}$).

Es genüge, eine lokale Minimalstelle für die Oberfläche zu finden.

(Hinweis: Das Volumen beträgt $\pi r^2 h$, die Oberfläche $2\pi(r^2+rh)$.)

(2) Für eine Dose von der Form eines Zylinders, dem ein Kegel aufgesetzt wird, wird bei gegebenem Volumen nach der minimalen Oberfläche gefragt.

Sei h die Höhe und r der Radius des Zylinders. Sei k die Höhe des aufgesetzen Kegels.

Das vorgegebene Volumen ist $45(5+3\sqrt{5})\pi\,\text{cm}^3$ (also $\approx 1655\,\text{ml}$).

Es genüge, eine lokale Minimalstelle für die Oberfläche zu finden. Taschenrechner!

(Hinweis: Das Volumen der Dose beträgt $\frac{\pi}{3}(r^2(3h+k))$. Die Oberfläche der Dose beträgt $\pi(r^2+2rh+r(r^2+k^2)^{1/2})$.)

Aufgabe 136 (§11.1)

Berechne, d.h. schreibe das Resultat in der Form $a+b\mathrm{i}$ mit $a,\, b \in \mathbf{R}$.

(1) $(2+3\mathrm{i})-(5+\mathrm{i})$

(2) $(2+3\mathrm{i})(5+2\mathrm{i})$

(3) $(1+\mathrm{i})^2$. Skizze!

(4) $\dfrac{2+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}$

Aufgabe 137 (§11.1)
Berechne, d.h. schreibe in der Form $a + b\mathrm{i}$ mit $a,\, b \in \mathbf{R}$ oder als reelle Zahl.

(1) $\frac{2}{1+\mathrm{i}} - \frac{1}{1-\mathrm{i}}$

(2) $(2+\mathrm{i})^6$

(3) $(1+\mathrm{i})^{18}$

(4) $(\frac{3+2\mathrm{i}}{2-\mathrm{i}})^2$

(5) $|(3+4\mathrm{i})^3|$

(6) $\mathrm{Re}((1+2\mathrm{i})^{-2}(\overline{2-\mathrm{i}}))$

Aufgabe 138 (§11.1) Seien $z,\, w \in \mathbf{C}$. Begründe.

(1) Es ist $\overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}$.

(2) Es ist $\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$.

(3) Es ist $|z|^2 = z\bar{z}$.

(4) Es ist $\mathrm{Re}(z) = \frac{1}{2}(z+\bar{z})$ und $\mathrm{Im}(z) = \frac{1}{2\mathrm{i}}(z-\bar{z})$.

(5) Es ist $|zw| = |z||w|$. (Hinweis: (2) und (3).)

(6) Es ist $|z^{-1}| = |z|^{-1}$ falls $z \neq 0$. (Hinweis: (5).)

Aufgabe 139 (§11.1)

(1) Finde alle $z \in \mathbf{C}$ mit $z^2 = -\mathrm{i}$ (ohne Verwendung von §11.2).

(2) Finde alle $z \in \mathbf{C}$ mit $z^4 = -1$ (ohne Verwendung von §11.2).

Aufgabe 140 (§11.1)

(1) Finde alle $z \in \mathbf{C}$ mit $z^3 = 1$ (ohne Verwendung von §11.2).

(2) Finde alle $z \in \mathbf{C}$ mit $z^6 = 1$ (ohne Verwendung von §11.2).

Aufgabe 141 (§11.1) Seien $z,\, w \in \mathbf{C}$.

Begründe unter Verwendung der Dreiecksungleichung.

(1) Es ist $|z| \leqslant |\,\mathrm{Re}(z)| + |\,\mathrm{Im}(z)|$.

(2) Es ist $||z| - |w|| \leqslant |z - w|$ und $||z| - |w|| \leqslant |z + w|$.

Aufgabe 142 (§11.2.1) Berechne $\sin(\mathrm{i})$ näherungsweise über die Potenzreihe, unter Verwendung von

$$\sin(z) \;=\; \textstyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \;\approx\; z - \frac{z^3}{6} + \frac{z^5}{120}\,.$$

Bestätige, daß $\sin(\mathrm{i}) = \frac{\mathrm{i}}{2}(\mathrm{e} - \frac{1}{\mathrm{e}})$. Vergleiche numerisch mit der zuvor erreichten Näherung.

Aufgabe 143 (§11.2.2) Berechne.

(1) $\mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}/2}$

(2) $\mathrm{e}^{\ln(2)+\pi\mathrm{i}/3}$

Aufgabe 144 (§11.2.2)
Berechne. Gib eine Näherung mit einem Fehler $< 10^{-5}$ im Real- und im Imaginärteil.

(1) $\mathrm{e}^{1+3\mathrm{i}\pi/2}$

(2) $\mathrm{Im}(\mathrm{e}^{-\ln(7)+\frac{7}{6}\mathrm{i}\pi})$

(3) $\mathrm{e}^{((1+\mathrm{i})^{-1})}$

(4) $\mathrm{e}^{\ln(3)(1+\mathrm{i})}$

Aufgabe 145 (§11.2.2)

(1) Finde ein $z \in \mathbf{C}$ mit $\cos(z) \in \mathbf{R}_{>2}$.

(2) Finde ein $z \in \mathbf{C}$ mit $\cos(z) \in \mathbf{R}_{<-2}$.

Aufgabe 146 (§11.2.2)

(1) Finde alle $z \in \mathbf{C}$ mit $z^3 = 1$.

(2) Finde alle $z \in \mathbf{C}$ mit $z^6 = 1$.

Verwende nun, im Unterschied zu Aufgabe 140, den Ansatz $z = \mathrm{e}^{x+\mathrm{i}y}$ mit $x \in \mathbf{R}$ und $y \in [0, 2\pi)$.

Aufgabe 147 (§11.1, §11.2.2)

(1) Finde alle $z \in \mathbf{C}$ mit $z^2 + 2z + 2 = 0$.

(2) Finde alle $w \in \mathbf{C}$ mit $w^4 + 2w^2 + 2 = 0$.

Aufgabe 148 (§11.2.2)

(1) Bestätige, daß $\mathrm{e}^{\bar{z}} = \overline{\mathrm{e}^{z}}$ für $z \in \mathbf{C}$.

(2) Bestätige, daß $\sin(z)^2 + \cos(z)^2 = 1$ auch für alle $z \in \mathbf{C}$ gilt.

(3) Bestätige, daß

$$\begin{array}{rcl} \sin(z+w) & = & \sin(z)\cos(w) + \cos(z)\sin(w) \\ \cos(z+w) & = & \cos(z)\cos(w) - \sin(z)\sin(w) \end{array}$$

für $z,\ w\ \in\ \mathbf{C}$.

Aufgabe 149 (§11.2.2, §11.3.2)

(1) Leite aus der Additionsregel für den Cosinus her, daß $\cos(x)^2 = \frac{1}{2}(\cos(2x)+1)$ ist für $x \in \mathbf{R}$.

(Hinweis: $\cos(x)^2 = \frac{1}{2}(\cos(x)^2 - \sin(x)^2) + \frac{1}{2}(\cos(x)^2 + \sin(x)^2)$, beide Klammern lassen sich umformen.)

(2) Leite direkt mit Euler her, daß $\cos(x)^2 = \frac{1}{2}(\cos(2x)+1)$ ist für $x \in \mathbf{R}$.

(3) Verwende (1) (oder (2)) zur Berechnung von $\int_0^\pi \cos(x)^2\,\mathrm{d}x$.

(4) Verwende direkt Exponentialfunktionen zur Berechnung von $\int_0^\pi \cos(x)^2\,\mathrm{d}x$.

Aufgabe 150 (§11.2.2, §11.3.2) Berechne.

(1) $\int_0^\pi \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\,\mathrm{d}x$.

(2) $\int_0^{\pi/2} \sin(x)\cos(x)\,\mathrm{d}x$, einmal unter Verwendung der Additionsregel für den Sinus, einmal unter Verwendung von Exponentialfunktionen.

(3) $\int_0^\pi \sin(x)^3\cos(x)^2\,\mathrm{d}x$, unter Verwendung von Exponentialfunktionen.

Aufgabe 151 (§11.2.2, §11.3.2, §6.2) Sei $D \subseteq \mathbf{R}$ offen. Sei $f : D \longrightarrow \mathbf{C}$ gegeben mit $\mathrm{Im}\circ f$ und $\mathrm{Re}\circ f$ stetig. Seien $a,\ b\ \in\ \mathbf{R}$ mit $a \leqslant b$ und $[a,b] \subseteq D$. Sei $\lambda \in \mathbf{C}$.

Bestätige durch Nachrechnen.

(1) Es ist $\int_a^b \lambda f(x)\,\mathrm{d}x = \lambda \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

(2) Es ist $|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$.
(Hinweis: Multipliziere zunächst Integral mit Faktor $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$ so, daß es reell wird.)

Aufgabe 152 (§11.3.2, §6.2) Seien $a,\ b\ \in\ \mathbf{R}$ mit $a \leqslant b$. Sei $s \in \mathbf{C}$.

Bestätige die folgenden Formeln mittels Hauptsatz aus §6.2.

(1) Sei $s \neq 0$. Es ist $\int_a^b \mathrm{e}^{sx}\,\mathrm{d}x \;=\; [\frac{1}{s}\,\mathrm{e}^{sx}]_{x=a}^b$.

(2) Es ist $\int_a^b (\frac{1}{x-s} + \frac{1}{x-\bar{s}})\,\mathrm{d}x = [\ln\big((x - \mathrm{Re}(s))^2 + \mathrm{Im}(s)^2\big)]_{x=a}^b$.

(3) Es ist $\int_a^b (\frac{1}{x-s} - \frac{1}{x-\bar{s}})\,\mathrm{d}x = [2\mathrm{i} \arctan\big((x - \mathrm{Re}(s))/\,\mathrm{Im}(s)\big)]_{x=a}^b$.

Aufgabe 153 (§11.3)
Berechne $\int_0^1 \frac{x}{(x^2+1)(x+1)}\,\mathrm{d}x$. (Hinweis: $x^2 + 1 = (x + \mathrm{i})(x - \mathrm{i})$, Partialbruchzerlegung.)

Aufgabe 154 (§11.3) Berechne.

(1) $\int_0^1 \frac{(x+1)^2}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x$.

(2) $\int_{-1}^1 \frac{1}{x^4+4}\,\mathrm{d}x$. (Hinweis: $(\pm 1 \pm \mathrm{i})^4 = -4$.)

(3) $\int_{-1}^1 \frac{1}{(x^2+1)^3}\,\mathrm{d}x$.

Aufgabe 155 (§12.2) Bestimme eine Funktion $y(x)$ mit $y(1) = 2$ und

$$y' \;=\; y^2$$

auf einem offenen Intervall von $\mathbf{R}$, das 1 enthält.

Aufgabe 156 (§12.2 (oder §12.3))
Bestimme eine Funktion $y(x)$ auf $\mathbf{R}$ mit $y(2) = 1$ und

$$y' \;=\; xy\;.$$

Aufgabe 157 (§12.2)

(1) Bestimme eine Funktion $y(x)$ mit $y(0) = 1$ und

$$y' \;=\; y^3$$

auf einem offenen Intervall von $\mathbf{R}$, das 0 enthält.

(2) Bestimme eine Funktion $y(x)$ mit $y(0) = -1$ und

$$y' \;=\; y^3$$

auf einem offenen Intervall von $\mathbf{R}$, das 0 enthält.

(3) Gibt es eine Funktion wie in (1), die aber auf ganz $\mathbf{R}$ definiert ist?

Aufgabe 158 (§12.2) Bestimme eine Funktion $y(x)$ mit $y(1) = 0$, $y'(1) = 2$ und

$$y'' \;=\; y'^2/x^2$$

auf einem offenen Intervall von $\mathbf{R}$, das 1 enthält. (Hinweis: Substituiere $u := y'$.)

Aufgabe 159 (§12.2) Bestimme eine Funktion $y(x)$ auf $\mathbf{R}$ mit $y(0) = 0$ und

$$y' \;=\; \frac{x}{y+1}\;.$$

Aufgabe 160 (§12.2) Bestimme eine Funktion $y(x)$ mit $y(1) = 1$ und

$$y'^2 \;=\; xy$$

auf einem offenen Intervall von $\mathbf{R}$, das 1 enthält. (Hinweis: Zuerst Wurzel.)

Aufgabe 161 (§12.3) Finde eine Lösung der Differentialgleichung

$$y' \;=\; y + x$$

auf $\mathbf{R}$ mit $y_0 = y(0) = 0$ bei $x_0 = 0$.

Aufgabe 162 (§12.3)

(1) Finde eine Lösung der Differentialgleichung

$$y' \;=\; yx^{-1} + x + 1$$

auf $\mathbf{R}_{>0}$ mit $y(1) = 1$.

(2) Finde eine Lösung der Differentialgleichung

$$y' \;=\; \ln(x)y + \ln(x)$$

auf $\mathbf{R}_{>0}$ mit $y(1) = 0$.

Aufgabe 163 (§12.4.1, §12.4.2) Finde eine Lösung der Differentialgleichung

$$y'' + 2y' + y \;=\; 0$$

auf $\mathbf{R}$ mit $y_0 = y(0) = 0$ und $y'_0 = y'(0) = 1$ bei $x_0 = 0$.

Aufgabe 164 (§12.4.1, §12.4.2)

(1) Finde eine Lösung der Differentialgleichung

$$y'' + 2y' + 2y \;=\; 0$$

auf $\mathbf{R}$ mit $y(0) = 0$ und $y'(0) = 1$.

(2) Finde eine Lösung der Differentialgleichung

$$y'' + 2y' - 2y \;=\; 0$$

auf $\mathbf{R}$ mit $y(0) = 2$ und $y'(0) = -2$.

(3) Finde alle Lösungen der Differentialgleichung

$$y'' + y' - 2y \;=\; 0$$

auf $\mathbf{R}$.

Aufgabe 165 (§12.3, §12.4.2)

(1) Verifiziere das zweite Lemma aus §12.3, allerdings ohne die Eindeutigkeit zu belegen.

(2) Verifiziere das Lemma aus §12.4.2 durch Nachrechnen, allerdings ohne zu belegen, daß jede Lösung von dieser Form ist.

Aufgabe 166 (§12.4.1, §12.4.3, Aufgabe 163)
Finde eine Lösung der Differentialgleichung

$$y'' + 2y' + y \;=\; x$$

auf $\mathbf{R}$ mit $y_0 = y(0) = 0$ und $y'_0 = y'(0) = 0$ bei $x_0 = 0$.

Aufgabe 167 (§12.4.1, §12.4.3, Aufgabe 164)

(1) Finde eine Lösung der Differentialgleichung

$$y'' + 2y' + 2y \;=\; 2x^2$$

auf $\mathbf{R}$ mit $y(0) = 0$ und $y'(0) = 0$.

(2) Finde alle Lösungen der Differentialgleichung

$$y'' + 2y' - 2y \;=\; \sin(x)$$

auf $\mathbf{R}$.

Aufgabe 168 (§12.5.1) Finde eine reelle Folge $(x_n)_{n\geqslant 0}$ mit $x_0 = 1$ und

$$x_{n+1} \;=\; x_n + 3\cdot 3^n$$

für $n \geqslant 0$.

Aufgabe 169 (§12.5.1, §12.5.2)

(1) Finde eine reelle Folge $(x_n)_{n\geqslant 0}$ mit $x_0 = 0$ und

$$x_{n+1} \;=\; \tfrac{1}{2}\,x_n + 1$$

für $n \geqslant 0$.

(2) Finde eine reelle Folge $(x_n)_{n\geqslant 0}$ mit $x_0 = \frac{13}{7}$, $x_1 = \frac{27}{7}$ und

$$x_{n+2} \;=\; 4x_{n+1} + 4x_n + 1$$

für $n \geqslant 0$.

(3) Finde eine reelle Folge $(x_n)_{n\geqslant 0}$ mit $x_0 = 1$, $x_1 = 0$ und

$$x_{n+2} \;=\; -2x_{n+1} - x_n + 2^n$$

für $n \geqslant 0$.

Aufgabe 170 (§12.4.1, §12.4.3, §12.5.1, §12.5.2)

(1) Verifiziere, in der Notation von §12.4.3, daß $y(x) := u(x)H(x)$ eine Lösung der Differentialgleichung $y'' + 2ay' + by = c(x)$ ist.

(2) Verifiziere, daß die im Lemma aus §12.5.1 angegebenen Folgen im jeweiligen Fall eine Lösung darstellen.

(3) Verifiziere, daß die im Lemma aus §12.5.2 angegebenen Folgen im jeweiligen Fall eine Lösung darstellen.

A.2 Lösungen

Aufgabe 1

(1) Es wird
$$\frac{1}{11} \;=\; 0,\overline{09}.$$

(2) Es wird
$$0,291\overline{6} \;=\; \frac{291}{1000} + \frac{6}{9000} \;=\; \frac{2625}{9000} \;=\; \frac{7}{24}\,.$$

Aufgabe 2

(1) (i) Es wird $\frac{1}{7} = 0{,}\overline{142857}$, da sich bei schriftlicher Division nach 6 Stellen der Rest 1 einstellt.

(ii) Es wird $\frac{4}{41} = 0{,}\overline{09756}$, da sich bei schriftlicher Division nach 5 Stellen der Rest 4 einstellt

(2) (i) Es wird $0{,}\overline{629} = \frac{629}{999} = \frac{17}{27}$.

(ii) Es wird $0{,}3\overline{1122} = \frac{3}{10} + \frac{1122}{99990} = \frac{3}{10} + \frac{102}{9090} = \frac{909}{3030} + \frac{34}{3030} = \frac{943}{3030}$.

Aufgabe 3

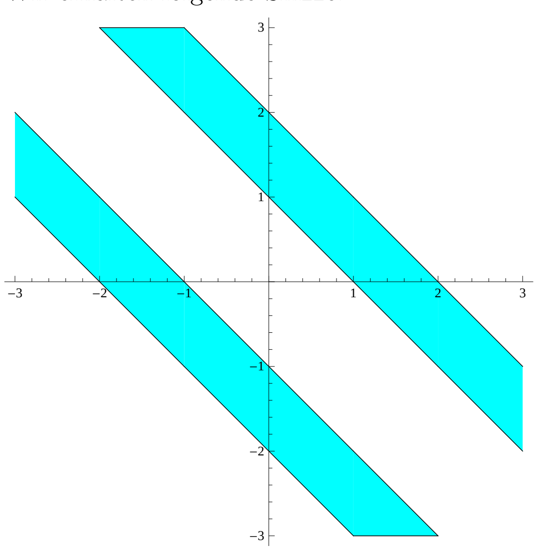
(1) Ja.
Falls $r \geqslant 0$ und $s \geqslant 0$, ergibt sich wegen $rs \geqslant 0$ links wie rechts rs.
Falls $r < 0$ und $s \geqslant 0$, ergibt sich wegen $rs \leqslant 0$ links $-rs$ und rechts $(-r)s$, also dasselbe.
Falls $r \geqslant 0$ und $s < 0$, ergibt sich wegen $rs \leqslant 0$ links $-rs$ und rechts $r(-s)$, also dasseSecInt-TechSublbe.
Falls $r < 0$ und $s < 0$, ergibt sich wegen $rs > 0$ links rs und rechts $(-r)(-s)$, also dasselbe.

(2) Nein. Z.B. ist $|1-2| = |-1| = 1$, aber $|1| - |2| = 1 - 2 = -1$.

(3) Ja. Denn nach Definition ist $\sqrt{r^2}$ die eindeutig bestimmte Zahl x aus $\mathbf{R}_{\geqslant 0}$ mit $x^2 = r^2$.
Und in der Tat ist $|r| \in \mathbf{R}_{\geqslant 0}$ und $|r|^2 \overset{(1)}{=} |r^2| = r^2$.

Aufgabe 4

(1) Wir erhalten folgende Skizze.



Die Streifen sind nach links oben und rechts unten fortgesetzt zu denken.

Hierbei gehören die obere und die untere Gerade nicht zur fraglichen Menge, die mittleren beiden aber schon.

(2) Es sind die $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ mit $|x + y| \leqslant |x - y|$ zu finden.

Falls $y \geqslant -x$ und $y \geqslant x$ (also falls (x, y) oberhalb beider Winkelhalbierenden), dann wird die Bedingung zu $x + y \leqslant y - x$, i.e. zu $x \leqslant 0$.

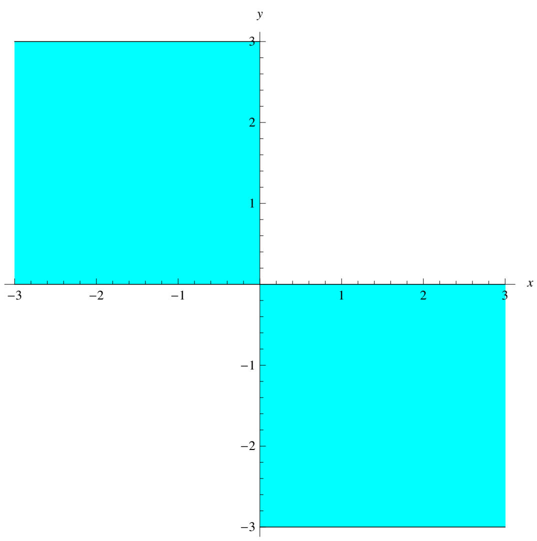
Falls $y \geqslant -x$ und $y \leqslant x$ (also falls (x, y) rechts beider Winkelhalbierenden), dann wird die Bedingung zu $x + y \leqslant x - y$, i.e. zu $y \leqslant 0$.

Falls $y \leqslant -x$ und $y \geqslant x$ (also falls (x, y) links beider Winkelhalbierenden), dann wird die Bedingung zu $-x - y \leqslant y - x$, i.e. zu $y \geqslant 0$.

Falls $y \leqslant -x$ und $y \leqslant x$ (also falls (x, y) unterhalb beider Winkelhalbierenden), dann wird die Bedingung zu $-x - y \leqslant x - y$, i.e. zu $x \geqslant 0$.

(Diese Fallunterscheidungen überschneiden sich, decken aber jedenfalls alles ab.)

Insgesamt erhalten wir folgende Skizze.



Die Felder sind nach links oben und rechts unten fortgesetzt zu denken.

Hierbei gehören die Achsen auch zur fraglichen Menge.

Aufgabe 5

Es wird

$$\begin{aligned} (x-y)^3 &= (x+(-y))^3 \\ &= \binom{3}{0} x^3 y^0 + \binom{3}{1} x^2 (-y)^1 + \binom{3}{2} x^1 (-y)^2 + \binom{3}{3} x^0 (-y)^3 \\ &= x^3 - 3x^2 y + 3xy^2 - y^3 \,. \end{aligned}$$

Aufgabe 6

Es wird

$$\begin{aligned} (x-y)^4 &= (x+(-y))^4 \\ &= \binom{4}{0} x^4 y^0 + \binom{4}{1} x^3 (-y)^1 + \binom{4}{2} x^2 (-y)^2 + \binom{4}{3} x^1 (-y)^3 + \binom{4}{4} x^0 (-y)^4 \\ &= x^4 - 4x^3 y + 6x^2 y^2 - 4xy^3 + y^4 \,. \end{aligned}$$

Aufgabe 7

Wir behaupten, daß
$$\sum_{k=1}^{n}(k+1) \overset{!}{=} \frac{1}{2}\,n^2 + \frac{3}{2}\,n$$
für $n \geqslant 1$.

Wir wollen diese Behauptung mit Induktion zeigen.

Induktionsanfang. Sei $n = 1$. Die linke Seite gibt $1 + 1 = 2$. Die rechte Seite gibt $\frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 2$. Somit ist die Behauptung in diesem Fall richtig.

Induktionsschritt. Sei $n \geqslant 1$.

Sei die Behauptung für n bekannt, d.h. sei die Gleichheit $\sum_{k=1}^{n}(k+1) = \frac{1}{2}\,n^2 + \frac{3}{2}\,n$ bekannt (Induktionsvoraussetzung).

Wir haben zu zeigen, daß die Behauptung für $n+1$ gilt, d.h. daß
$$\sum_{k=1}^{n+1}(k+1) \overset{!}{=} \frac{1}{2}\,(n+1)^2 + \frac{3}{2}\,(n+1)\ .$$

Dazu rechnen wir
$$\begin{array}{rcl}
\sum_{k=1}^{n+1}(k+1) & = & \left(\sum_{k=1}^{n}(k+1)\right) + ((n+1)+1) \\
& \overset{\text{I.V.}}{=} & \frac{1}{2}\,n^2 + \frac{3}{2}\,n + n + 2 \\
& = & \frac{1}{2}\,n^2 + \frac{5}{2}\,n + 2 \\
& = & \frac{1}{2}\,(n+1)^2 + \frac{3}{2}\,(n+1)\ .
\end{array}$$

Somit ist unsere Behauptung bewiesen.

Aufgabe 8

(1) Es wird $f(2) = 1,\ f(3) = 4,\ f(4) = 10,\ f(5) = 20,\ \ldots$. Nach einem Blick aufs Pascalsche Dreieck (oder auf den Hinweis) vermuten wir, daß
$$f(n) \overset{!}{=} \binom{n+1}{3}\ .$$

Dies wollen wir mit Induktion zeigen.

Induktionsanfang. Sei $n = 2$. Es ist $f(2) = \sum_{k=2}^{2}\binom{k}{2} = \binom{2}{2} = 1$. Auf der anderen Seite ist ebenfalls $\binom{2+1}{3} = 1$. Also ist $f(2) = \binom{2+1}{3}$.

Induktionsschritt. Sei die Gleichung $f(n) = \binom{n+1}{3}$ für ein $n \geqslant 2$ bekannt (Induktionsvoraussetzung). Wir wollen sie für $n+1$ zeigen. Es wird
$$\begin{array}{rcl}
f(n+1) & = & \sum_{k=2}^{n+1}\binom{k}{2} \\
& = & \binom{n+1}{2} + \sum_{k=2}^{n}\binom{k}{2} \\
& \overset{\text{I.V.}}{=} & \binom{n+1}{2} + \binom{n+1}{3} \\
& = & \binom{n+2}{3} \\
& = & \binom{(n+1)+1}{3}\ ,
\end{array}$$

wie behauptet.

(2) Es wird

$$f(-1) = -2\ ,\quad f(0) = -2\ ,\quad f(1) = 0\ ,\quad f(2) = 4\ ,\quad f(3) = 10\ ,\quad f(4) = 18\ ,\quad \ldots$$

Dies vergleichen wir gemäß Hinweis mit n^2 und erhalten

$$f(-1)-(-1)^2 = -3\ ,\quad f(0)-0^2 = -2\ ,\quad f(1)-1^2 = -1\ ,\quad f(2)-2^2 = 0\ ,\quad f(3)-3^2 = 1\ ,\quad f(4)-4^2 = 2\ ,\quad \ldots$$

Also vermuten wir, daß $f(n) - n^2 \overset{!}{=} n - 2$, d.h. daß

$$f(n) \overset{!}{=} n^2 + n - 2\ .$$

Dies wollen wir mit Induktion zeigen. Schreibe $g(n) := n^2 + n - 2$.

Induktionsanfang. Sei $n = -1$. Es ist $f(-1) = \sum_{k=-1}^{-1} 2k = 2(-1) = -2$. Es ist $g(-1) = (-1)^2 + (-1) - 2 = -2$. Also ist $f(-1) = g(-1)$.

Induktionsschritt. Sei die Gleichung $f(n) = g(n)$ für ein $n \geqslant -1$ bekannt (Induktionsvoraussetzung). Wir wollen sie für $n + 1$ zeigen. Es wird

$$\begin{array}{rcl} f(n+1) & = & \sum_{k=-1}^{n+1} 2k \\ & = & 2(n+1) + \sum_{k=-1}^{n} 2k \\ & \overset{\text{I.V.}}{=} & 2(n+1) + n^2 + n - 2 \\ & = & n^2 + 3n\ . \end{array}$$

Auf der anderen Seite wird

$$\begin{array}{rcl} g(n+1) & = & (n+1)^2 + (n+1) - 2 \\ & = & (n^2 + 2n + 1) + (n+1) - 2 \\ & = & n^2 + 3n\ . \end{array}$$

Also ist $f(n+1) = g(n+1)$.

Aufgabe 9

(1) Es wird $f(\{x_1\,,\, x_2\}) = \{y_1\,,\, y_2\}$.

(2) Es wird $f^{-1}(\{y_2\}) = \{x_1, x_3\}$.

(3) Es wird $(g \circ f)^{-1}(\{z_1\,,\, z_3\}) = \{x_1\,,\, x_2\,,\, x_3\}$.

(4) Es ist $g \circ f$ nicht injektiv, da $(g \circ f)^{-1}(\{z_1\}) = \{x_1\,,\, x_3\}$ aus mehr als einem Element besteht.
Es ist $g \circ f$ auch nicht surjektiv, da $(g \circ f)^{-1}(\{z_2\}) = \emptyset$ aus keinem Element besteht.

Aufgabe 10

(1) Es ist $f(\{1,2,3\}) = \{f(1),\, f(2),\, f(3)\} = \{2,1,2\} = \{1,2\}$.

(2) Es ist $f^{-1}(\{2,3\}) = \{\, x \in X\ :\ f(x) \in \{2,3\}\,\} = \{1,3,4\}$.

(3) Es bildet $g \circ f : X \longrightarrow Z$, $1 \mapsto 1$, $2 \mapsto 5$, $3 \mapsto 1$ ab.
Es ist $g \circ f$ nicht injektiv, da $(g \circ f)^{-1}(\{1\}) = \{1,3\}$ mehr als ein Element enthält.
Es ist $g \circ f$ nicht surjektiv, da z.B. $(g \circ f)^{-1}(\{3\}) = \emptyset$ weniger als ein Element enthält.

(4) Unter Verwendung von (3) wird $(g \circ f)^{-1}(\{5\}) = \{2\}$.

(5) Z.B. wird für $U_1 = \{1\}$ und $U_3 = \{3\}$ zum einen

$$f(U_1 \cap U_2) \;=\; f(\emptyset) \;=\; \emptyset \;,$$

zum anderen

$$f(U_1) \cap f(U_2) \;=\; \{2\} \cap \{2\} \;=\; \{2\} \;.$$

Also ist $f(U_1 \cap U_2) \subsetneq f(U_1) \cap f(U_2)$.

Aufgabe 11

(1) Ja. Für $f : X \longrightarrow Y$, $1 \mapsto 2$, $2 \mapsto 1$, $3 \mapsto 1$, $4 \mapsto 2$ ist $G = \Gamma_f$.

(2) Nein. Denn wäre G der Graph einer Abbildung, so müßte jedes Element von X einmal als linker Tupeleintrag auftreten. Es tritt aber 2 nicht auf.

(3) Nein. Denn wäre G der Graph einer Abbildung, so dürfte ein Element von X höchstens einmal als linker Tupeleintrag auftreten. Es ist aber z.B. $(4, 2)$ und $(4, -2)$ ein Element von G, und somit tritt 4 zweimal auf.

Aufgabe 12

Im folgenden erfolgen die Wertberechnungen großteils nur näherungsweise.

(1) Der Grenzwert existiert, es wird

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1 + 4n^3 - 2n}{n^4 + 1} \;=\; \lim_{n\to\infty} \frac{n^{-4} + 4n^{-1} - 2n^{-3}}{1 + n^{-4}} \;=\; \frac{\lim_n n^{-4} + \lim_n 4n^{-1} - 2\lim_n n^{-3}}{\lim_n 1 + \lim_n n^{-4}} \;=\; \frac{0}{1} \;=\; 0 \;.$$

Für $n = 3$ ergibt sich der Wert 1,256. Für $n = 10$ ergibt sich der Wert 0,398. (Für $n = 100$ ergibt sich der Wert 0,0400)

(2) Der Grenzwert existiert, es wird

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2 - n^3 - 2n}{2n^3 + n^2 - n + 1} \;=\; \lim_{n\to\infty} \frac{2n^{-3} - 1 - 2n^{-2}}{2 + n^{-1} - n^{-2} + n^{-3}} \;=\; \frac{2\lim_n n^{-3} - \lim_n 1 - 2\lim_n n^{-2}}{\lim_n 2 + \lim_n n^{-1} - \lim_n n^{-2} + \lim_n n^{-3}} \;=\; -\frac{1}{2} \;.$$

Für $n = 3$ ergibt sich der Wert $-0{,}5082$. Für $n = 10$ ergibt sich der Wert $-0{,}4868$. (Für $n = 100$ ergibt sich der Wert $-0{,}4976$.)

(3) Beachte zunächst, daß $\lim_{n\to\infty} n^{-3/2} = 0$ nach dem Sandwich-Lemma aus §2.2.2, da ja $n^{-2} \leqslant n^{-3/2} \leqslant n^{-1}$ ist für $n \geqslant 1$ und sowohl n^{-2} als auch n^{-1} für $n \to \infty$ gegen 0 konvergieren.

Der Grenzwert existiert damit, es wird

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2 - 2n + \sqrt{n}}{n^2 + 1/n} \;=\; \lim_{n\to\infty} \frac{1 - 2n^{-1} + n^{-3/2}}{1 + n^{-3}} \;=\; \frac{\lim_n 1 - 2\lim_n n^{-1} + \lim_n n^{-3/2}}{\lim_n 1 + \lim_n n^{-3}} \;=\; \frac{1}{1} \;=\; 1 \;.$$

Für $n = 3$ ergibt sich der Wert 0,5070. Für $n = 10$ ergibt sich der Wert 0,8308. (Für $n = 100$ ergibt sich der Wert 0,9810.)

(4) Der Grenzwert der Reihe existiert, es wird

$$\sum_{n=3}^{\infty} 3^{-n} \;=\; -1 - 3^{-1} - 3^{-2} + \sum_{n=0}^{\infty} (1/3)^n \;=\; -\frac{13}{9} + \frac{1}{1 - 1/3} \;=\; \frac{1}{18} \;=\; 0{,}0\overline{5} \;.$$

Für die ersten 3 Summanden ergibt sich $\sum_{n=3}^{5} 3^{-n} = \frac{1}{27} \cdot \frac{1-1/27}{1-1/3} = \frac{13}{243} \approx 0{,}0535$.

Für die ersten 10 Summanden ergibt sich $\sum_{n=3}^{12} 3^{-n} = \frac{1}{27} \cdot \frac{1-1/3^{10}}{1-1/3} \approx 0{,}05555461$.

(5) Der Grenzwert der Reihe existiert, es wird

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^n/3^{n+2} \;=\; \frac{1}{9}\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\frac{2}{3}\Big)^n \;=\; \frac{1}{9}\,\frac{1}{1-2/3} \;=\; \frac{1}{3} \;=\; 0{,}\overline{3}\,.$$

Für die ersten 3 Summanden ergibt sich $\sum_{n=0}^{2} 2^n/3^{n+2} = \frac{1}{9}\,\frac{1-(2/3)^3}{1-2/3} = \frac{19}{81} \approx 0{,}2345679$.

Für die ersten 10 Summanden ergibt sich $\sum_{n=0}^{9} 2^n/3^{n+2} = \frac{1}{9}\,\frac{1-(2/3)^{10}}{1-2/3} \approx 0{,}32755$.

(6) Der Grenzwert der Reihe existiert, es wird

$$\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n/n! \;=\; -\frac{(-1)^0}{0!} - \frac{(-1)^1}{1!} + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n/n! \;=\; \mathrm{e}^{-1} \;\approx\; 0{,}36787944117\,.$$

Für die ersten 3 Summanden ergibt sich $\sum_{n=2}^{4}(-1)^n/n! = 0{,}375$.

Für die ersten 10 Summanden ergibt sich $\sum_{n=2}^{11}(-1)^n/n! \approx 0{,}36787943923$.

Aufgabe 13

(1) Nach der Definiton der Exponentialfunktion geben die ersten 5 Summanden der definierenden Reihe

$$\sum_{n=0}^{4}\frac{(3/2)^n}{n!} \;\approx\; 4{,}3984\,.$$

Der tatsächliche Wert ist

$$e^{3/2} \;\approx\; 4{,}4817\,.$$

(2) Nach der Definiton der Exponentialfunktion geben die ersten 2, 3 bzw. 4 Summanden der definierenden Reihe

$$\sum_{n=0}^{1}\frac{(-1)^n}{n!} \;=\; 0\,, \qquad \sum_{n=0}^{2}\frac{(-1)^n}{n!} \;=\; 0{,}5 \qquad \text{bzw.} \qquad \sum_{n=0}^{3}\frac{(-1)^n}{n!} = 0{,}\overline{3}\,.$$

Der tatsächliche Wert ist

$$e^{-1} \;\approx\; 0{,}3679\,.$$

Aufgabe 14

(1) Es wird $\sum_{n=0}^{7}\frac{1}{n!} \approx 2{,}7182539$. Genauer ist bekanntlich $\mathrm{e} \approx 2{,}7182818$.

(2) Es wird $\sum_{n=0}^{2}\frac{(5/2)^n}{n!} = 6,625$. Es wird $\sum_{n=0}^{9}\frac{(5/2)^n}{n!} \approx 12{,}1791$. Genauer wird $\mathrm{e}^{5/2} \approx 12{,}1825$.

(3) Es wird $\sum_{n=0}^{6}\frac{(-\sqrt{2})^n}{n!} \approx 0{,}24502$. Genauer wird $\mathrm{e}^{-\sqrt{2}} \approx 0{,}24312$.

Aufgabe 15

Es gilt

$$\begin{array}{lcll}
\|A-B\| &=& \sqrt{(-3-2)^2+(-5)^2} &= \sqrt{50}\\
\|A-C\| &=& \sqrt{(4-2)^2+(-2)^2} &= \sqrt{8}\\
\|B-C\| &=& \sqrt{(4-(-3))^2+((-2)-(-5))^2} &= \sqrt{58}
\end{array}$$

Also haben B und C voneinander maximalen Abstand, und A und C voneinander minimalen Abstand.

Aufgabe 16

Es wird

$$\begin{array}{lcllcl}
\|(1,0,1)-(1,4,1)\| & = & ((1-1)^2+(0-4)^2+(1-1)^2)^{1/2} & = & 4 \\
\|(1,0,1)-(3,2,-2)\| & = & ((1-3)^2+(0-2)^2+(1-(-2))^2)^{1/2} & = & \sqrt{17} \\
\|(1,0,1)-(-1,-1,-1)\| & = & ((1-(-1))^2+(0-(-1))^2+(1-(-1))^2)^{1/2} & = & 3 \\
\|(1,4,1)-(3,2,-2)\| & = & ((1-3)^2+(4-2)^2+(1-(-2))^2)^{1/2} & = & \sqrt{17} \\
\|(1,4,1)-(-1,-1,-1)\| & = & ((1-(-1))^2+(4-(-1))^2+(1-(-1))^2)^{1/2} & = & \sqrt{33} \\
\|(3,2,-2)-(-1,-1,-1)\| & = & ((3-(-1))^2+(2-(-1))^2+((-2)-(-1))^2)^{1/2} & = & \sqrt{26}
\end{array}$$

Unter diesen vier Punkten haben $(1,0,1)$ und $(-1,-1,-1)$ voneinander den minimalen Abstand 3.

Ferner haben $(1,4,1)$ und $(3,2,-2)$ voneinander den maximalen Abstand $\sqrt{33}$.

Aufgabe 17

(1) Wir behaupten, daß $\lim_{n\to\infty} n^k \mathrm{e}^{-n} \overset{!}{=} 0$.

Auf eine solche Behauptung kommt man durch eine Beispielbetrachtung mit festem k und großem n, z.B. $k=3$ und $n=100$.

Wir verwenden das Sandwich-Lemma aus §2.2.2. Sei $y_n := n^k \mathrm{e}^{-n}$ für $n \geqslant 0$.

Es ist $n^k \mathrm{e}^{-n} \geqslant 0$ für alle $n \geqslant 0$, so daß wir als untere Folge $x_n := 0$ für $n \geqslant 0$ konstant wählen können.

Für die obere Folge suchen wir eine Stelle, ab der $\frac{(n+1)^k}{n^k} \leqslant \mathrm{e}/2$ ist. Umformen liefert, daß dies ab $(\sqrt[k]{\mathrm{e}/2}-1)^{-1}$ der Fall ist. Sei $m \geqslant (\sqrt[k]{\mathrm{e}/2}-1)^{-1}$ eine ganze Zahl. Wir wollen

$$y_n \;=\; n^k \mathrm{e}^{-n} \;\overset{!}{\leqslant}\; m^k (2/\mathrm{e})^m 2^{-n} \;=:\; z_n$$

für $n \geqslant m$ nachweisen.

Induktion über $n \geqslant m$.

Induktionsanfang $n = m$. Es wird $m^k \mathrm{e}^{-m} \;=\; m^k (2/\mathrm{e})^m 2^{-m}$. Der konstante Faktor auf der rechten Seite ist also genau so gewählt, daß der Induktionsanfang funktioniert.

Induktionsschritt von n nach $n+1$. Sei $n \geqslant m$. Sei

$$n^k \mathrm{e}^{-n} \;\overset{!}{\leqslant}\; m^k (2/\mathrm{e})^m 2^{-n}$$

als bekannt vorausgesetzt.

Es wird

$$\frac{(n+1)^k \mathrm{e}^{-(n+1)}}{n^k \mathrm{e}^{-n}} \;=\; \frac{(n+1)^k}{n^k}\,\mathrm{e}^{-1} \;\leqslant\; \frac{1}{2}$$

nach Wahl von m. Also ist

$$y_{n+1} \;=\; (n+1)^k \mathrm{e}^{-(n+1)} \;\leqslant\; \frac{1}{2} n^k \mathrm{e}^{-n} \;\overset{\text{I.V.}}{\leqslant}\; \frac{1}{2} m^k (2/\mathrm{e})^m 2^{-n} \;=\; m^k (2/\mathrm{e})^m 2^{-(n+1)} \;=\; z_{n+1}\,,$$

wie wir nachweisen wollten.

Betrachten wir alle drei Folgen erst ab dem m-ten Folgenglied, so wird $x_n \leqslant y_n \leqslant z_n$ für $n \geqslant m$, und $\lim_n x_n = \lim_n z_n = 0$. Das Sandwich-Lemma gibt also in der Tat $\lim_n n^k \mathrm{e}^{-n} = \lim_n y_n = 0$, wie eingangs behauptet.

(2) Wir behaupten, daß $\lim_{n\to\infty} n^k/n! \overset{!}{=} 0$.

Wir verwenden das Sandwich-Lemma aus §2.2.2. Sei $y_n := n^k/n!$ für $n \geqslant 0$.

Es ist $n^k/n! \geqslant 0$ für alle $n \geqslant 0$, so daß wir als untere Folge $x_n := 0$ für $n \geqslant 0$ konstant wählen können.

Wir wollen nachweisen, daß $n^k/n! \overset{!}{\leqslant} n^k \mathrm{e}^{-n} =: z_n$ für $n \geqslant 6$.

Dazu haben wir zu zeigen, daß $n! \overset{!}{\geqslant} \mathrm{e}^n$ für $n \geqslant 6$.

Induktion über $n \geqslant 6$.

Induktionsanfang $n = 6$. Es wird $6! = 720$ und $\mathrm{e}^6 \approx 403{,}43$.

Induktionsschritt. Sei $n \geqslant 6$. Sei $n! \geqslant \mathrm{e}^n$ als bekannt vorausgesetzt.

Es wird

$$(n+1)! \;=\; n \cdot n! \;\overset{\text{I.V.}}{\geqslant}\; n \cdot \mathrm{e}^n \;\geqslant\; \mathrm{e} \cdot \mathrm{e}^n \;=\; \mathrm{e}^{n+1}\,,$$

wie wir nachweisen wollten.

Damit ist in der Tat, daß $x_n \leqslant y_n \leqslant z_n$ für $n \geqslant 6$. Mit (1) erkennen wir, daß $\lim_n x_n = \lim_n z_n = 0$. Das Sandwich-Lemma gibt also in der Tat $\lim_n n^k/n! = \lim_n y_n = 0$, wie eingangs behauptet.

Aufgabe 18

(1) Es wird

$$\sum_{k=2}^{10} \left(\frac{2}{3}\right)^k \;=\; -1 - \frac{2}{3} + \sum_{k=0}^{10} \left(\frac{2}{3}\right)^k \;=\; -\frac{5}{3} + \frac{1-(2/3)^{11}}{1-2/3} \;\approx\; 1{,}33273\,.$$

Es wird

$$\sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^k \;=\; -1 - \frac{2}{3} + \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^k \;=\; -\frac{5}{3} + \frac{1}{1-2/3} \;=\; 1{,}\overline{3}\,.$$

(2) Es wird

$$\sum_{k=2}^{10} \left(-\frac{1}{2}\right)^{2k} \;=\; \sum_{k=2}^{10} \left(\frac{1}{4}\right)^k \;=\; -1 - \frac{1}{4} + \sum_{k=0}^{10} \left(\frac{1}{4}\right)^k \;=\; -\frac{5}{4} + \frac{1-(1/4)^{11}}{1-1/4} \;\approx\; 0{,}083333015441895\,.$$

Es wird

$$\sum_{k=2}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^{2k} \;=\; \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^k \;=\; -1 - \frac{1}{4} + \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^k \;=\; -\frac{5}{4} + \frac{1}{1-1/4} \;=\; 0{,}08\overline{3}\,.$$

Aufgabe 19

(1) Es wird $\sum_{k=2}^{50} \left(-\frac{4}{5}\right)^k = -1 - (-\frac{4}{5}) + \sum_{k=0}^{50} \left(-\frac{4}{5}\right)^k = -\frac{1}{5} + \frac{1-(-4/5)^{51}}{1-(-4/5)} \approx 0{,}35556190$.

Es wird $\sum_{k=2}^{\infty} \left(-\frac{4}{5}\right)^k = -1 - (-\frac{4}{5}) + \sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{4}{5}\right)^k = -\frac{1}{5} + \frac{1}{1-(-4/5)} = 0,3\overline{5}$.

(2) Es wird z.B.

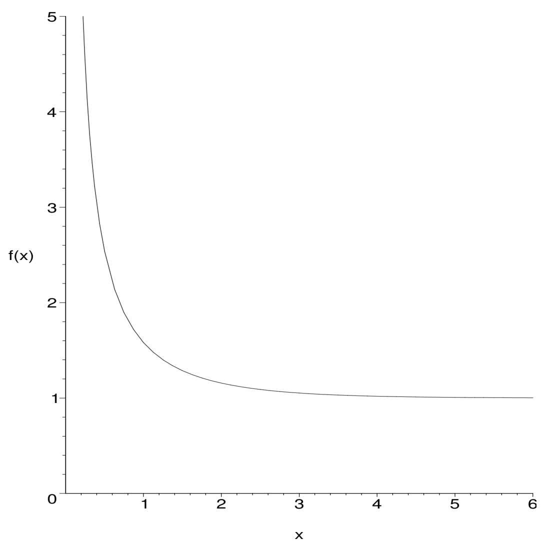
$$\begin{aligned}
\textstyle\sum_{k=3}^{n}(q^k + (-q)^k) &= -(1+1) - (q + (-q)) + (q^2 + (-q)^2) + \textstyle\sum_{k=0}^{n} q^k + \sum_{k=0}^{n} (-q)^k \\
&= -2 - 2q^2 + (\textstyle\sum_{k=0}^{n} q^k) + (\sum_{k=0}^{n} (-q)^k) \\
&= -2 - 2q^2 + \tfrac{1-q^{n+1}}{1-q} + \tfrac{1-(-q)^{n+1}}{1+q} \\
&= -2 - 2q^2 + \tfrac{1-q^{n+1}}{1-q} + \tfrac{1-q^{n+1}}{1+q} \\
&= \tfrac{2q^4 - 2 + (1-q^{n+1})(1+q) + (1-q^{n+1})(1-q)}{1-q^2} \\
&= \tfrac{2q^4 - 2 + 2 - 2q^{n+1}}{1-q^2} \\
&= 2q^4 \cdot \tfrac{1-q^{n-3}}{1-q^2}\,.
\end{aligned}$$

Alternativ kann man

$$\sum_{k=3}^{n}(q^k + (-q)^k) \;=\; 2(q^4 + q^6 + \cdots + q^{n-1}) \;=\; 2q^4(q^0 + q^2 + \cdots + q^{n-5}) \;=\; 2q^4 \cdot \frac{1 - q^{n-3}}{1 - q^2}$$

vorbringen.

(3) Ja. Denn es ist $\sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-kx} = \sum_{k=0}^{\infty} (\mathrm{e}^{-x})^k = \frac{1}{1-\mathrm{e}^{-x}}$, was auf $\mathbf{R}_{>0}$ gemäß $(1,2,3,4,5,8)$ der Bemerkung aus §2.4.2 eine stetige Funktion definiert.



Aufgabe 20

Setze $f(n) := \frac{\pi^2}{6} - \sum_{k=1}^{n} k^{-2}$.

Es wird $f(5) \approx 0{,}1813$, $f(10) \approx 0{,}0952$ und $f(50) \approx 0{,}0198$.

Man kann also vermuten, daß $\lim_n f(n) = 0$, d.h. daß $\sum_{k=1}^{\infty} k^{-2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Diese Vermutung trifft in der Tat zu.

Aufgabe 21

(1) Es wird $f(100) \approx 2{,}704814$, $f(10000) \approx 2{,}718146$ und $f(10^6) \approx 2{,}7182804$, was sich immer mehr $\mathrm{e} = 2{,}718281828459$ zu nähern scheint. Man kann also vermuten, daß $\lim_{n\to\infty}(1 + n^{-1})^n = \mathrm{e}$.

Der Binomische Lehrsatz liefert

$$(1 + n^{-1})^n \;=\; \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} n^{-k} \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} n^{-k} \,,$$

wobei bei zweiterer Summe nur Nullen hinzukamen.

Wir berechnen für festes $k \geqslant 0$

$$\begin{array}{rcl} \lim_n \binom{n}{k} n^{-k} & = & \lim_n \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!n^k} \\ & = & \frac{1}{k!} \lim_n \frac{n}{n} \cdot \frac{n}{n-1} \cdots \frac{n-k+1}{n} \\ & = & \frac{1}{k!} (\lim_n \frac{n}{n}) \cdot (\lim_n \frac{n}{n-1}) \cdots (\lim_n \frac{n-k+1}{n}) \\ & = & \frac{1}{k!} \cdot 1 \cdot 1 \cdots 1 \\ & = & \frac{1}{k!} \;. \end{array}$$

Dies vergleiche man mit

$$\mathrm{e} \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$$

In der Tat kann man zeigen, daß $\lim_{n\to\infty}(1+n^{-1})^n = \mathrm{e}$. Beim Argument

$$\lim_n (1+n^{-1})^n \;=\; \lim_n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} n^{-k} \;=\; \lim_n \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} n^{-k} \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} \lim_n \binom{n}{k} n^{-k} \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \;=\; \mathrm{e}$$

dafür müßte man noch die Vertauschung von $\lim_n$ und $\sum_{k=0}^{\infty}$ rechtfertigen.

(2) Setze $f(n) := \frac{\pi^6}{945} - \sum_{k=1}^{n} k^{-6}$.
Es wird $f(5) \approx 0{,}38179 \cdot 10^{-4}$, $f(10) \approx 0{,}15495 \cdot 10^{-5}$ und $f(50) \approx 0{,}60864 \cdot 10^{-9}$.
Man kann also vermuten, daß $\lim_n f(n) = 0$, d.h. daß $\sum_{k=1}^{\infty} = \frac{\pi^6}{945}$.

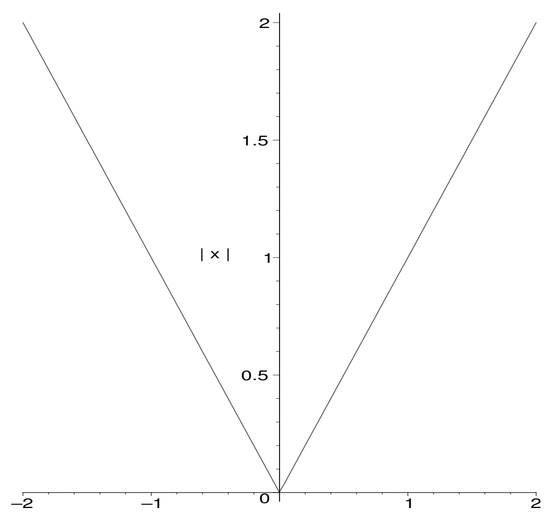
Dem ist in der Tat so, wie sich mit sogenannten Fourierreihen zeigen läßt.

Aufgabe 22

(1) f ist in $x_0 = 0$ stetig. Denn für alle $\varepsilon > 0$ ist

$$|f(x) - f(x_0)| \;=\; ||x| - |0|| \;=\; |x| \;<\; \varepsilon\ ,$$

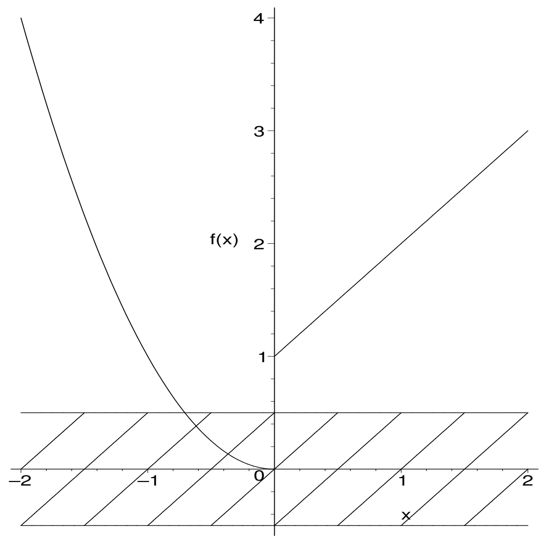
falls $|x - 0| = |x| < \varepsilon$, so daß wir $\delta = \varepsilon$ (oder aber $\delta \in (0,\varepsilon]$) wählen können.
In anderen Worten, mit $\delta := \varepsilon$ wird die δ-Umgebung um $x_0 = 0$ voll in den ε-Streifen um $f(x_0) = |x_0| = 0$ abgebildet.



(2) f ist in $x_0 = 0$ nicht stetig. Denn z.B. für $\varepsilon = \frac{1}{2}$ ist für jedes $\delta > 0$ zwar $|\delta/2 - 0| = \delta/2 < \delta$, aber

$$|f(\delta/2) - f(0)| \;=\; 1 + \delta/2 \;>\; 1/2 \;=\; \varepsilon\ .$$

In anderen Worten, jede δ-Umgebung von $x_0 = 0$ wird nicht voll in diesen ε-Streifen abgebildet.



Aufgabe 23

(1) Es ist f in $x_0 = -1$ nicht stetig.

Wir wollen dies anhand der Definition überprüfen.

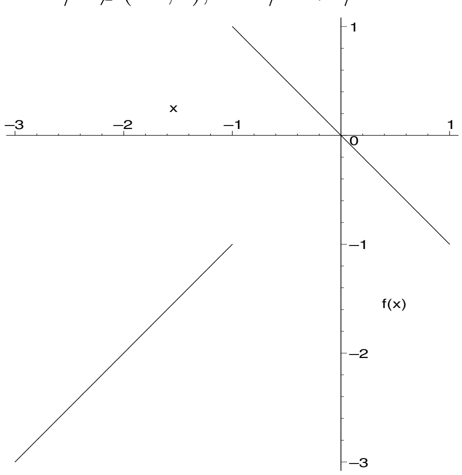
Zunächst halten wir fest, daß $f(x_0) = -1$.

Sei $\varepsilon := 1$. (Das ist nicht die einzige mögliche Wahl. Es sollte ε unter der vermuteten Sprungweite liegen.)

Sei $\delta > 0$. Wir müssen zeigen, daß f das Intervall $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) = (-1 - \delta, -1 + \delta)$ nicht zur Gänze in das Intervall $(f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon) = (-2, 0)$ abbildet.

Fall $\delta \geqslant 1$. Es ist zwar $-1/2 \in (-1 - \delta, -1 + \delta)$, aber $f(-1/2) = -(-1/2) = 1/2 \notin (-2, 0)$.

Fall $0 < \delta < 1$. Es ist zwar $-1 + \delta/2 \in (-1 - \delta, -1 + \delta)$, aber $f(-1 + \delta/2) = -(-1 + \delta/2) = 1 - \delta/2 \notin (-2, 0)$, da $\delta/2 < 1/2$.



(2) Es ist f in $x_0 = 1$ stetig.

Wir wollen dies anhand der Definition überprüfen.

Zunächst halten wir fest, daß $f(x_0) = -1$.

Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Wir wählen $\delta := \varepsilon/2$ und behaupten, daß f das Intervall

$$(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \ = \ (1 - \varepsilon/2, 1 + \varepsilon/2)$$

zur Gänze in das Intervall

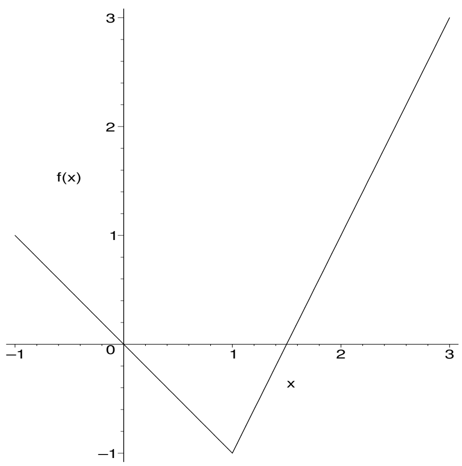
$$(f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon) \;=\; (-1 - \varepsilon, -1 + \varepsilon)$$

abbildet.

Sei $x \in (1 - \varepsilon/2, 1 + \varepsilon/2)$.

Fall $x \in (1 - \varepsilon/2, 1)$. Es wird $f(x) = -x \in (-1, -1 + \varepsilon/2) \subseteq (-1 - \varepsilon, -1 + \varepsilon)$.

Fall $x \in (1, 1+\varepsilon/2)$. Es wird $f(x) = 2x-3 \in (2\cdot 1-3, 2\cdot(1+\varepsilon/2)-3) = (1, 1+\varepsilon) \subseteq (-1-\varepsilon, -1+\varepsilon)$.



(3) Es ist f in $x_0 = 0$ nicht stetig.

Wir wollen dies anhand der Definition überprüfen.

Zunächst halten wir fest, daß $f(x_0) = 0$.

Sei $\varepsilon := 1/2$. (Das ist nicht die einzige mögliche Wahl. Es sollte ε unter der vermuteten Sprungweite liegen.)

Sei $\delta > 0$. Wir müssen zeigen, daß f das Intervall $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) = (-\delta, +\delta)$ nicht zur Gänze in das Intervall $(f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon) = (-1/2, +1/2)$ abbildet.

Wir suchen dazu nach einer “Maximalstelle des Sinus” innerhalb $(-\delta, +\delta)$. Es ist $\sin(\pi_2 + 2k\pi) = 1$ für alle $k \in \mathbf{Z}$. Wir können also also nach einem $x \in (0, \delta)$ mit $1/x = \pi/2 + 2k\pi$ für ein $k \in \mathbf{Z}$ suchen. Umgeformt wird dies zu $x = (\pi/2 + 2k\pi)^{-1} \overset{!}{\in} (0, \delta)$.

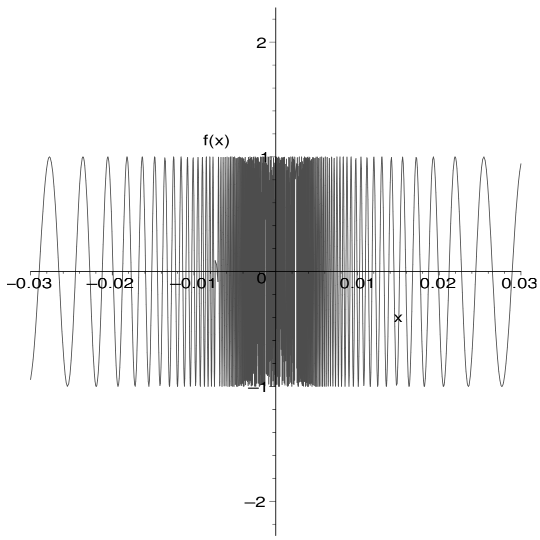
Somit ist $(\pi/2 + 2k\pi)^{-1} < \delta$ zu erfüllen, d.h. $\pi/2 + 2k\pi > 1/\delta$, d.h. $k > (1/\delta - \pi/2)/(2\pi)$. Wähle ein solches ganzzahliges k. Sei, wie angekündigt, $x := (\pi/2 + 2k\pi)^{-1}$. Dann ist

$$x \;\in\; (0, \delta) \;\subseteq\; (-\delta, +\delta)\;,$$

aber

$$f(x) \;=\; \sin(1/x) \;=\; \sin(\pi/2 + 2k\pi) \;=\; 1 \;\not\in\; (-1/2, +1/2)\;,$$

wie gesucht.



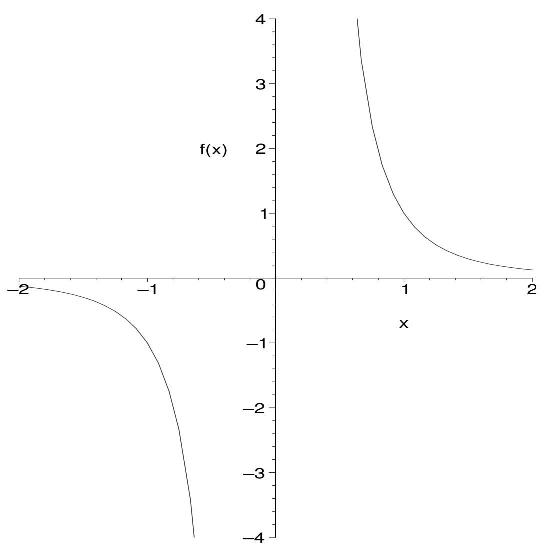
Die Funktion hat an der Stelle x_0 nicht einfach nur einen Sprung, sondern schlimmer, sie "springt unkontrollierbar".

Aufgabe 24

Wir zitieren (4) aus der Bemerkung aus §2.4.2 mit B(4), etc.

(1) Nach B(4) ist $\mathbf{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbf{R}$, $x \longmapsto 1/x$ stetig.

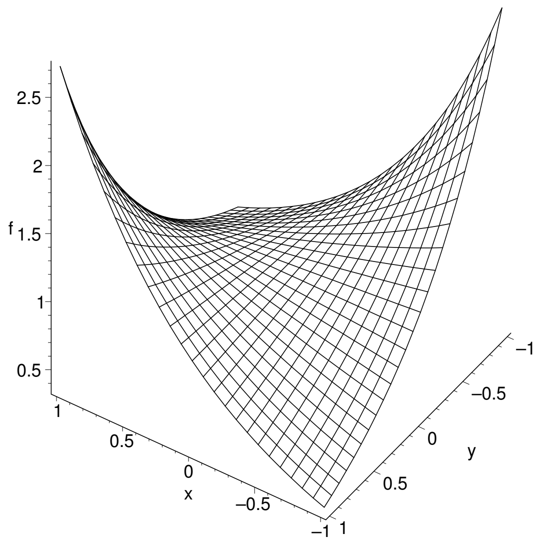
Nach B(3) ist dann auch $\mathbf{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbf{R}$, $x \longmapsto 1/x^3$ stetig.



(2) Nach B(1, 2, 3) ist $\mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$, $(x, y) \longmapsto xy$ stetig.

Nach B(5) ist auch $\mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$, $x \longmapsto \mathrm{e}^x$ stetig.

Nach B(8) ist also auch $\mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$, $(x, y) \longmapsto \mathrm{e}^{xy}$ stetig.



Aufgabe 25

Wir zitieren (4) aus der Bemerkung aus §2.4.2 mit B(4), etc.

Abbildungen ohne Angabe von Definitions- und Wertebereich sollen von $\mathbf{R}$ nach $\mathbf{R}$ gehen.

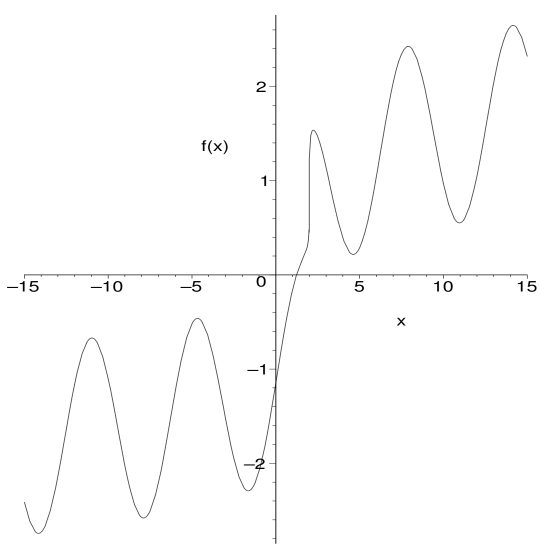
(1) Es ist $x \longmapsto \sin(x)$ stetig nach B(6).

Es ist $x \longmapsto x - 2$ stetig mit B(1, 2, 3).

Da $\mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$, $x \longmapsto x^5$ bijektiv und nach B(1,2,3) stetig ist, ist nach B(9) auch ihre Umkehrabbildung $x \longmapsto \sqrt[5]{x}$ stetig.

Nach B(8) ist das Kompositum $x \longmapsto \sqrt[5]{x-2}$ stetig.

Nach B(3) ist schließlich auch $f : x \longmapsto \sqrt[5]{x-2} + \sin(x)$ stetig.



(2) Es ist $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ für $x \in \mathbf{R} \setminus \{\, \pi/2 + z\pi \,:\, z \in \mathbf{Z} \,\}$.

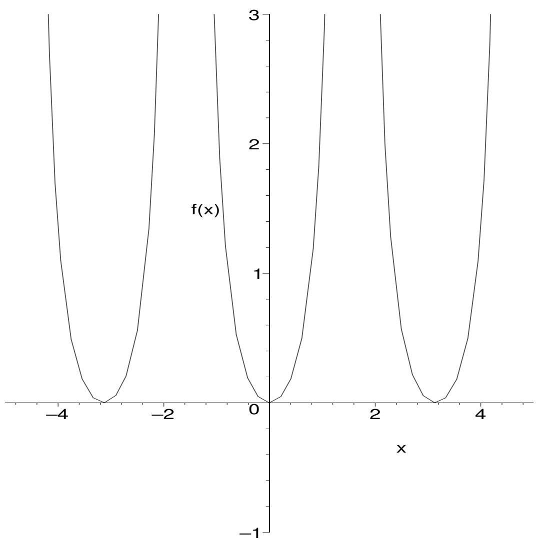
Es ist $x \longmapsto \sin(x)$ stetig nach B(6).

Es ist $x \longmapsto \cos(x)$ stetig nach B(7).

Es ist $R \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbf{R}$, $x \longmapsto 1/x$ stetig nach B(4).

Setzen wir $D := \mathbf{R} \setminus \{\, \pi/2 + z\pi \ : \ z \in \mathbf{Z} \,\}$ und $E := \mathbf{R} \setminus \{0\}$, so wird D unter $x \longmapsto \cos(x)$ nach E abgebildet. Nach B(8) ist also auch das Kompositum $D \longrightarrow \mathbf{R}$, $x \longmapsto \frac{1}{\cos(x)}$ stetig.

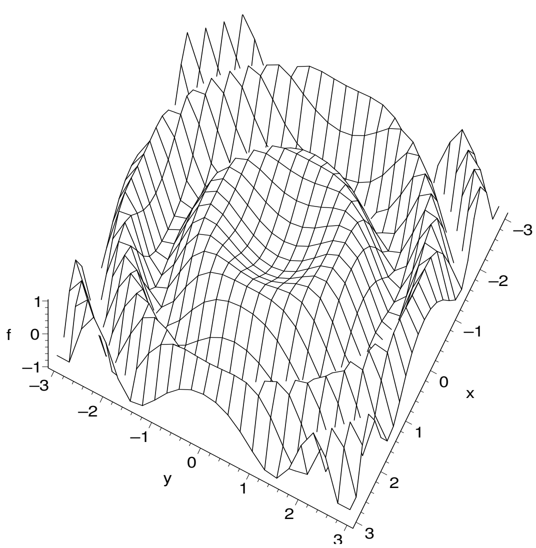
Nach B(3) ist schließlich auch $f : D \longrightarrow \mathbf{R}$, $x \longmapsto \sin(x) \cdot \frac{1}{\cos(x)}$ stetig.



(3) Nach B(1, 2, 3) ist $\mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$, $(x, y) \longmapsto x^2 + y^2$ stetig.

Nach B(6) ist $x \longmapsto \sin(x)$ stetig.

Nach B(8) ist auch das Kompositum $\mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$, $(x, y) \longmapsto \sin(x^2 + y^2)$ stetig.

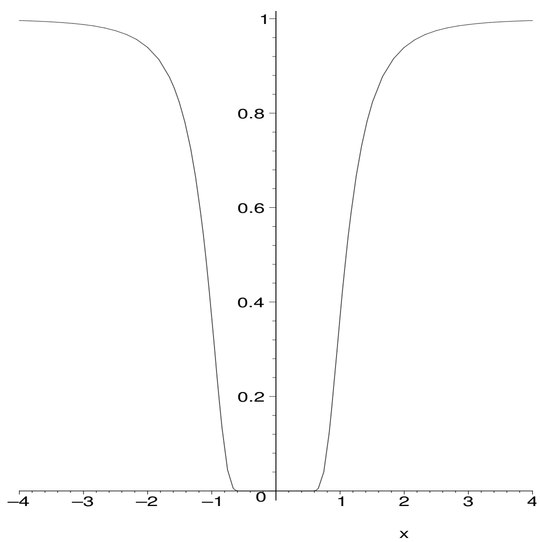


(4) Nach B(4) ist $\mathbf{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbf{R}$, $x \longmapsto 1/x$ stetig.

Nach B(1, 3) ist dann auch $\mathbf{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbf{R}$, $x \longmapsto -1/x^4$ stetig.

Nach B(5) ist $\mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$, $x \longmapsto \mathrm{e}^x$ stetig.

Sei $D := \mathbf{R} \smallsetminus 0$. Sei $E := \mathbf{R}$. Nach B(8) ist auch das Kompositum $D \longrightarrow \mathbf{R}$, $x \longmapsto \mathrm{e}^{-1/x^4}$ stetig.



(5) Dank Aufgabenteil (4) bleibt nur die Stetigkeit in $x = 0$ zu zeigen. Dies müssen wir direkt nach Definition tun.

Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Für $x \in \mathbf{R} \smallsetminus \{0\}$ ist $|f(x) - f(0)| = |\mathrm{e}^{-1/x^4} - 0| = \mathrm{e}^{-1/x^4}$; für $x = 0$ ist natürlich $|f(x) - f(0)| = 0$. Nur ersteres bleibt zu betrachten.

Der Definition $\mathrm{e}^x := 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$ entnehmen wir die Abschätzung $\mathrm{e}^x \geqslant x$ für $x \in \mathbf{R}_{>0}$.

Also ist $\mathrm{e}^{-x} = 1/\mathrm{e}^x \leqslant 1/x$ für $x \in \mathbf{R}_{>0}$. Folglich ist für $x \in \mathbf{R} \smallsetminus \{0\}$ mit $|x - 0| < \sqrt[4]{\varepsilon} =: \delta$ auch $x^4 < \varepsilon$ und somit

$$|f(x) - f(0)| \;=\; \mathrm{e}^{-1/x^4} \;\leqslant\; 1/(1/x^4) \;=\; x^4 \;<\; \varepsilon\,.$$

Mit dieser Wahl von δ ist also die Stetigkeit bei $x = 0$ nachgewiesen.

Somit ist also auch

$$\lim_{x \to 0} \mathrm{e}^{-1/x^4} \;=\; 0$$

berechnet; vgl. §2.4.3.

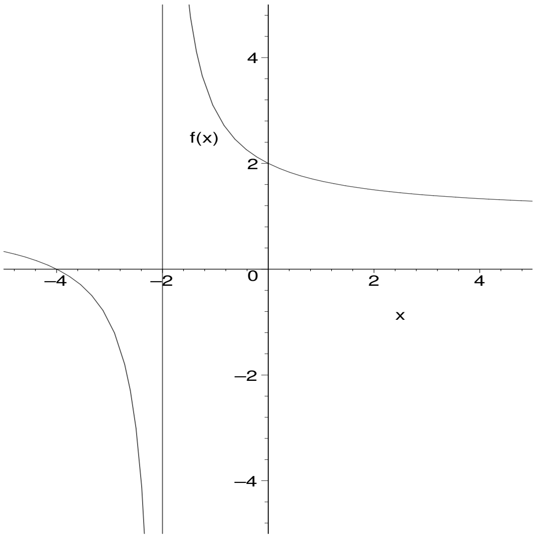
Aufgabe 26

Wir setzen $f(x) = \frac{x+a}{x+b}$ an, mit $a,\, b \in \mathbf{R}$. Dann ist $\lim_{x\to\infty} f(x) = 1$ von vorneherein erfüllt.

Es sollte $3 \overset{!}{=} f(-1) = \frac{-1+a}{-1+b}$ sein, d.h. $a - 1 \overset{!}{=} 3b - 3$.

Es sollte $2 \overset{!}{=} f(0) = \frac{a}{b}$ sein, d.h. $a = 2b$. Einsetzen in die erste Gleichung liefert $b = 2$ und $a = 4$.

Wir können also $f(x) = \frac{x+4}{x+2}$ nehmen. Eine Probe durch Einsetzen empfiehlt sich.



Die vertikale Gerade ist die Asymptote bei $x = -2$.

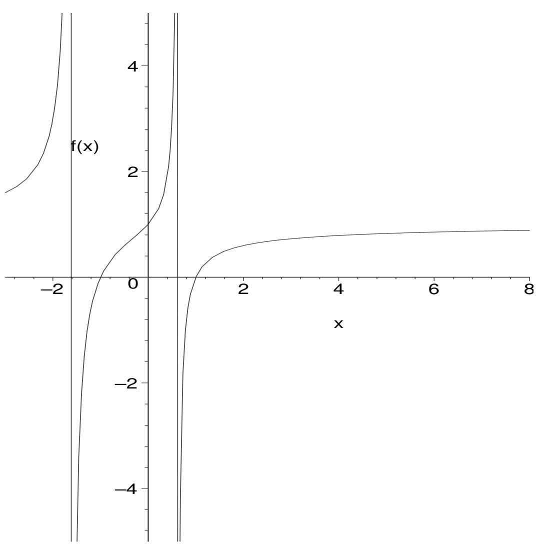
Aufgabe 27

(1) Wir setzen $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+cx+d}$ an, mit $a,\ b,\ c \in \mathbf{R}$, wobei noch der Zähler bei -1 und bei 1 ungleich 0 sein sollte. Denn dann ist $\lim_{x\to\infty} f(x) = 1$ und $f(-1) = 0$ und $f(1) = 0$ von vorneherein erfüllt.

Nun sollte noch $1 \stackrel{!}{=} f(0) = \frac{-1}{d}$ gelten, also $d = -1$.

Setzen wir $c = 1$, so wird der Nenner $x^2 + x - 1$ weder bei -1 noch bei 1 gleich 0. (Allgemeiner ist dies für $c \neq 0$ immer der Fall.)

Wir können also z.B. $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+x-1}$ nehmen. Eine Probe durch Einsetzen empfiehlt sich.



Die vertikalen Geraden sind Asymptoten bei den Polen.

(2) Wir setzen $f(x) = \frac{x^3+ax^2+bx}{x^3+cx^2+dx+e}$ an, mit $a,\ b,\ c,\ d,\ e \in \mathbf{R}$ und $e \neq 0$. Denn dann ist $\lim_{x\to\infty} f(x) = 1$ und $f(0) = 0$ von vorneherein erfüllt.

Es sollte $-1 \stackrel{!}{=} f(-1) = \frac{-1+a-b}{-1+c-d+e}$ sein, d.h. $1 - c + d - e \stackrel{!}{=} -1 + a - b$.

Es sollte $1 \stackrel{!}{=} f(1) = \frac{1+a+b}{1+c+d+e}$ sein, d.h. $1 + c + d + e \stackrel{!}{=} 1 + a + b$.

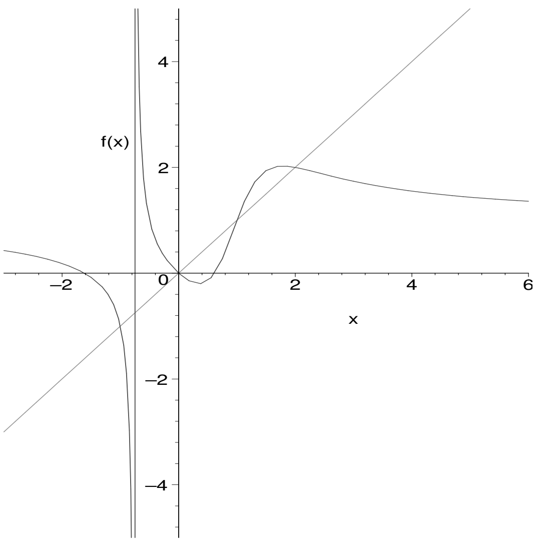
Es sollte $2 \overset{!}{=} f(2) = \frac{8+4a+2b}{8+4c+2d+e}$ sein, d.h. $8 + 4c + 2d + e \overset{!}{=} 4 + 2a + b$.

Die Summe der ersten beiden Gleichungen liefert die Bedingung $2 + 2d \overset{!}{=} 2a$ sein, d.h. wir müssen $a := 1 + d$ wählen.

Die Differenz der ersten beiden Gleichungen liefert die Bedingung $2c + 2e \overset{!}{=} 2 + 2b$ sein, d.h. wir müssen $b := c + e - 1$ wählen.

Einsetzen in die dritte Gleichung liefert die Bedingung $8+4c+2d+e \overset{!}{=} 4+2(1+d)+(c+e-1)$, d.h. wir müssen $c := -1$ wählen. Die Wahl von d und e steht uns frei, so daß wir $e := 1$ und $d := 0$ setzen können. Dies liefert $a = 1$ und $b = -1$.

So erhalten wir $f(x) = \frac{x^3+x^2-x}{x^3-x^2+1}$. Eine Probe durch Einsetzen empfiehlt sich.



Die vertikale Gerade ist die Asymptote beim Pol. Die Winkelhalbierende diene der Kontrolle der Bedinungen.

Später werden wir lernen, solche inhomogenen linearen Gleichungssysteme systematisch zu lösen; vgl. §5.3.

Aufgabe 28

(1) Für $t \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ berechnen wir

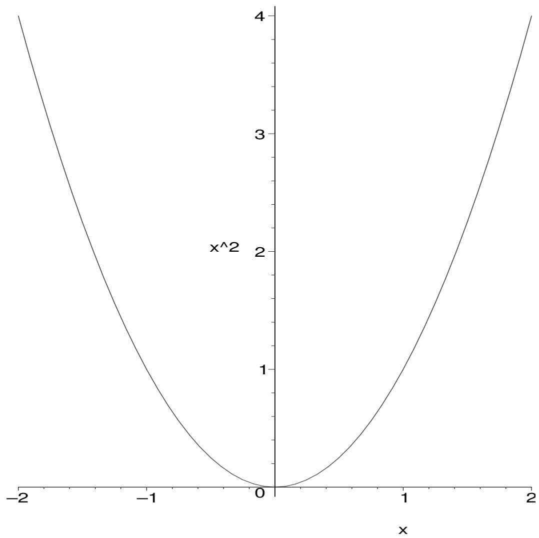
$$\frac{f(0+t) - f(0)}{t} \;=\; \frac{t^2}{t} \;=\; t\,,$$

so daß

$$f'(0) \;=\; \lim_{t \to 0} \frac{f(0+t) - f(0)}{t} \;=\; \lim_{t \to 0} t \;=\; 0$$

existiert.

In anderen Worten, f ist differenzierbar an der Stelle 0.



(2) Für $t \in \mathbf{R} \smallsetminus \{0\}$ berechnen wir

$$h(t) \;:=\; \frac{f(0+t)-f(0)}{t} \;=\; \frac{|t|}{t} \;=\; \begin{cases} -1 & \text{für } t < 0 \\ \;\;1 & \text{für } t > 0\,. \end{cases}$$

Wäre s der Grenzwert dieser Funktion für $t \to 0$, so wäre die Funktion

$$\begin{array}{rcl} \hat{h} \;:\; \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ t & \longmapsto & \begin{cases} -1 & \text{für } t < 0 \\ \;\;s & \text{für } t = 0 \\ \;\;1 & \text{für } t > 0\,. \end{cases} \end{array}$$

stetig in $t = 0$. Sei $\varepsilon := 1/2$. Wäre $\hat{h}$ stetig in 0, so müßte es ein $\delta > 0$ so geben, daß

$$\hat{h}\big((-\delta,+\delta)\big) \;\subseteq\; (s-\varepsilon, s+\varepsilon) \;=\; (s-1/2, s+1/2)\;.$$

Fall $s \geqslant 0$. Es ist zwar $-\delta/2 \in (-\delta,+\delta)$, aber $\hat{h}(-\delta/2) = -1 < s - 1/2$, und also $\hat{h}(-\delta/2) \notin (s-1/2, s+1/2)$.

Fall $s < 0$. Es ist zwar $\delta/2 \in (-\delta,+\delta)$, aber $\hat{h}(\delta/2) = 1 > s + 1/2$, und also $\hat{h}(\delta/2) \notin (s-1/2, s+1/2)$.

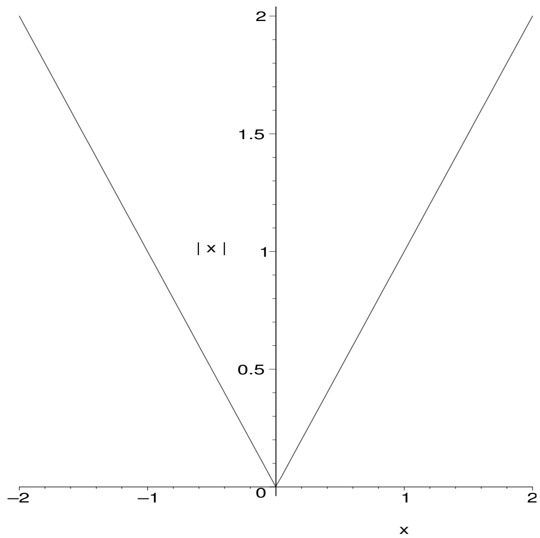
In beiden Fällen können wir $\hat{h}\big((-\delta,+\delta)\big) \subseteq (s-1/2, s+1/2)$ nicht erreichen, wie klein wir $\delta > 0$ auch wählen.

Also ist $\hat{h}$ nicht stetig in 0.

Somit ist f an der Stelle 0 nicht differenzierbar.

Anschaulich gesprochen, es kann die Lücke des Graphen von h bei $t = 0$ nicht durch Einfügen eines Punktes $(0, s)$ geschlossen werden.

Ebenfalls anschaulich gesprochen, es hat der Graph von f bei $x = 0$ "zwei mögliche Tangenten", und damit keine eindeutige Tangentensteigung.



Aufgabe 29

(1) Für $t \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ berechnen wir

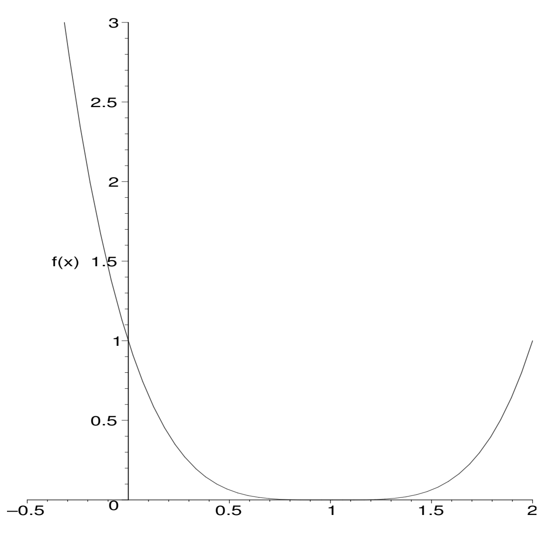
$$\frac{f(0+t)-f(0)}{t} \;=\; \frac{(t-1)^4-1}{t} \;=\; t^3-4t^2+6t-4\,,$$

so daß

$$f'(0) \;=\; \lim_{t\to 0}\frac{f(0+t)-f(0)}{t} \;=\; \lim_{t\to 0}(t^3-4t^2+6t-4) \;=\; -4$$

existiert.

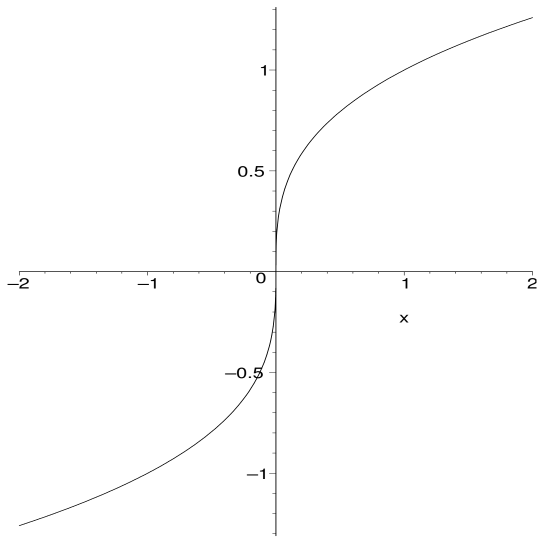
In anderen Worten, f ist differenzierbar an der Stelle 0.



(2) Für $t \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ berechnen wir

$$\frac{f(0+t)-f(0)}{t} \;=\; \frac{\sqrt[3]{t}}{t} \;=\; 1/t^{2/3}\,.$$

Sei $C > 0$. Es ist $|1/t^{2/3}| > C$, sobald $|t^{2/3}| < C^{-1}$, d.h. sobald $|t| < C^{-3/2}$. Also kann $t \longmapsto 1/t^{2/3}$ kein Intervall der Form $(-\delta, +\delta)$, wobei $\delta > 0$, in ein beschränktes Intervall abbilden. Somit existiert der Grenzwert von $\frac{f(0+t)-f(0)}{t}$ für $t \to 0$ nicht.
In anderen Worten, f ist nicht differenzierbar an der Stelle 0.



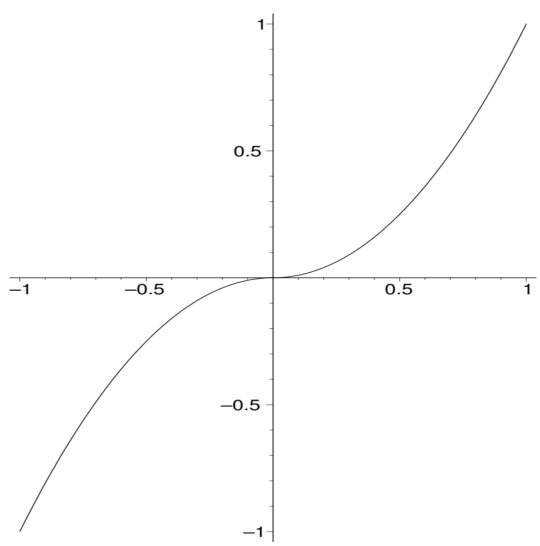
(3) Für $t \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ berechnen wir

$$\frac{f(0+t)-f(0)}{t} \;=\; \frac{t \cdot |t|}{t} \;=\; |t| \,,$$

so daß

$$f'(0) \;=\; \lim_{t \to 0} \frac{f(0+t)-f(0)}{t} \;=\; \lim_{t \to 0} |t| \;=\; 0$$

existiert.



Aufgabe 30

(1) Für $f(x) = \frac{x^2}{1+x}$ wird

$$f'(x) \;=\; \frac{2x \cdot (1+x) - x^2 \cdot 1}{(1+x)^2} \;=\; \frac{x^2 + 2x}{(1+x)^2} \,.$$

Dann wird

$$\begin{aligned} f''(x) &= \tfrac{(2x+2)\cdot(1+x)^2-(x^2+2x)\cdot 2(1+x)}{(1+x)^4} \\ &= \tfrac{2}{(1+x)^3}\ . \end{aligned}$$

(2) Für $f(x) = \mathrm{e}^x \sin(x)$ wird

$$f'(x) \ = \ \mathrm{e}^x \sin(x) + \mathrm{e}^x \cos(x) = \mathrm{e}^x(\sin(x) + \cos(x))\ .$$

Dann wird

$$\begin{aligned} f''(x) &= \mathrm{e}^x(\sin(x) + \cos(x)) + \mathrm{e}^x(\cos(x) - \sin(x)) \\ &= 2\mathrm{e}^x \cos(x)\ . \end{aligned}$$

(3) Für $f(x) = \sin(\cos(x))$ wird

$$f'(x) \ = \ \cos(\cos(x)) \cdot (-\sin(x)) = -\sin(x)\cos(\cos(x))\ .$$

Dann wird

$$\begin{aligned} f''(x) &= -\big(\cos(x)\cos(\cos(x)) + \sin(x)(-\sin(\cos(x)))(-\sin(x))\big) \\ &= -\sin(x)^2 \sin(\cos(x)) - \cos(x)\cos(\cos(x))\ . \end{aligned}$$

Aufgabe 31

(1) Für $f(x) = \frac{x}{x^3-1}$ wird

$$f'(x) \ = \ \frac{1\cdot(x^3-1) - x\cdot 3x^2}{(x^3-1)^2} \ = \ -\frac{2x^3+1}{(x^3-1)^2}\ .$$

Sodann wird

$$\begin{aligned} f''(x) &= -\tfrac{6x^2\cdot(x^3-1)^2-(2x^3+1)\cdot 2(x^3-1)\cdot 3x^2}{(x^3-1)^4} \\ &= -\tfrac{6x^2\cdot(x^3-1)-(2x^3+1)\cdot 2\cdot 3x^2}{(x^3-1)^3} \\ &= 6\,\tfrac{x^5+2x^2}{(x^3-1)^3}\ . \end{aligned}$$

Schließlich wird

$$\begin{aligned} f'''(x) &= 6\,\tfrac{(5x^4+4x)\cdot(x^3-1)^3-(x^5+2x^2)\cdot 3(x^3-1)^2\cdot 3x^2}{(x^3-1)^6} \\ &= 6\,\tfrac{(5x^4+4x)\cdot(x^3-1)-(x^5+2x^2)\cdot 3\cdot 3x^2}{(x^3-1)^4} \\ &= -6\,\tfrac{4x^7+19x^4+4x}{(x^3-1)^4}\ . \end{aligned}$$

(2) Für $f(x) = \frac{\sin(x)}{2+\cos(x)}$ wird

$$f'(x) \ = \ \frac{\cos(x)\cdot(2+\cos(x)) - \sin(x)\cdot(-\sin(x))}{(2+\cos(x))^2} \ = \ \frac{2\cos(x) + (\cos(x))^2 + (\sin(x))^2}{(2+\cos(x))^2} \ = \ \frac{1+2\cos(x)}{(2+\cos(x))^2}\ .$$

Sodann wird

$$\begin{aligned} f''(x) &= \tfrac{(-2\sin(x))\cdot(2+\cos(x))^2-(1+2\cos(x))\cdot 2(2+\cos(x))\cdot(-\sin(x))}{(2+\cos(x))^4} \\ &= \tfrac{(-2\sin(x))\cdot(2+\cos(x))-(1+2\cos(x))\cdot 2\cdot(-\sin(x))}{(2+\cos(x))^3} \\ &= 2\,\tfrac{\sin(x)\cos(x)-\sin(x)}{(2+\cos(x))^3} \end{aligned}$$

Schließlich wird

$$\begin{aligned} f'''(x) &= 2\,\tfrac{(\cos(x)^2-\sin(x)^2-\cos(x))\cdot(2+\cos(x))^3-(\sin(x)\cos(x)-\sin(x)\cdot 3(2+\cos(x))^2\cdot(-\sin(x))}{(2+\cos(x))^6} \\ &= 2\,\tfrac{(\cos(x)^2-\sin(x)^2-\cos(x))\cdot(2+\cos(x))-(\sin(x)\cos(x)-\sin(x))\cdot 3\cdot(-\sin(x))}{(2+\cos(x))^4} \\ &= 2\,\tfrac{6\cos(x)^2-5-\cos(x)^3}{(2+\cos(x))^4}\ . \end{aligned}$$

(3) Für $f(x) = \sin(x^3)$ wird
$$f'(x) \;=\; \cos(x^3) \cdot 3x^2 \;.$$
Sodann wird
$$f''(x) \;=\; -\sin(x^3) \cdot 9x^4 + \cos(x^3) \cdot 6x \;.$$
Schließlich wird
$$f'''(x) \;=\; -\cos(x^3)\cdot 27x^6 - \sin(x^3)\cdot 36x^3 - \sin(x^3)\cdot 18x^3 + \cos(x^3)\cdot 6 \;=\; \cos(x^3)\cdot(6-27x^6) - \sin(x^3)\cdot 54x^3 \;.$$

(4) Für $f(x) = \mathrm{e}^{1/(x^2-1)}$ wird
$$f'(x) \;=\; \mathrm{e}^{1/(x^2-1)} \cdot \frac{-2x}{(x^2-1)^2} \;.$$
Sodann wird
$$f''(x) \;=\; \mathrm{e}^{1/(x^2-1)} \cdot \frac{4x^2}{(x^2-1)^4} + \mathrm{e}^{1/(x^2-1)} \cdot \frac{6x^2+2}{(x^2-1)^3} \;=\; 2\mathrm{e}^{1/(x^2-1)} \cdot \frac{3x^4-1}{(x^2-1)^4} \;.$$
Schließlich wird
$$f'''(x) \;=\; 2\mathrm{e}^{1/(x^2-1)} \cdot \frac{(-2x)(3x^4-1)}{(x^2-1)^6} + 2\mathrm{e}^{1/(x^2-1)} \cdot \frac{-12x^5-12x^3+8x}{(x^2-1)^5} \;=\; 4x\mathrm{e}^{1/(x^2-1)} \cdot \frac{-6x^6-3x^4+10x^2-3}{(x^2-1)^6} \;.$$
Im letzten Schritt hätte man auch die Kettenregel insgesamt auf die innere Funktion x^2 anwenden können.

(5) Für $f(x) = \cos(\mathrm{e}^{1/x})$ wird
$$f'(x) \;=\; -\sin(\mathrm{e}^{1/x}) \cdot \mathrm{e}^{1/x} \cdot (-\frac{1}{x^2}) \;=\; \sin(\mathrm{e}^{1/x}) \cdot \mathrm{e}^{1/x} \cdot x^{-2}$$
Sodann wird
$$\begin{aligned} f''(x) &= \cos(\mathrm{e}^{1/x}) \cdot \mathrm{e}^{1/x} \cdot (-\tfrac{1}{x^2}) \cdot \mathrm{e}^{1/x} \cdot x^{-2} + \sin(\mathrm{e}^{1/x}) \cdot \mathrm{e}^{1/x} \cdot (-\tfrac{1}{x^2}) \cdot x^{-2} + \sin(\mathrm{e}^{1/x}) \cdot \mathrm{e}^{1/x} \cdot (-2x^{-3}) \\ &= -\cos(\mathrm{e}^{1/x}) \cdot \mathrm{e}^{2/x} \cdot x^{-4} - \sin(\mathrm{e}^{1/x}) \cdot \mathrm{e}^{1/x} \cdot (x^{-4} + 2x^{-3}) \;. \end{aligned}$$
Schließlich wird
$$\begin{aligned} f'''(x) &= -\sin(\mathrm{e}^{1/x}) \cdot \mathrm{e}^{3/x} \cdot x^{-6} + 2\cos(\mathrm{e}^{1/x}) \cdot \mathrm{e}^{2/x} \cdot x^{-6} + 4\cos(\mathrm{e}^{1/x}) \cdot \mathrm{e}^{2/x} \cdot x^{-5} \\ &\quad + \cos(\mathrm{e}^{1/x}) \cdot \mathrm{e}^{2/x} \cdot (x^{-6} + 2x^{-5}) + \sin(\mathrm{e}^{1/x}) \cdot \mathrm{e}^{1/x} \cdot (x^{-6} + 2x^{-5}) + \sin(\mathrm{e}^{1/x}) \cdot \mathrm{e}^{1/x} \cdot (4x^{-5} + 6x^{-4}) \\ &= -\sin(\mathrm{e}^{1/x}) \cdot \mathrm{e}^{3/x} \cdot x^{-6} + \cos(\mathrm{e}^{1/x}) \cdot \mathrm{e}^{2/x} \cdot (3x^{-6} + 6x^{-5}) + \sin(\mathrm{e}^{1/x}) \cdot \mathrm{e}^{1/x} \cdot (x^{-6} + 6x^{-5} + 6x^{-4}) \;. \end{aligned}$$

Aufgabe 32

In den Bezeichnungen von §3.2.1 wird $(\frac{f}{g})' = (f \cdot \frac{1}{g})' = f' \cdot \frac{1}{g} + f \cdot (\frac{1}{g})' = \frac{f'}{g} + f \cdot (-\frac{1}{g^2}) \cdot g' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$.

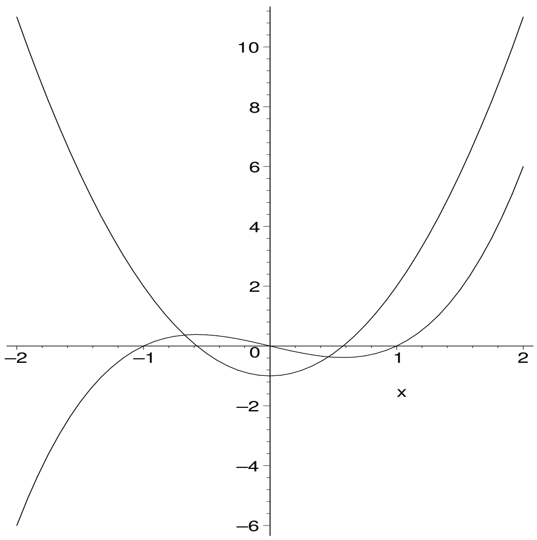
Aufgabe 33

(1) Es ist $f'(x) = 3x^2 - 1 = 3(x + \frac{\sqrt{3}}{3}) \cdot (x - \frac{\sqrt{3}}{3})$.
Es ist $f'(x) \geqslant 0$ für $x \leqslant -\frac{\sqrt{3}}{3}$. Also ist $f(x)$ auf $(-2, -\frac{\sqrt{3}}{3}]$ monoton wachsend.

Strenggenommen müßten wir auf monotones Wachsen auf $(-2, -\frac{\sqrt{3}}{3})$ schließen und dann mit Stetigkeit folgern, daß dies auch für $(-2, -\frac{\sqrt{3}}{3}]$ noch gilt. Etc.

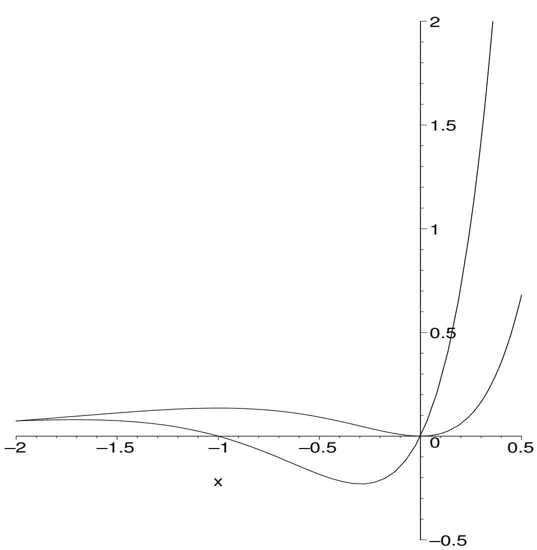
Es ist $f'(x) \leqslant 0$ für $x \in [-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}]$. Also ist $f(x)$ auf $[-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}]$ monoton fallend.

Es ist $f'(x) \geqslant 0$ für $x \geqslant \frac{\sqrt{3}}{3}$. Also ist $f(x)$ auf $[\frac{\sqrt{3}}{3}, 2)$ monoton wachsend.



Welcher der beiden Graphen stellt die Ableitung dar?

(2) Es ist $f'(x) = 2\mathrm{e}^{2x}x(x+1)$.
Es ist $f'(x) \geqslant 0$ für $x \in (-2, -1]$. Also ist $f(x)$ auf $(-2, -1]$ monoton wachsend.
Es ist $f'(x) \leqslant 0$ für $x \in [-1, 0]$. Also ist $f(x)$ auf $[-1, 0]$ monoton fallend.
Es ist $f'(x) \geqslant 0$ für $x \in [0, \frac{1}{2})$. Also ist $f(x)$ auf $[0, \frac{1}{2})$ monoton wachsend.



Welcher der beiden Graphen stellt die Ableitung dar?

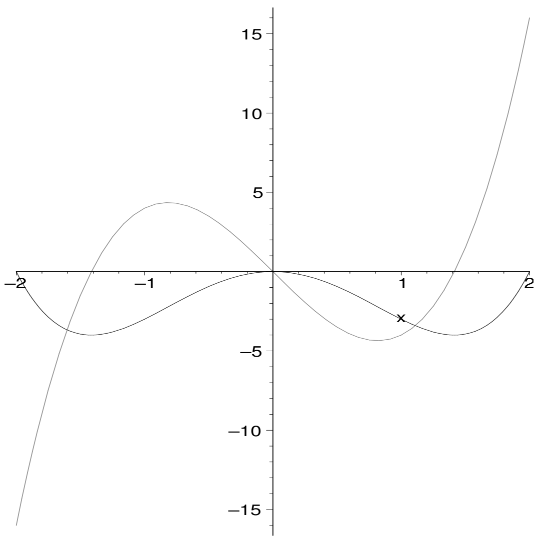
Aufgabe 34

(1) Es ist $f'(x) = 4x^3 - 8x = 4x(x^2 - 2) = 4(x + \sqrt{2}) \cdot x \cdot (x - \sqrt{2})$.
Es ist $f'(x) \leqslant 0$ für $x \leqslant \sqrt{2}$. Also ist $f(x)$ auf $(-2, -\sqrt{2}]$ monoton fallend.

Strenggenommen müßten wir auf monotones Fallen auf $(-2, \sqrt{2})$ schließen und dann mit Stetigkeit folgern, daß dies auch für $(-2, \sqrt{2}]$ noch gilt. Etc.

Es ist $f'(x) \geqslant 0$ für $x \in [-\sqrt{2}, 0]$. Also ist $f(x)$ auf $[-\sqrt{2}, 0]$ monoton wachsend.
Es ist $f'(x) \leqslant 0$ für $x \in [0, \sqrt{2}]$. Also ist $f(x)$ auf $[0, \sqrt{2}]$ monoton fallend.
Es ist $f'(x) \geqslant 0$ für $x \in [\sqrt{2}, 2]$. Also ist $f(x)$ auf $[\sqrt{2}, 2]$ monoton wachsend.

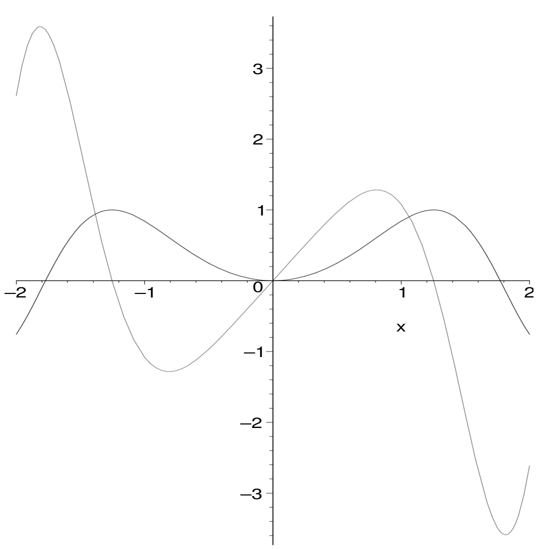
Man könnte teilweise auch mit der Symmetrie $f(-x) = f(x)$ argumentieren.



Welcher der beiden Graphen stellt die Ableitung dar?

(2) Es ist $f'(x) = 2x\cos(x^2)$.
Es ist $f'(x) \geqslant 0$ für $x \in (-2, -\sqrt{\pi/2}]$. Also ist $f(x)$ auf $(-2, -\sqrt{\pi/2}]$ monoton wachsend.
Es ist $f'(x) \leqslant 0$ für $x \in [-\sqrt{\pi/2}, 0]$. Also ist $f(x)$ auf $[-\sqrt{\pi/2}, 0]$ monoton fallend.
Es ist $f'(x) \geqslant 0$ für $x \in [0, \sqrt{\pi/2}]$. Also ist $f(x)$ auf $[0, \sqrt{\pi/2}]$ monoton wachsend.
Es ist $f'(x) \leqslant 0$ für $x \in [\sqrt{\pi/2}, 2)$. Also ist $f(x)$ auf $[\sqrt{\pi/2}, 2)$ monoton fallend.

Man könnte teilweise auch mit der Symmetrie $f(-x) = f(x)$ argumentieren.



Welcher der beiden Graphen stellt die Ableitung dar?

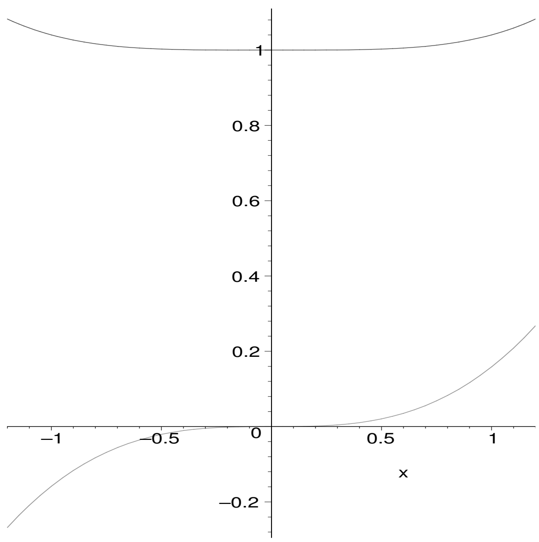
(3) Es ist $f'(x) = x - \sin(x)$.

Wir wollen zeigen, daß $f'(x) \overset{!}{\geqslant} 0$ für $x \in [0,1)$.

Es ist $f'(0) = 0$. Es ist $f''(x) = 1 - \cos(x) \geqslant 0$. Also ist $f'(x)$ monoton wachsend auf $[0,1)$. Somit ist in der Tat $f'(x) \geqslant 0$ für $x \in [0,1)$.

Es folgt, daß $f(x)$ auf $[0,1)$ monoton wachsend ist.

Wegen $f(-x) = f(x)$ ist $f(x)$ auf $(-1,0]$ monoton fallend.



Welcher der beiden Graphen stellt die Ableitung dar?

Aufgabe 35

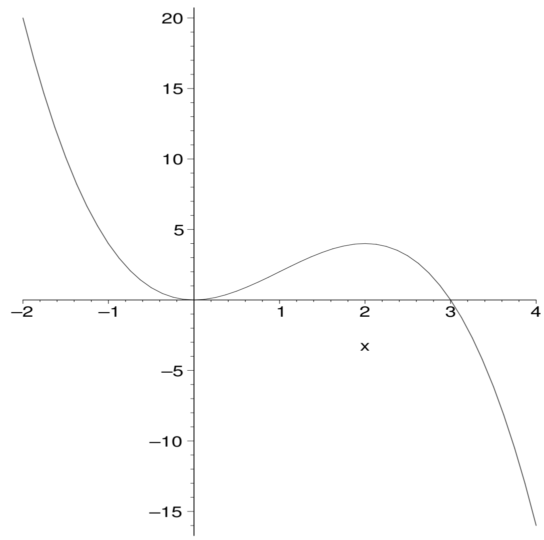
(1) Es ist

$$f'(x) \ = \ 6x - 3x^2 \ = \ 3x(2-x),$$

die Nullstellen sind 0 und 2. Es ist

$$f''(x) = 6 - 6x.$$

Also ist $f''(0) = 6 > 0$, und mithin ist 0 eine lokale Minimalstelle. Desweiteren ist $f''(2) = -6 < 0$, und also 2 eine lokale Maximalstelle.



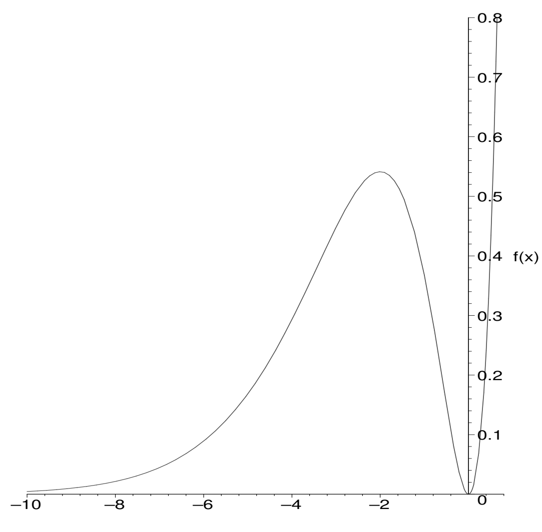
(2) Es ist $f'(x) = (x^2 + 2x)\mathrm{e}^x = (x+2)x\mathrm{e}^x$.

Eine notwendige Bedingung für das Vorliegen einer lokalen Extremstelle ist $f'(x_0) = 0$, d.h. $x_0 \in \{-2, 0\}$.

Es ist $f''(x) = (x^2 + 4x + 2)\mathrm{e}^x$.

Es ist $f''(-2) = -2\mathrm{e}^{-2} < 0$. Also ist $x_0 = -2$ eine lokale Maximalstelle.

Es ist $f''(0) = 2\mathrm{e}^0 = 2 > 0$. Also ist $x_0 = 0$ eine lokale Minimalstelle.



Aufgabe 36

(1) Es ist $f'(x) = 4x^3 - 4x = 4(x-1)x(x+1)$.

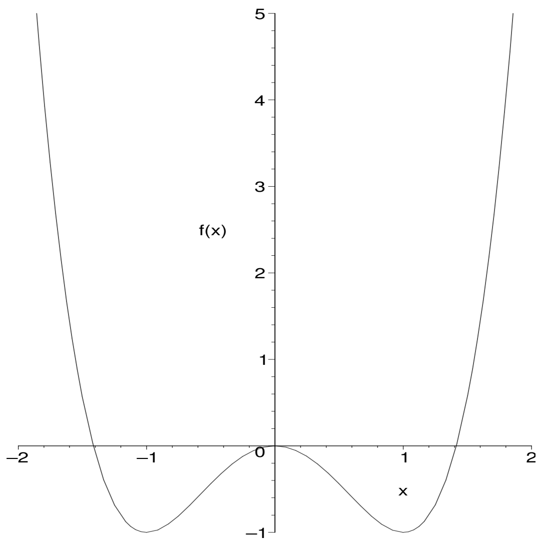
Eine notwendige Bedingung für das Vorliegen einer lokalen Extremstelle ist $f'(x_0) = 0$, d.h. $x_0 \in \{-1, 0, 1\}$. Es hat f also diese drei Flachstellen.

Es ist $f''(x) = 12x^2 - 4$.

Es ist $f''(-1) = 8 > 0$. Also ist $x_0 = -1$ eine lokale Minimalstelle.

Es ist $f''(0) = -4 < 0$. Also ist $x_0 = 0$ eine lokale Maximalstelle.

Es ist $f''(1) = 8 > 0$. Also ist $x_0 = 1$ eine lokale Minimalstelle.



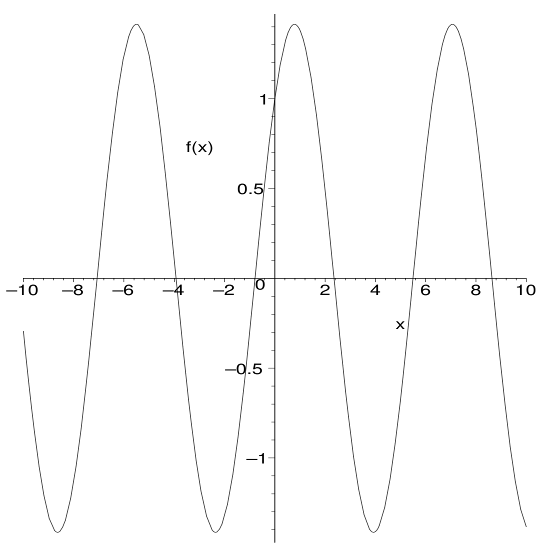
(2) Es ist $f'(x) = \cos(x) - \sin(x)$.

Eine notwendige Bedingung für das Vorliegen einer lokalen Extremstelle ist $f'(x_0) = 0$, d.h. $\cos(x_0) = \sin(x_0)$. Z.B. eine geometrische Betrachtung (gleichseitiges Dreieck im Einheitskreis!) liefert, daß dies für $x_0 = \pi/4 + k\pi$ für alle $k \in \mathbf{Z}$ erfüllt ist. Dies sind also die Flachstellen von f.

Es ist $f''(x) = -\sin(x) - \cos(x)$.

Es ist $f''(\pi/4 + 2k\pi) = -\sin(\pi/4 + 2k\pi) - \cos(\pi/4 + 2k\pi) = -\sqrt{2}$. Somit ist $x_0 = \pi/4 + 2k\pi$ eine lokale Maximalstelle für alle $k \in \mathbf{Z}$.

Es ist $f''(\pi/4 + (2k+1)\pi) = -\sin(\pi/4 + (2k+1)\pi) - \cos(\pi/4 + (2k+1)\pi) = \sqrt{2}$. Somit ist $x_0 = \pi/4 + (2k+1)\pi$ eine lokale Minimalstelle für alle $k \in \mathbf{Z}$.

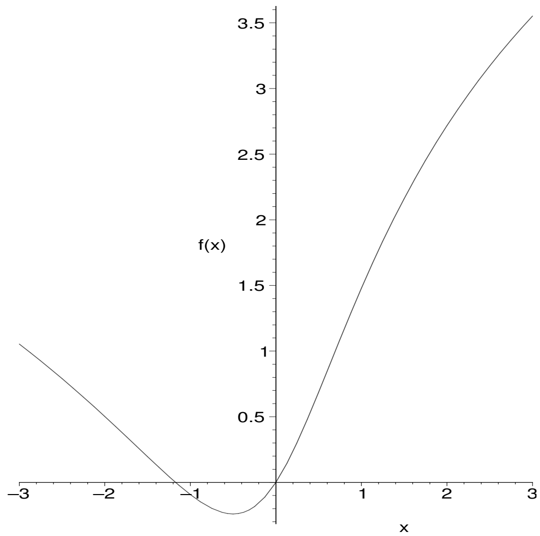


(3) Es ist $f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{2x}{1+x^2}$; vgl. Aufgabe 38.(2).

Eine notwendige Bedingung für das Vorliegen einer lokalen Extremstelle ist $f'(x_0) = 0$, d.h. $1 + 2x_0 = 0$, d.h. $x_0 = -\frac{1}{2}$ ist die einzige Flachstelle von f.

Es ist $f''(x) = \frac{2\cdot(1+x^2)-(1+2x)\cdot 2x}{(1+x^2)^2} = 2\,\frac{1-x-x^2}{(1+x^2)^2}$.

Es ist $f''(-\frac{1}{2}) = \frac{8}{5} > 0$. Somit ist $x_0 = -\frac{1}{2}$ eine lokale Minimalstelle.

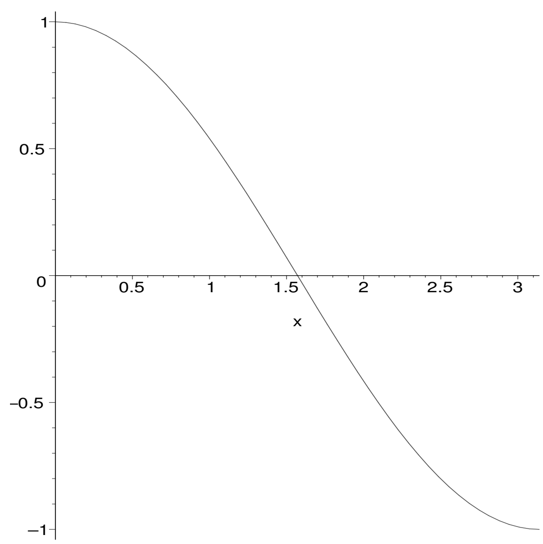


Aufgabe 37

Es ist $f'(x) = -\sin(x) < 0$ für $x \in (0, \pi)$. Also ist f streng monoton fallend, somit insbesondere injektiv.

Wegen Stetigkeit von cos ist $\cos(x)$ auch noch auf $[0, \pi]$ streng monoton fallend. Wegen $\cos(0) = 1$ und $\cos(\pi) = -1$ ist also $\{-1, 1\} \subseteq \cos([0, \pi]) \subseteq [-1, 1]$. Da $\cos([0, \pi])$ ein Intervall ist, folgt $\cos([0, \pi]) = [-1, 1]$. Wegen strenger Monotonie liefert dies $\cos\big((0, \pi)\big) = (-1, 1)$, d.h. es ist f surjektiv.

Insgesamt ist f bijektiv.



Aus der Bemerkung in §3.2.4.1 folgt, setzen wir $y = f(x)$,

$$\arccos'(y) \;=\; \frac{1}{\cos(x)'} \;=\; -\frac{1}{\sin(x)} \;=\; -\frac{1}{\sqrt{1-\cos(x)^2}} \;=\; -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

und somit

$$\arccos'(x) \;=\; -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\;.$$

Aufgabe 38

(1) Es ist $f'(x) = \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x} > 0$ für alle $x \in \mathbf{R}$. Damit ist f streng monoton wachsend, insbesondere injektiv.

Das Bild $f(\mathbf{R})$ ist ein Intervall.

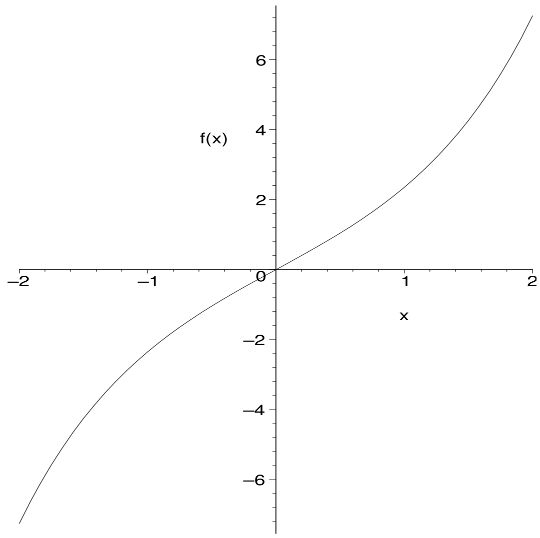
Da e^{-x} streng monoton fallend, aber positiv ist, ist $\mathrm{e}^{-x} \in (0,1)$ für $x > 0$.

Da $\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x} > 1 + x - \mathrm{e}^{-x} > x$ ist für $x > 0$, ist $f(x)$ für große x nicht nach oben beschränkt.

Es ist $f(-x) = -f(x)$. Also ist auch $f(x)$ für kleine x nicht nach unten beschränkt.

Das resultierende Intervall $f(\mathbf{R})$ kann somit nur gleich $\mathbf{R}$ sein. Somit ist f surjektiv.

Insgesamt ist f bijektiv.



Es wird $g'(f(x)) = 1/f'(x) = (\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})^{-1}$.

Wir wollen $g'(y)$ bestimmen, und müssen dazu noch $u(x) := \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}$ in $y = f(x)$ ausdrücken, um das x wegzubekommen.

Dazu beobachten wir, daß $f(x)^2 = \mathrm{e}^{2x} - 2 + \mathrm{e}^{-2x}$ und $u(x)^2 = \mathrm{e}^{2x} + 2 + \mathrm{e}^{-2x}$. Somit wird $u(x)^2 - f(x)^2 = 4$, und also

$$u(x) \;=\; (4 + f(x)^2)^{1/2} \;=\; (4 + y^2)^{1/2} \,.$$

Somit wird

$$g'(y) \;=\; (4 + y^2)^{-1/2}$$

für $y \in \mathbf{R}$.

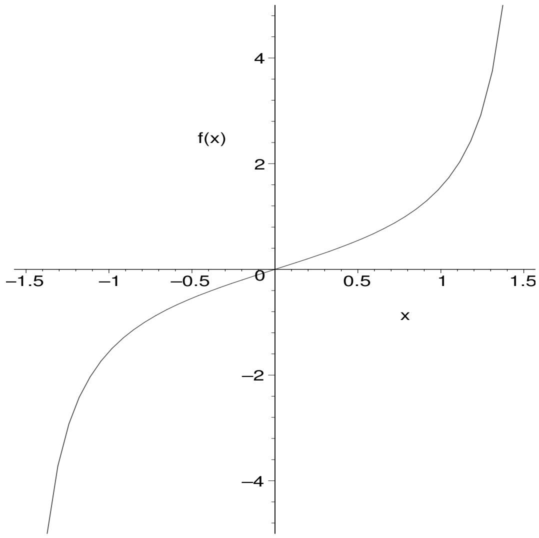
(2) Es ist $f'(x) = \frac{\cos(x)\cos(x) - \sin(x)(-\sin(x))}{\cos(x)^2} = \cos(x)^{-2} > 0$ für alle $x \in (-\pi/2, \pi/2)$. Damit ist f streng monoton wachsend, insbesondere injektiv.

Das Bild $f\big((-\pi/2, \pi/2)\big)$ ist ein Intervall. Nun sind sin und cos stetig, und es ist $\sin(\pi/2) = 1$, aber $\cos(\pi/2) = 0$. Also ist $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ für x gegen $\pi/2$ nicht nach oben beschränkt, da sich der Zähler 1, der Nenner aber 0 nähert.

Es ist $f(-x) = -f(x)$. Also ist auch $f(x)$ für x gegen $-\pi/2$ nicht nach unten beschränkt.

Das resultierende Intervall $f(\mathbf{R})$ kann somit nur gleich $\mathbf{R}$ sein. Somit ist f surjektiv.

Insgesamt ist f bijektiv.



Es wird $\arctan'(\tan(x)) = 1/\tan'(x) = \cos(x)^2$.

Wir wollen $\arctan'(y)$ bestimmen und müssen dazu noch $u(x) := \cos(x)^2$ in $y = f(x) = \tan(x)$ ausdrücken.

Dazu beobachten wir, daß $y^2 = \tan(x)^2 = \frac{\sin(x)^2}{\cos(x)^2} = \frac{1-\cos(x)^2}{\cos(x)^2} = \cos(x)^{-2} - 1 = u(x)^{-1} - 1$. Also ist $u(x)^{-1} = y^2 + 1$, und somit $u(x) = \frac{1}{1+y^2}$. Somit wird

$$g'(y) \;=\; \frac{1}{1+y^2}\;.$$

Aufgabe 39

Es wird

$$\log_3(8) \;=\; \frac{\ln(8)}{\ln(3)} \;\approx\; \frac{2{,}079441541679836}{1{,}098612288668110} \;\approx\; 1{,}89278926$$

und, wie zu erwarten,

$$8 \;=\; 3^{\log_3(8)} \;\approx\; 3^{1{,}89278926} \;\approx\; 7{,}999999994 \;\approx\; 8\;.$$

Aufgabe 40

(1) Es wird $\log_7(9) = \frac{\ln(9)}{\ln(7)} \approx 1{,}12915007$.

Es wird $(9 =)\ 7^{\log_7(9)} \approx 7^{1{,}12915007} \approx 9{,}000000033 \approx 9$, wie zu erwarten.

(2) Es wird $\log_{17}(25) = \frac{\ln(25}{\ln(17)} \approx 1{,}13612193$.

Es wird $(25 =)\ 17^{\log_{17}(25)} \approx 17^{1{,}13612193} \approx 24{,}99999969 \approx 25$, wie zu erwarten.

Aufgabe 41

Es wird

$$\log_a(xy) \;=\; \frac{\ln(xy)}{\ln(a)} \;=\; \frac{\ln(x)+\ln(y)}{\ln(a)} \;=\; \frac{\ln(x)}{\ln(a)} + \frac{\ln(y)}{\ln(a)} \;=\; \log_a(x) + \log_a(y)\;.$$

Es wird

$$a^{\log_a(x)} \;=\; a^{\ln(x)/\ln(a)} \;=\; \mathrm{e}^{\ln(a)\ln(x)/\ln(a)} \;=\; \mathrm{e}^{\ln(x)} \;=\; x\;.$$

Es wird

$$\log_a(a^z) \;=\; \ln(a^z)/\ln(a) \;=\; \ln(\mathrm{e}^{z\ln(a)})/\ln(a) \;=\; z\ln(a)/\ln(a) \;=\; z\;.$$

Es wird

$$\frac{\log_a(x)}{\log_b(x)} = \frac{\ln(x)/\ln(a)}{\ln(x)/\ln(b)} = \frac{\ln(b)}{\ln(a)} = \log_a(b) .$$

Aufgabe 42

(1) Da Zähler und Nenner des vorliegenden Bruchs stetig sind und Funktionswert 0 bei $x = 0$ haben, ist

$$\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x - 1 - x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{(\mathrm{e}^x - 1 - x)'}{(x^2)'} = \lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x - 1}{2x} ,$$

falls die rechte Seite existiert.

Da Zähler und Nenner des nun erhaltenen Bruchs stetig sind und Funktionswert 0 bei $x = 0$ haben, ist

$$\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x - 1}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{(\mathrm{e}^x - 1)'}{(2x)'} = \lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x}{2} ,$$

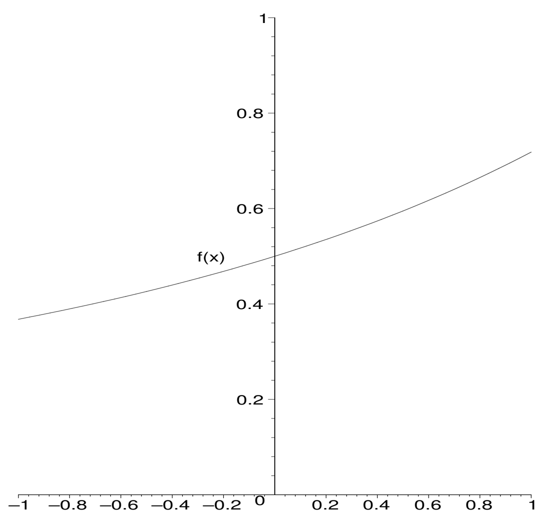
falls die rechte Seite existiert.

Dies ist wegen $\frac{\mathrm{e}^x}{2}$ stetig an der Stelle $x = 0$ in der Tat der Fall; wir erhalten $\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x}{2} = \frac{\mathrm{e}^0}{2} = \frac{1}{2}$.

Insgesamt ist also

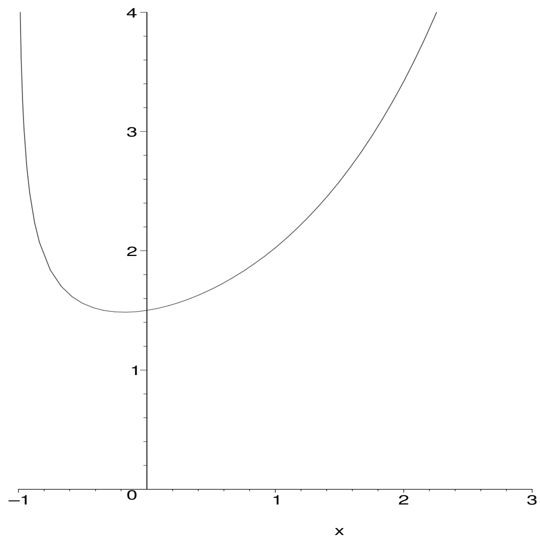
$$\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x - 1 - x}{x^2} = \frac{1}{2} .$$

Skizze von $f(x) := \frac{\mathrm{e}^x - 1 - x}{x^2}$ um $x = 0$.



(2) Es wird

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\mathrm{e}^x - \ln(1+x)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x + x e^x - \frac{1}{1+x}}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{2}\left(2\mathrm{e}^x + x e^x + \frac{1}{(1+x)^2}\right) = \frac{3}{2} .$$



Aufgabe 43

(1) Da Zähler und Nenner des vorliegenden Bruchs stetig sind und Funktionswert 0 bei $x = \mathrm{e}$ haben, ist

$$\lim_{x\to\mathrm{e}} \frac{\ln(\ln(x))}{x-\mathrm{e}} \;=\; \lim_{x\to\mathrm{e}} \frac{\ln(\ln(x))'}{(x-\mathrm{e})'} \;=\; \lim_{x\to\mathrm{e}} \frac{\ln(x)^{-1}\cdot x^{-1}}{1} \;,$$

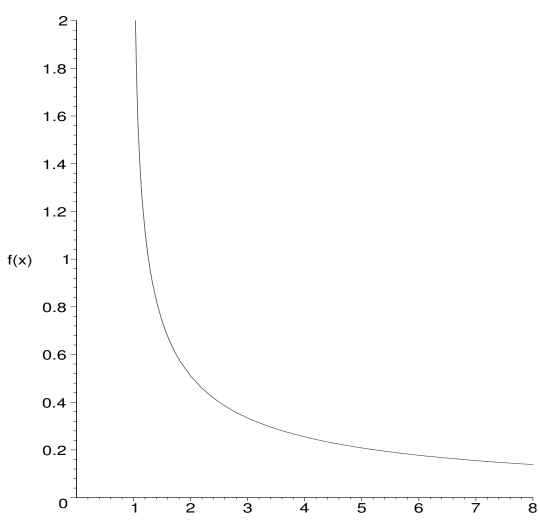
falls die rechte Seite existiert.

Dies ist wegen $\ln(x)^{-1} \cdot x^{-1}$ stetig an der Stelle $x = \mathrm{e}$ in der Tat der Fall; wir erhalten $\lim\limits_{x\to\mathrm{e}} \ln(x)^{-1} \cdot x^{-1} = \ln(\mathrm{e})^{-1}\cdot \mathrm{e}^{-1} \;=\; \mathrm{e}^{-1}$.

Insgesamt ist also

$$\lim_{x\to\mathrm{e}} \frac{\ln(\ln(x))}{x-\mathrm{e}} \;=\; \mathrm{e}^{-1}\;.$$

Skizze von $f(x) := \frac{\ln(\ln(x))}{x-\mathrm{e}}$ um $x = \mathrm{e}$.



(2) Da Zähler und Nenner des vorliegenden Bruchs stetig sind und Funktionswert 0 bei $x = 0$ haben, ist

$$\lim_{x\to 0} \frac{2^x - 1}{x} \;=\; \lim_{x\to 0} \frac{(2^x-1)'}{x'} \;=\; \lim_{x\to 0} \frac{2^x\cdot\ln(2)}{1}\;,$$

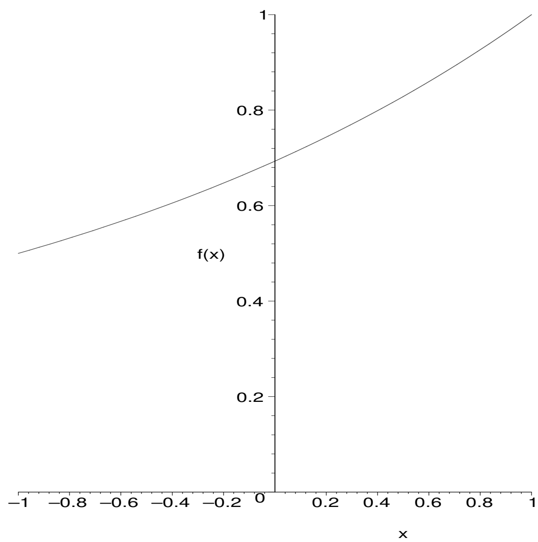
falls die rechte Seite existiert.

Dies ist wegen $2^x \cdot \ln(2)$ stetig an der Stelle $x = 0$ in der Tat der Fall; wir erhalten $\lim\limits_{x\to 0} 2^x \cdot \ln(2) = 2^0 \cdot \ln(2) = \ln(2) \approx 0{,}693147$.

Insgesamt ist also

$$\lim_{x\to 0} \frac{2^x - 1}{x} \;=\; \ln(2) \;\approx\; 0{,}693147\,.$$

Skizze von $f(x) := \frac{2^x-1}{x}$ um $x = 0$.



(3) Da Zähler und Nenner des vorliegenden Bruchs stetig sind und Funktionswert 0 bei $x = 0$ haben, ist

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^5}{\sin(x) - x + x^3/6} \;=\; \lim_{x\to 0} \frac{(x^5)'}{(\sin(x) - x + x^3/6)'} \;=\; \lim_{x\to 0} \frac{5x^4}{\cos(x) - 1 + x^2/2}\;,$$

falls die rechte Seite existiert.

Da Zähler und Nenner des nun erhaltenen Bruchs stetig sind und Funktionswert 0 bei $x = 0$ haben, ist

$$\lim_{x\to 0} \frac{5x^4}{\cos(x) - 1 + x^2/2} \;=\; \lim_{x\to 0} \frac{(5x^4)'}{(\cos(x) - 1 + x^2/2)'} \;=\; \lim_{x\to 0} \frac{20x^3}{-\sin(x) + x}\;,$$

falls die rechte Seite existiert.

Da Zähler und Nenner des nun erhaltenen Bruchs stetig sind und Funktionswert 0 bei $x = 0$ haben, ist

$$\lim_{x\to 0} \frac{20x^3}{-\sin(x) + x} \;=\; \lim_{x\to 0} \frac{(20x^3)'}{(-\sin(x) + x)'} \;=\; \lim_{x\to 0} \frac{60x^2}{-\cos(x) + 1}\;,$$

falls die rechte Seite existiert.

Da Zähler und Nenner des nun erhaltenen Bruchs stetig sind und Funktionswert 0 bei $x = 0$ haben, ist

$$\lim_{x\to 0} \frac{60x^2}{-\cos(x) + 1} \;=\; \lim_{x\to 0} \frac{(60x^2)'}{(-\cos(x) + 1)'} \;=\; \lim_{x\to 0} \frac{120x}{\sin(x)}\;,$$

falls die rechte Seite existiert.

Da Zähler und Nenner des nun erhaltenen Bruchs stetig sind und Funktionswert 0 bei $x = 0$ haben, ist

$$\lim_{x\to 0} \frac{120x}{\sin(x)} \;=\; \lim_{x\to 0} \frac{(120x)'}{\sin(x)'} \;=\; \lim_{x\to 0} \frac{120}{\cos(x)}\;,$$

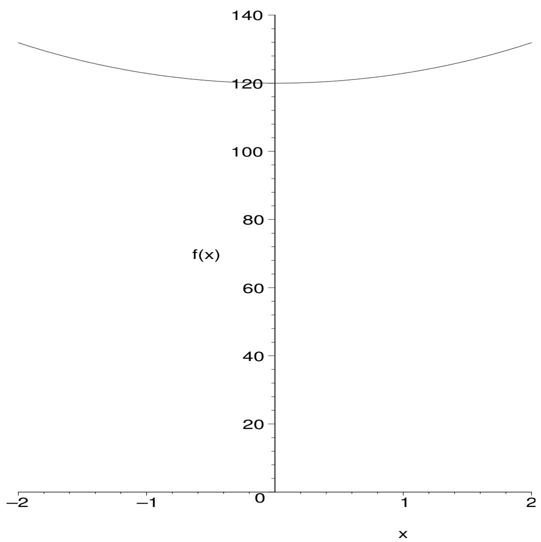
falls die rechte Seite existiert.

Dies ist wegen $\frac{120}{\cos(x)}$ stetig an der Stelle $x = 0$ in der Tat der Fall; wir erhalten $\lim\limits_{x\to 0} \frac{120}{\cos(x)} = \frac{120}{\cos(0)} = 120$.

Insgesamt ist also

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^5}{\sin(x) - x + x^3/6} \;=\; 120\ .$$

Skizze von $f(x) := \frac{x^5}{\sin(x)-x+x^3/6}$ um $x = 0$.



(4) Zunächst formen wir um.

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \;=\; \frac{e^x - 1 - x}{x(e^x - 1)}\ .$$

Da Zähler und Nenner des vorliegenden Bruchs stetig sind und Funktionswert 0 bei $x = 0$ haben, ist

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x(e^x - 1)} \;=\; \lim_{x\to 0} \frac{(e^x - 1 - x)'}{(x(e^x - 1))'} \;=\; \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x\, e^x + e^x - 1}\ ,$$

falls die rechte Seite existiert.

Da Zähler und Nenner des nun erhaltenen Bruchs stetig sind und Funktionswert 0 bei $x = 0$ haben, ist

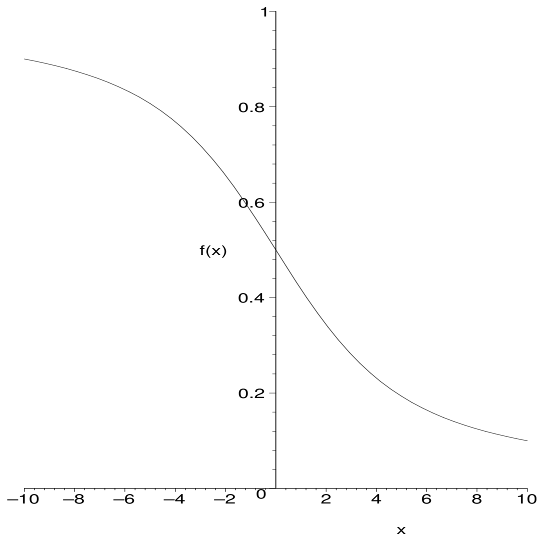
$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x\, e^x + e^x - 1} \;=\; \lim_{x\to 0} \frac{(e^x - 1)'}{(x\, e^x + e^x - 1)'} \;=\; \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{x\, e^x + 2e^x}\ ,$$

falls die rechte Seite existiert. Dies ist wegen $\frac{e^x}{x\, e^x + 2e^x}$ stetig an der Stelle $x = 0$ in der Tat der Fall; wir erhalten $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x}{x\, e^x + 2e^x} = \frac{e^0}{0e^0 + 2e^0} = \frac{1}{2}$.

Insgesamt ist also

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right) \;=\; \frac{1}{2}$$

Skizze von $f(x) := \frac{1}{x} - \frac{1}{\mathrm{e}^x - 1}$ um $x = 0$.



Aufgabe 44

(1) Auf der einen Seite wird

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= (\mathrm{e}^{y\ln(x)})_x \\ &= \mathrm{e}^{y\ln(x)} y x^{-1} \\ &= \mathrm{e}^{(y-1)\ln(x)} y \\ &= y x^{y-1} \\ f_{xy}(x,y) &= (y\,\mathrm{e}^{(y-1)\ln(x)})_y \\ &= \mathrm{e}^{(y-1)\ln(x)} + y\,\mathrm{e}^{(y-1)\ln(x)}\ln(x) \\ &= (1 + y\ln(x)) x^{y-1}\,. \end{aligned}$$

Auf der anderen Seite wird

$$\begin{aligned} f_y(x,y) &= (\mathrm{e}^{y\ln(x)})_y \\ &= \mathrm{e}^{y\ln(x)}\ln(x) \\ &= x^y \ln(x) \\ f_{yx}(x,y) &= (\mathrm{e}^{y\ln(x)}\ln(x))_x \\ &= \mathrm{e}^{y\ln(x)} y x^{-1}\ln(x) + \mathrm{e}^{y\ln(x)} x^{-1} \\ &= y x^{y-1}\ln(x) + x^{y-1}\,. \end{aligned}$$

Also ist in der Tat $f_{xy} = f_{yx}$.

(2) Auf der einen Seite wird

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= -\frac{1}{(x^2+y^2)^2}\cdot 2x &&= \frac{-2x}{(x^2+y^2)^2} \\ f_{xy}(x,y) &= -2x\,\frac{-2}{(x^2+y^2)^3}\cdot 2y &&= \frac{8xy}{(x^2+y^2)^3} \end{aligned}$$

Auf der anderen Seite wird

$$\begin{aligned} f_y(x,y) &= -\frac{1}{(x^2+y^2)^2}\cdot 2y &&= \frac{-2y}{(x^2+y^2)^2} \\ f_{yx}(x,y) &= -2y\,\frac{-2}{(x^2+y^2)^3}\cdot 2x &&= \frac{8xy}{(x^2+y^2)^3} \end{aligned}$$

Also ist in der Tat $f_{xy} = f_{yx}$.

Aufgabe 45

(1) Auf der einen Seite wird

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= 2\ln(3)xy\,3^{x^2y} \\ f_{xy}(x,y) &= (2\ln(3)x + 2\ln(3)xy \cdot \ln(3)x^2)3^{x^2y} \end{aligned}$$

Auf der anderen Seite wird

$$\begin{aligned} f_y(x,y) &= \ln(3)x^2 3^{x^2y} \\ f_{yx}(x,y) &= (2\ln(3)x + \ln(3)x^2 \cdot 2\ln(3)xy)3^{x^2y} \end{aligned}$$

Also ist in der Tat $f_{xy} = f_{yx}$.

(2) Auf der einen Seite wird

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= \tfrac{-4x^3}{(x^4+y^2)^2} \cdot (x^4+y^2) &= \tfrac{-4x^3}{x^4+y^2} \\ f_{xy}(x,y) &= \tfrac{8x^3y}{(x^4+y^2)^2} \end{aligned}$$

Auf der anderen Seite wird

$$\begin{aligned} f_y(x,y) &= \tfrac{2y}{(x^4+y^2)^2} \cdot (x^4+y^2) &= \tfrac{-2y}{x^4+y^2} \\ f_{yx}(x,y) &= \tfrac{8x^3y}{(x^4+y^2)^2} \end{aligned}$$

Also ist in der Tat $f_{xy} = f_{yx}$.

Aufgabe 46

Es ist $h_x(x,y) = 2x$ und $h_y(x,y) = -2y$. Nach der Kettenregel ergibt sich somit

$$\begin{aligned} \big(h(f(t),g(t))\big)' &= h_x(f(t),g(t)) \cdot f'(t) + h_y(f(t),g(t)) \cdot g'(t) \\ &= \tfrac{2}{\cos(t)} \cdot \tfrac{\sin(t)}{\cos(t)^2} - 2\tan(t) \cdot \tfrac{\cos(t)\cos(t) - \sin(t)(-\sin(t))}{\cos(t)^2} \\ &= \tfrac{2}{\cos(t)} \cdot \tfrac{\sin(t)}{\cos(t)^2} - 2\,\tfrac{\sin(t)}{\cos(t)} \cdot \tfrac{1}{\cos(t)^2} \\ &= 2\tfrac{\sin(t)}{\cos(t)^3} - 2\tfrac{\sin(t)}{\cos(t)^3} \\ &= 0\,. \end{aligned}$$

Auf direktem Wege ergibt sich

$$\big(h(f(t),g(t))\big)' \;=\; \left(\frac{1}{\cos(t)^2} - \tan(t)^2\right)' \;=\; \left(\frac{1-\sin(t)^2}{\cos(t)^2}\right)' \;=\; 1' \;=\; 0\,,$$

also dasselbe.

Aufgabe 47

(1) Es ist $h_x(x,y) = y^2$ und $h_y(x,y) = 2xy$. Nach der Kettenregel ergibt sich somit

$$\begin{aligned} \big(h(f(t),g(t))\big)' &= h_x(f(t),g(t)) \cdot f'(t) + h_y(f(t),g(t)) \cdot g'(t) \\ &= (1/t)^2 \cdot 2t + 2t^2(1/t) \cdot (-1/t^2) \\ &= 2/t - 2/t \\ &= 0\,. \end{aligned}$$

Auf direktem Wege ergibt sich

$$\big(h(f(t),g(t))\big)' \;=\; \big(t^2 \cdot (1/t)^2\big)' \;=\; 1' \;=\; 0\,,$$

also dasselbe.

(2) Es ist $h_x(x,y) = 2x$ und $h_y(x,y) = 2y$. Nach der Kettenregel ergibt sich somit

$$\begin{aligned}\big(h(f(t),g(t))\big)' &= h_x(f(t),g(t)) \cdot f'(t) + h_y(f(t),g(t)) \cdot g'(t) \\ &= 2\sin(t)\cdot\cos(t) + 2\cos(t)\cdot(-\sin(t)) \\ &= 0\,.\end{aligned}$$

Auf direktem Wege ergibt sich

$$\big(h(f(t),g(t))\big)' = \big(\sin(t)^2 + \cos(t)^2\big)' = 1' = 0\,,$$

also dasselbe.

Aufgabe 48

Es wird $(h \circ (f,g))(t) = f(t)g(t)$.

Es ist $h_x(x,y) = (xy)_x = y$. Es ist $h_y(x,y) = (xy)_y = x$.

Nach Kettenregel wird

$$\begin{aligned}(f(t)g(t))' &= (h \circ (f,g))'(t) \\ &= h_x(f(t),g(t)) \cdot f'(t) + h_y(f(t),g(t)) \cdot g'(t) \\ &= g(t) \cdot f'(t) + f(t) \cdot g'(t)\end{aligned}$$

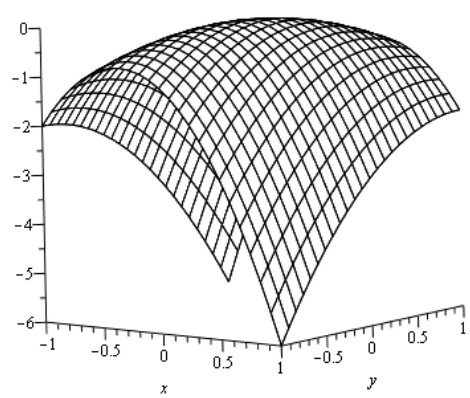
für $t \in \mathbf{R}$, und dies ist gerade die Produktregel.

Aufgabe 49

(1) Es ist

$$\begin{aligned}f_x(x,y) &= -6x + 2y \\ f_y(x,y) &= 2x - 2y \\ f_{xx}(x,y) &= -6 \\ f_{xy}(x,y) &= 2 \\ f_{yy}(x,y) &= -2\end{aligned}$$

Eine notwendige Bedingung für $(x_0\,, y_0)$, eine lokale Extremstelle zu sein, ist $f_x(x_0\,,y_0) = -6x_0 + 2y_0 \overset{!}{=} 0$ und $f_y(x_0\,,y_0) = 2x_0 - 2y_0 \overset{!}{=} 0$. Aus der ersten Gleichung erhalten wir $y_0 = 3x_0\,x$, dies eingesetzt in die zweite Gleichung gibt $-4x_0 = 0$, also insgesamt $(x_0\,,y_0) = (0,0)$.
Es ist $f_{xx}(0,0) = -6 < 0$ und $(f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2)(0,0) = 8 > 0$. Also ist $(0,0)$ eine lokale Maximalstelle.



(2) Es ist

$$\begin{array}{rcl} f_x(x,y) &=& -(1+\mathrm{e}^y)\sin(x) \\ f_y(x,y) &=& (\cos(x)-1-y)\mathrm{e}^y \\ f_{xx}(x,y) &=& -(1+\mathrm{e}^y)\cos(x) \\ f_{xy}(x,y) &=& -\mathrm{e}^y\sin(x) \\ f_{yy}(x,y) &=& (\cos(x)-2-y)\mathrm{e}^y \end{array}$$

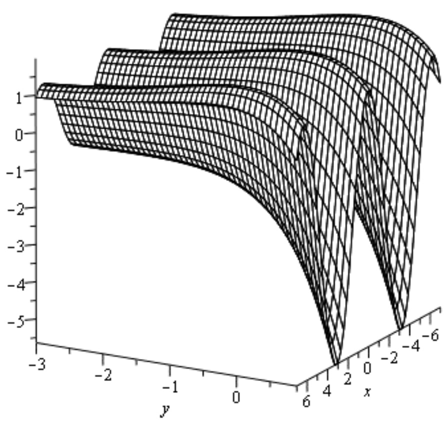
Sei $(x_0\,,\,y_0) \in \mathbf{R}^2$. Eine notwendige Bedingung für $(x_0\,,\,y_0)$, eine lokale Extremstelle zu sein, ist $f_x(x_0\,,\,y_0) = 0$ und $f_y(x_0\,,\,y_0) = 0$, d.h. $(x_0\,,\,y_0) \in \{(n\pi\,,\,\cos(n\pi)-1)\,:\,n \in \mathbf{Z}\}$.

Zu den Punkten $(x_0\,,\,y_0) \in \{(2k\pi\,,\,0)\,:\,k \in \mathbf{Z}\}$. Es ist $f_{xx}(x_0\,,\,y_0) = -2 < 0$. Es ist $(f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2)(x_0\,,\,y_0) = 2 > 0$. Also ist $(2k\pi, 0)$ eine lokale Maximalstelle für $k \in \mathbf{Z}$.

Zu den Punkten $(x_0\,,\,y_0) \in \{((2k+1)\pi\,,\,-2)\,:\,k \in \mathbf{Z}\}$. Es ist

$$(f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2)(x_0\,,\,y_0) \;=\; -(1+\mathrm{e}^{-2})\mathrm{e}^{-2} \;<\; 0\,.$$

Also ist $((2k+1)\pi\,,\,-2$ für $k \in \mathbf{Z}$ keine lokale Extremstelle, sondern eine Sattelstelle.



Aufgabe 50

(1) Es ist

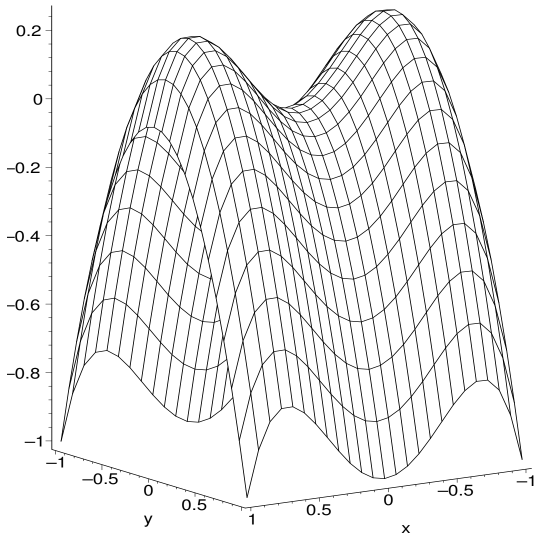
$$\begin{array}{rcl} f_x(x,y) &=& 2x - 4x^3 \;=\; -2x(x\sqrt{2}-1)(x\sqrt{2}+1) \\ f_y(x,y) &=& -2y \\ f_{xx}(x,y) &=& 2 - 12x^2 \\ f_{xy}(x,y) &=& 0 \\ f_{yy}(x,y) &=& -2 \end{array}$$

Sei $(x_0\,,y_0) \in \mathbf{R}^2$. Eine notwendige Bedingung für $(x_0\,,y_0)$, eine lokale Extremstelle zu sein, ist $f_x(x_0\,,y_0) = 0$ und $f_y(x_0\,,y_0) = 0$, d.h. $x_0 \in \{-\sqrt{2}/2,\,0,\,\sqrt{2}/2\}$ und $y_0 = 0$.

Zu $(-\sqrt{2}/2, 0)$. Es ist $f_{yy}(-\sqrt{2}/2, 0) = -2 < 0$ und $(f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2)(-\sqrt{2}/2, 0) = (2-6)(-2) - 0^2 = 4 > 0$. Also ist $(-\sqrt{2}/2, 0)$ eine lokale Maximalstelle.

Zu $(0,0)$. Es ist $(f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2)(0,0) = (2-0)(-2) - 0^2 = -4 < 0$. Also ist $(0,0)$ keine lokale Extremstelle, sondern eine Sattelstelle.

Zu $(\sqrt{2}/2, 0)$. Es ist $f_{yy}(\sqrt{2}/2, 0) = -2 < 0$ und $(f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2)(\sqrt{2}/2, 0) = (2-6)(-2)-0^2 = 4 > 0$. Also ist $(\sqrt{2}/2, 0)$ eine lokale Maximalstelle.



(2) Es ist

$$
\begin{array}{rcl}
f_x(x,y) & = & \cos(x)\sin(y) \\
f_y(x,y) & = & \sin(x)\cos(y) \\
f_{xx}(x,y) & = & -\sin(x)\sin(y) \\
f_{xy}(x,y) & = & \cos(x)\cos(y) \\
f_{yy}(x,y) & = & -\sin(x)\sin(y)
\end{array}
$$

Sei $(x_0\,, y_0) \in \mathbf{R}^2$. Eine notwendige Bedingung für $(x_0\,, y_0)$, eine lokale Extremstelle zu sein, ist es, $f_x(x_0\,, y_0) = 0$ und $f_y(x_0\,, y_0) = 0$ zu erfüllen.

Ersteres bedeutet, $x_0 = \pi/2 + k\pi$ für ein $k \in \mathbf{Z}$ oder $y_0 = \ell\pi$ für ein $\ell \in \mathbf{Z}$ zu erfüllen.

Zweiteres bedeutet, $x_0 = k\pi$ für ein $k \in \mathbf{Z}$ oder $y_0 = \pi/2 + \ell\pi$ für ein $\ell \in \mathbf{Z}$ zu erfüllen.

Somit erhalten wir die Flachstellen, und damit noch möglichen lokalen Extremstellen, $(\pi/2 + k\pi,\, \pi/2 + \ell\pi)$ und $(k\pi,\, \ell\pi)$ für $k,\, \ell \in \mathbf{Z}$.

Zu $(\pi/2 + k\pi,\, \pi/2 + \ell\pi)$. Es ist

$$f_{xx}(\pi/2 + k\pi,\, \pi/2 + \ell\pi) \;=\; -\sin(\pi/2 + k\pi)\sin(\pi/2 + \ell\pi) \;=\; (-1)^{k+\ell+1}\,.$$

Es ist

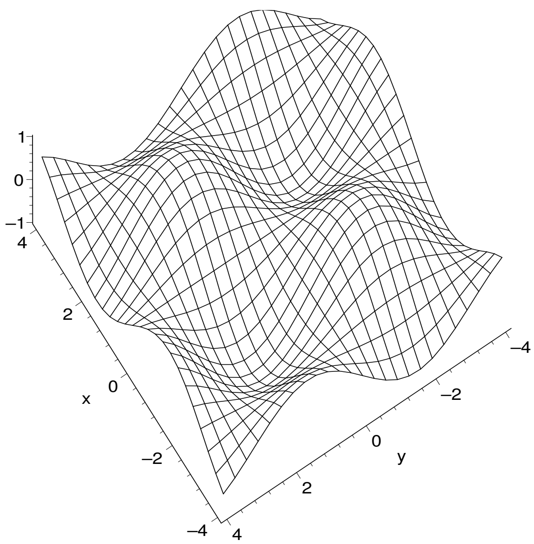
$$(f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2)(\pi/2+k\pi,\, \pi/2+\ell\pi) \;=\; \big(\sin(\pi/2+k\pi)\sin(\pi/2+\ell\pi)\big)^2 - \big(\cos(\pi/2+k\pi)\cos(\pi/2+\ell\pi)\big)^2 \;=\; 1 \;>\; 0\,.$$

Also ist $(\pi/2 + k\pi,\, \pi/2 + \ell\pi)$ eine lokale Maximalstelle, falls $k + \ell$ gerade ist; es ist eine lokale Minimalstelle, falls $k + \ell$ ungerade ist; wobei $k,\, \ell \in \mathbf{Z}$.

Zu $(k\pi,\, \ell\pi)$. Es ist

$$(f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2)(k\pi,\, \ell\pi) \;=\; \big(\sin(k\pi)\sin(\ell\pi)\big)^2 - \big(\cos(k\pi)\cos(\ell\pi)\big)^2 \;=\; -1 \;<\; 0\,.$$

Also ist $(k\pi,\, \ell\pi)$ keine lokale Extremstelle, sondern eine Sattelstelle; wobei $k,\, \ell \in \mathbf{Z}$.



(3) Es ist

$$\begin{array}{rcll} f_x(x,y) & = & (y+xy)\mathrm{e}^{x+y} & = \ (x+1)y\mathrm{e}^{x+y} \\ f_y(x,y) & = & (x+xy)\mathrm{e}^{x+y} & = \ (y+1)x\,\mathrm{e}^{x+y} \\ f_{xx}(x,y) & = & (2y+xy)\mathrm{e}^{x+y} & \\ f_{xy}(x,y) & = & (1+x+y+xy)\mathrm{e}^{x+y} & \\ f_{yy}(x,y) & = & (2x+xy)\mathrm{e}^{x+y} & \end{array}$$

Sei $(x_0\,,y_0) \in \mathbf{R}^2$. Eine notwendige Bedingung für $(x_0\,,y_0)$, eine lokale Extremstelle zu sein, ist $f_x(x_0\,,y_0) = 0$ und $f_y(x_0\,,y_0) = 0$ zu erfüllen.

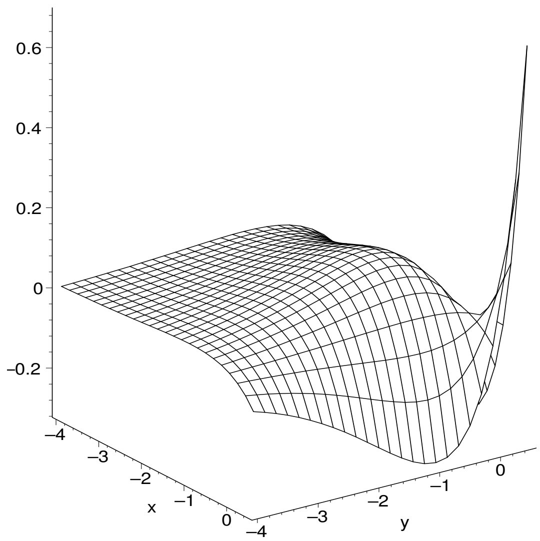
Ersteres bedeutet, $x_0 = -1$ oder $y_0 = 0$.

Zweiteres bedeutet, $x_0 = 0$ oder $y_0 = -1$.

Somit erhalten wir die Flachstellen, und damit noch möglichen lokalen Extremstellen, $(0,0)$ und $(-1,-1)$.

Zu $(0,0)$. Es ist $(f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2)(0,0) = -1 < 0$. Also ist die Flachstelle $(0,0)$ keine lokale Extremstelle, sondern eine Sattelstelle.

Zu $(-1,-1)$. Es ist $f_{xx}(-1,-1) = -\mathrm{e}^{-2} < 0$. Es ist $(f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2)(-1,-1) = \mathrm{e}^{-4} > 0$. Also ist die Flachstelle $(-1,-1)$ eine lokale Maximalstelle.



Aufgabe 51

Sei $(a, b, c) \in \mathbf{R}_{>0} \times \mathbf{R}_{>0} \times \mathbf{R}_{>0}$, damit der resultierende Quader geometrisch einen Sinn hat.

Die Oberfläche unseres Quaders soll $2ab+2ac+2bc = 6$ betragen. Daraus entnehmen wir, daß $ab+(a+b)c = 3$ und also $c = c(a, b) = (3 - ab)/(a + b)$. Eingesetzt in das Volumen des Quaders ergibt sich

$$V(a, b) \;=\; a \cdot b \cdot c(a, b) \;=\; ab(3 - ab)/(a + b)\ .$$

Hiervon suchen wir lokale Maximalstellen.

Es wird

$$\begin{array}{rcl}
V_a(a,b) & = & b(3-ab)/(a+b) - ab^2/(a+b) - ab(3-ab)/(a+b)^2 \\
& = & b^2(3-a^2-2ab)/(a+b)^2 \\
V_b(a,b) & = & a(3-ab)/(a+b) - a^2b/(a+b) - ab(3-ab)/(a+b)^2 \\
& = & a^2(3-b^2-2ab)/(a+b)^2 \\
V_{aa}(a,b) & = & b^2(-2a-2b)/(a+b)^2 - 2b^2(3-a^2-2ab)/(a+b)^3 \\
& = & -2b^2(3+b^2)/(a+b)^3 \\
V_{ab}(a,b) & = & 2b(3-a^2-2ab)/(a+b)^2 + b^2(-2a)/(a+b)^2 - 2b^2(3-a^2-2ab)/(a+b)^3 \\
& = & (2b(3-a^2-2ab)(a+b) + b^2(-2a)(a+b) - 2b^2(3-a^2-2ab))/(a+b)^3 \\
& = & (6ab - 2a^3b - 6a^2b^2 - 2ab^3)/(a+b)^3 \\
V_{bb}(a,b) & = & a^2(-2a-2b)/(a+b)^2 - 2a^2(3-b^2-2ab)/(a+b)^3 \\
& = & -2a^2(3+a^2)/(a+b)^3
\end{array}$$

Beachte zudem durchweg, daß wir $a,\, b\, >\, 0$ vorausgesetzt hatten.

Dafür, daß $(a_0\, ,\, b_0)$ eine lokale Extremstelle ist, ist $V_a(a_0\, ,\, b_0) = 0$ und $V_b(a_0\, ,\, b_0) = 0$ notwendig.

Ersteres gibt die Bedingung $3 - a^2 - 2ab = 0$.

Zweiteres gibt die Bedingung $3 - b^2 - 2ab = 0$.

Die Differenz liefert $a^2 = b^2$, also $a = b$.

Eingesetzt in die erstere Bedingung erhalten wir $3 - 3a^2 = 0$, also $a = 1$.

Das liefert auch $b = 1$.

Bleibt zu überprüfen, ob die Flachstelle $(1,1)$ eine lokale Maximalstelle darstellt.

Es ist

$$V_{aa}(1,1) \; = \; -2 \cdot 4/8 \; = \; -1 \; < \; 0 \, .$$

Es ist

$$(V_{aa}V_{bb} - V_{ab}^2)(1,1) \; = \; (-1)(-1) - (-4/8)^2 \; = \; 3/4 \; > \; 0 \, .$$

Somit ist $(1,1)$ in der Tat eine lokale Maximalstelle von $V(a,b)$.

Dort ist dann neben $a = 1$ und $b = 1$ auch $c = (3 - ab)/(a + b) = 1$, so daß dort ein Würfel vorliegt.

Aufgabe 52

(1) Nach Ablauf der 50 Jahre stehen

$$K_n \; = \; q^n \cdot K_0 + q \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} \cdot R \; = \; 1{,}025^{50} \cdot 10.000 + 1{,}025 \cdot \frac{1{,}025^{50} - 1}{1{,}025 - 1}(-100) \; \approx \; 24378{,}94$$

Euro zu Buche.

(2) Bei Auszahlung jeweils zu Jahresende stünden nach Ablauf der 50 Jahre aber

$$K_n \; = \; q^n \cdot K_0 + \frac{q^n - 1}{q - 1} \cdot R \; = \; 1{,}025^{50} \cdot 10.000 + \frac{1{,}025^{50} - 1}{1{,}025 - 1}(-100) \; \approx \; 24622{,}65$$

Euro zu Buche.

Aufgabe 53

(1) Nach Ablauf der 10 Jahre stehen

$$K_n \; = \; q^n \cdot K_0 + \frac{q^n - 1}{q - 1} \cdot R \; = \; 1{,}04^{10} \cdot 2.000 + \frac{1{,}04^{10} - 1}{1{,}04 - 1}(-200) \; \approx \; 559{,}27$$

Euro zu Buche.

(2) Bei Auszahlung jeweils zu Jahresanfang stünden nach Ablauf der 10 Jahre nur

$$K_n \; = \; q^n \cdot K_0 + q \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} \cdot R \; = \; 1{,}04^{10} \cdot 2.000 + 1{,}04 \cdot \frac{1{,}04^{10} - 1}{1{,}04 - 1}(-200) \; \approx \; 463{,}22$$

Euro zu Buche.

Aufgabe 54

(1) Wir benötigen einen jährlichen Zinsfaktor von

$$q \; = \; (K_n/K_0)^{1/n} \; = \; (15.000/10.000)^{1/5} \; \approx \; 1{,}0845 \, ,$$

d.h. einen jährlichen Zinssatz von 8,45%.

(2) Es sind 5 Jahre gerade 60 Monate. Wir benötigen also einen monatlichen Zinsfaktor von

$$q \; = \; (K_n/K_0)^{1/n} \; = \; (15.000/10.000)^{1/60} \; \approx \; 1{,}00678 \, ,$$

d.h. einen monatlichen Zinssatz von 0,678%.

Aufgabe 55

(1) Man muß zuanfangs

$$K_0 \;=\; q^{-n}\left(K_n - \frac{q^n-1}{q-1}\,R\right) \;=\; 1{,}025^{-4}\left(5.000 - \frac{1{,}025^4-1}{1{,}025-1}\cdot 1.000\right) \;\approx\; 767{,}78$$

Euro anlegen.

(2) Wir benötigen einen jährlichen Zinsfaktor von

$$q \;=\; (K_n/K_0)^{1/n} \;=\; (18.000/10.000)^{1/10} \;\approx\; 1{,}0605\,,$$

d.h. einen jährlichen Zinssatz von 6,05%.

(3) Die erforderliche Anlagedauer beträgt

$$n \;=\; \ln\left(\frac{K_n + \frac{R}{q-1}}{K_0 + \frac{R}{q-1}}\right)\Big/\ln(q) \;=\; \ln\left(\frac{30.000 + \frac{500}{1{,}052-1}}{10.000 + \frac{500}{1{,}052-1}}\right)\Big/\ln(1{,}052) \;\approx\; 13{,}87$$

Jahre, d.h. in der Praxis aufgerundete 14 Jahre.

(4) Ein Jahreszinssatz von 4,3% bedeutet für den monatlichen Zinsfaktor q, daß

$$q^{12} \;=\; \frac{K_{12}}{K_0} \;=\; 1{,}043\,,$$

d.h. daß

$$q \;=\; 1{,}043^{1/12} \;\approx\; 1{,}00351\,.$$

Somit ergibt sich ein dem Jahreszinssatz von 4,3% entsprechender Monatszinssatz von 0,351%.

Aufgabe 56

(1) Man muß zuanfangs

$$K_0 \;=\; q^{-n}\big(K_n - \frac{q^n-1}{q-1}\,R\big) \;=\; 1{,}042^{-3}(1.000 - \frac{1{,}042^3-1}{1{,}042-1}\cdot 83) \;\approx\; 654{,}43$$

Euro anlegen.

(2) Die Sparrate muß

$$R \;=\; \frac{q-1}{q^n-1}(K_n - q^n K_0) \;=\; \frac{1{,}035-1}{1{,}035^5-1}(10.000 - 1{,}035^5\cdot 5.000) \;\approx\; 757{,}41$$

Euro betragen.

(3) Ein Jahreszinssatz von 5% bedeutet für den täglichen Zinsfaktor q, daß

$$q^{365} \;=\; \frac{K_{365}}{K_0} \;=\; 1{,}05\,,$$

d.h. daß

$$q \;=\; 1{,}05^{1/365} \;\approx\; 1{,}0001337\,.$$

Somit ergibt sich ein dem Jahreszinssatz von 5% entsprechender Tageszinssatz von 0,01337%.

(4) Wählen wir als Verzinsungszeitspanne 1 Monat, so ergibt sich als monatlicher Zinsfaktor zunächst

$$q \;=\; 1{,}03^{1/12} \;\approx\; 1{,}002466\;,$$

d.h. ein monatlicher Zinssatz von 0,2466%.
Die erforderliche Anlagedauer beträgt, mit diesem Zinsfaktor q,

$$n \;=\; \ln\!\left(\frac{K_n + \frac{R}{q-1}}{K_0 + \frac{R}{q-1}}\right) / \ln(q) \;=\; \ln\!\left(\frac{1.100 + \frac{-2}{q-1}}{1.000 + \frac{-2}{q-1}}\right) / \ln(q) \;\approx\; 172{,}36$$

Monate, d.h. in der Praxis, bei jährlicher Zinsausschüttung, aufgerundete 15 Jahre.
Ohne Kontoführungsgebühr würde die erforderliche Anlagedauer dagegen

$$n \;=\; \ln\!\left(\frac{K_n}{K_0}\right) / \ln(q) \;=\; \ln\!\left(\frac{1.100}{1.000}\right) / \ln(q) \;\approx\; 38{,}69$$

Monate betragen, d.h. in der Praxis, bei jährlicher Zinsausschüttung, aufgerundete 4 Jahre.

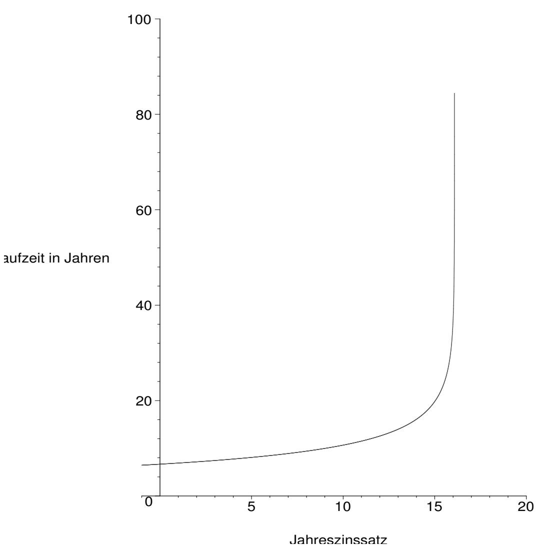
(5) Wählen wir als Verzinsungszeitspanne 1 Monat, so ergibt sich als monatlicher Zinsfaktor zunächst

$$q \;=\; 1{,}073^{1/12} \;\approx\; 1{,}005889\;,$$

d.h. einen monatlichen Zinssatz von 0,5889%.
Die Tilgung des Kredits benötigt, mit diesem Zinsfaktor q,

$$n \;=\; \ln\!\left(\frac{K_n + \frac{R}{q-1}}{K_0 + \frac{R}{q-1}}\right) / \ln(q) \;=\; \ln\!\left(\frac{0 + \frac{10.000}{q-1}}{-800.000 + \frac{10.000}{q-1}}\right) / \ln(q) \;\approx\; 108{,}48$$

Monate, d.h. in der Praxis aufgerundete 109 Monate, d.h. 9 Jahre und 1 Monat.
Ohne Kreditzinsen würde es dagegen 800.000/10.000 = 80 Monate dauern, d.h. 6 Jahre und 8 Monate.

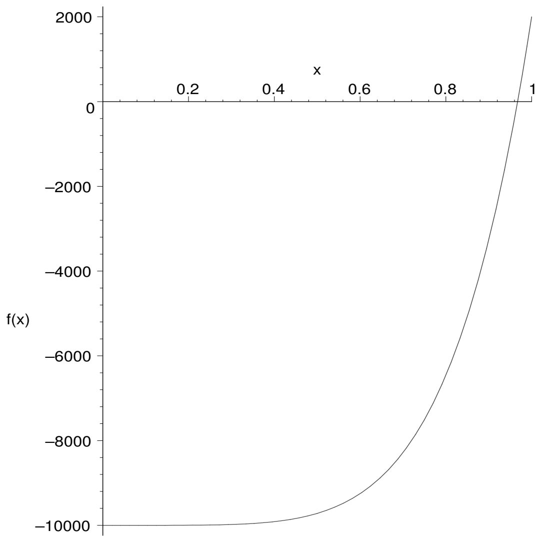


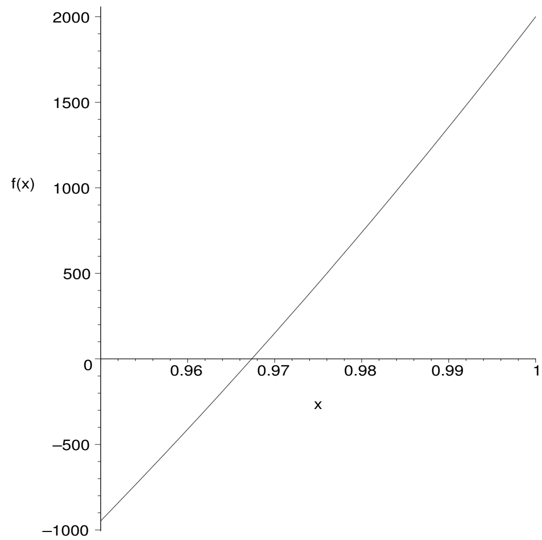
Aufgabe 57

Sei

$$f(x) \;:=\; \sum_{i=0}^{6} x^i E_i \;=\; x^0 \cdot (-10.000) + x^5 \cdot 6.000 + x^6 \cdot 6.000$$

Wir ermitteln näherungsweise die Nullstelle von $f(x)$ auf $(0, 1)$.





Als Nullstelle ergibt sich graphisch $x_0 \approx 0{,}967$.

Dies liefert $q_{\text{int}} = x_0^{-1} \approx 1{,}0341$, und also den internen Zinssatz von 3,41%.

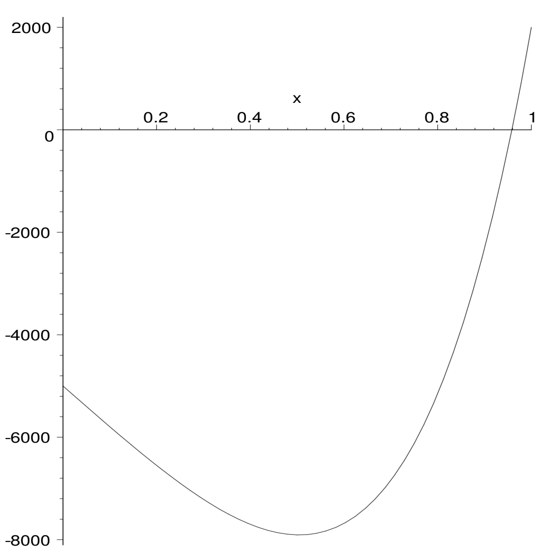
Damit sich dieses Geschäft lohnt, muß man also mit der Bank einen Darlehenszinssatz von weniger als 3,41% heraushandeln. Das scheint unwahrscheinlich.

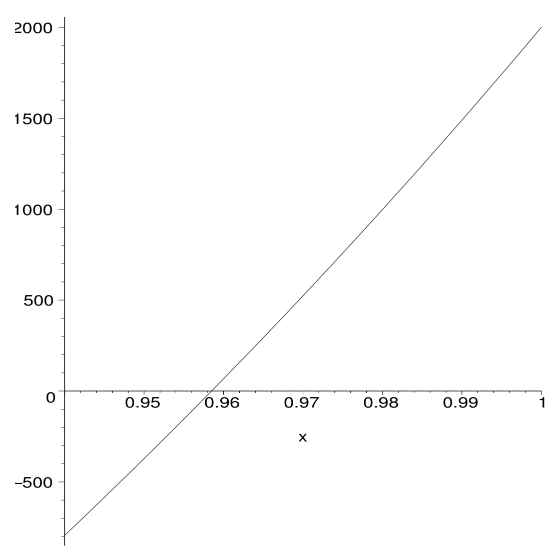
Aufgabe 58

Sei

$$f(x) \;:=\; \sum_{i=0}^{5} x^i E_i \;=\; x^0 \cdot (-5.000) + x^1 \cdot (-8.000) + x^2 \cdot 0 + x^3 \cdot 5.000 + x^4 \cdot 5.000 + x^5 \cdot 5.000$$

Wir ermitteln näherungsweise die Nullstelle von $f(x)$ auf $(0, 1)$.





Als Nullstelle ergibt sich graphisch $x_0 \approx 0{,}958$.

Dies liefert $q_{\text{int}} = x_0^{-1} \approx 1{,}0438$, und also den internen Zinssatz von 4,38%.

Damit sich dieses Geschäft lohnt, muß man also mit der Bank einen Darlehenszinssatz von weniger als 4,38% heraushandeln.

Aufgabe 59

Wir erhalten

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} & & \text{nicht bildbar} \\
\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} & & \text{nicht bildbar} \\
\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} & & \text{nicht bildbar} \\
\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \end{pmatrix} .
\end{aligned}$$

Aufgabe 60

Wir erhalten

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 5 \end{pmatrix} = 5 \\
\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 6 & 2 & 1 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & & \text{nicht bildbar} \\
\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} & & \text{nicht bildbar} \\
\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} & & \text{nicht bildbar} \\
\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & & \text{nicht bildbar} \\
\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} & & \text{nicht bildbar} \\
\begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} & & \text{nicht bildbar} \\
\begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} & & \text{nicht bildbar} \\
\begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -1 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} & & \text{nicht bildbar} \\
\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 9 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} & & \text{nicht bildbar} \\
\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} & & \text{nicht bildbar}
\end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{nicht bildbar}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{nicht bildbar}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} .$$

Aufgabe 61

Es wird $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 4 & 1 & 6 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Sodann wird $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 4 & 1 & 6 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 9 & 9 \\ 6 & 7 & 18 \\ 6 & 3 & 7 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 62

(1) Es ist $A^0 = \mathrm{E}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ per Konvention.

Es ist $A^1 = A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Es wird $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Es wird $A^3 = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Es wird $A^4 = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 3 \\ 5 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Es wird $A^5 = \begin{pmatrix} 12 & 4 & 5 \\ 9 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

(2) Es ist $A^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
Es ist $A^1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.
Es ist $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.
Es ist $A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
Also wird $A^{3m+0} = A^0$, $A^{3m+1} = A^1$ und $A^{3m+2} = A^2$ für $m \geqslant 0$.
Das deckt alle auftretenden Potenzen ab.

Aufgabe 63

Nein, es ist z.B. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = 0$, aber $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$.

Aufgabe 64

(1) Nein, es ist z.B. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$, aber $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$.

(2) Ja. Schreibe dazu $A = \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha' \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} \beta & \beta' \end{pmatrix}$. Es wird

$$AB = \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta & \beta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha\beta & \alpha\beta' \\ \alpha'\beta & \alpha'\beta' \end{pmatrix}$$

Wäre das gleich $\mathrm{E}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, dann wäre $\alpha\beta = 1$, mithin $\alpha \neq 0$ und $\beta \neq 0$, sowie $\alpha'\beta' = 1$, mithin $\alpha' \neq 0$ und $\beta' \neq 0$. Dann aber wäre $\alpha\beta' \neq 0$, was dann nicht ginge.

Aufgabe 65

(1) Es wird $f(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$.

(2) Wir setzen $b = \binom{\beta_1}{\beta_2} \in \mathbf{R}^{2\times 1}$ an. Es soll nun

$$f(b) \;=\; \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} b \;\stackrel{!}{=}\; b\,,$$

d.h. $2\beta_1 + \beta_2 \stackrel{!}{=} \beta_1$ und $-\beta_1 \stackrel{!}{=} \beta_2$. Letzteres in ersteres eingesetzt erhalten wir $\beta_1 \stackrel{!}{=} \beta_1$, was stets erfüllt ist. Somit wird

$$\{\, b \in \mathbf{R}^{2\times 1} \;:\; f(b) = b \,\} \;=\; \{\, \begin{pmatrix} \beta_1 \\ -\beta_1 \end{pmatrix} \;:\; \beta_1 \in \mathbf{R} \,\} \;=\; \{\, \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \;:\; \lambda \in \mathbf{R} \,\}\,.$$

(3) Es ist $(f \circ f)(b) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} (\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} b) = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} b$ für $b \in \mathbf{R}^{2\times 1}$.
Ausführlich geschrieben wird also $f \circ f : \mathbf{R}^{2\times 1} \longrightarrow \mathbf{R}^{2\times 1}$, $b \longmapsto \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} b$.

Aufgabe 66

(1) Es wird

$$\begin{array}{rcccl} f(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}) & = & \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - (\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}^{\mathrm{t}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \\ f(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}) & = & \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - (\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}^{\mathrm{t}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ f(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}) & = & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - (\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}^{\mathrm{t}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\,. \end{array}$$

(2) Für $b \in \mathbf{R}^{3\times 1}$ ist $f(b) = b$ genau dann, wenn $b - (a^{\mathrm{t}}\, b)\, a = b$, d.h. wenn $a^{\mathrm{t}} b = 0$ ist. Schreiben wir $b = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix}$, so wird $a^{\mathrm{t}} b = \beta_1 + \beta_3$, was genau dann null ist, wenn $\beta_3 = -\beta_1$. Wir erhalten also

$$\{\, b \in \mathbf{R}^{3\times 1} \;:\; f(b) = b \,\} \;=\; \{\, \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ -\beta_1 \end{pmatrix} \;:\; \beta_1\,,\, \beta_2 \;\in\; \mathbf{R} \,\}\,.$$

(3) Für $b \in \mathbf{R}^{3\times 1}$ ist $f(b) = -b$ genau dann, wenn $b - (a^{\mathrm{t}}\, b)\, a = -b$, d.h. wenn $(a^{\mathrm{t}}\, b)\, a = 2b$ ist. Schreiben wir $b = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix}$, so wird $a^{\mathrm{t}} b = \beta_1 + \beta_3$. Also ist $(a^{\mathrm{t}}\, b)\, a = 2b$ genau dann, wenn

$$\begin{pmatrix} \beta_1+\beta_3 \\ 0 \\ \beta_1+\beta_3 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} 2\beta_1 \\ 2\beta_2 \\ 2\beta_3 \end{pmatrix}\,.$$

Dies ist genau dann erfüllt, wenn $\beta_2 = 0$ und $\beta_1 = \beta_3$. Wir erhalten also

$$\{\, b \in \mathbf{R}^{3\times 1} \;:\; f(b) = -b \,\} \;=\; \{\, \begin{pmatrix} \beta_1 \\ 0 \\ \beta_1 \end{pmatrix} \;:\; \beta_1 \;\in\; \mathbf{R} \,\} \;=\; \{\, \lambda a \;:\; \lambda \in \mathbf{R} \,\}\,.$$

(4) Für $b \in \mathbf{R}^{3\times 1}$ wird

$$\begin{array}{rcl} (f \circ f)(b) & = & f(b - (a^{\mathrm{t}}\, b)\, a) \\ & = & (b - (a^{\mathrm{t}}\, b)\, a) - (a^{\mathrm{t}}\, (b - (a^{\mathrm{t}}\, b)\, a))\, a \\ & = & b - (a^{\mathrm{t}}\, b)\, a - (a^{\mathrm{t}}\, b)\, a + (a^{\mathrm{t}}\, b)\, (a^{\mathrm{t}} a)\, a \\ & = & b - (a^{\mathrm{t}}\, b)\, a - (a^{\mathrm{t}}\, b)\, a + 2(a^{\mathrm{t}}\, b)\, a \\ & = & b\,. \end{array}$$

Also ist $f \circ f = \mathrm{id}_{\mathbf{R}^{3\times 1}}$, die identische Abbildung.

Man kann sich überlegen, daß es sich bei f um die Spiegelung an der Ebene senkrecht zu a durch 0 handelt.

Aufgabe 67

Es schließen a und b den Winkel $\arccos \frac{a^{\mathrm{t}}\, b}{\|a\|\|b\|} = \arccos \frac{-2}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{2}} \approx 129{,}23^\circ$ ein.

Es schließen a und c den Winkel $\arccos \frac{a^{\mathrm{t}}\, c}{\|a\|\|c\|} = \arccos \frac{3}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{3}} \approx 39{,}23^\circ$ ein.

Es schließen b und c den Winkel $\arccos \frac{b^{\mathrm{t}}\, c}{\|b\|\|c\|} = \arccos \frac{0}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}} = 90^\circ$ ein.

Aufgabe 68

Es schließen a und b den Winkel $\arccos \frac{a^{\mathrm{t}}\, b}{\|a\|\|b\|} = \arccos \frac{0}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}} = 90^\circ$ ein.

Es schließen a und c den Winkel $\arccos \frac{a^{\mathrm{t}}\, c}{\|a\|\|c\|} = \arccos \frac{0}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}} = 90^\circ$ ein.

Es schließen a und d den Winkel $\arccos \frac{a^{\mathrm{t}}\, d}{\|a\|\|d\|} = \arccos \frac{-2}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{4}} = 135^\circ$ ein.

Es schließen b und c den Winkel $\arccos \frac{b^{\mathrm{t}}\, c}{\|b\|\|c\|} = \arccos \frac{1}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}} \approx 65{,}91^\circ$ ein.

Es schließen b und d den Winkel $\arccos \frac{b^{\mathrm{t}}\, d}{\|b\|\|d\|} = \arccos \frac{-1}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{4}} \approx 106{,}78^\circ$ ein.

Es schließen c und d den Winkel $\arccos \frac{c^{\mathrm{t}}\, d}{\|c\|\|d\|} = \arccos \frac{-2}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{4}} = 135^\circ$ ein.

Aufgabe 69

Das Skalarprodukt der fraglichen Vektoren ist

$$a^{\mathrm{t}}\big((a^{\mathrm{t}}\, a)\cdot b - (a^{\mathrm{t}}\, b)\cdot a\big) \;=\; (a^{\mathrm{t}}\, a)\cdot(a^{\mathrm{t}}\, b) - (a^{\mathrm{t}}\, b)\cdot(a^{\mathrm{t}}\, a) \;=\; 0\;,$$

und folglich sind sie zueinander orthogonal.

Beachte zunächst, daß aus $a \neq 0$ folgt, daß $a^{\mathrm{t}}\, a \neq 0$.

Wir *behaupten,* daß $(a^{\mathrm{t}}\, a)\cdot b - (a^{\mathrm{t}}\, b)\cdot a = 0$ genau dann gilt, wenn es ein $\lambda \in \mathbf{R}$ mit $b = \lambda a$ gibt.

Ist zum einen $(a^{\mathrm{t}}\, a)\cdot b - (a^{\mathrm{t}}\, b)\cdot a = 0$, dann ist $b = \frac{a^{\mathrm{t}}\, b}{a^{\mathrm{t}}\, a}\, a$. Mit $\lambda := \frac{a^{\mathrm{t}}\, b}{a^{\mathrm{t}}\, a}$ folgt also $b = \lambda a$.

Ist zum anderen $b = \lambda a$ für ein $\lambda \in \mathbf{R}$, dann wird

$$(a^{\mathrm{t}}\, a)\cdot b - (a^{\mathrm{t}}\, b)\cdot a \;=\; (a^{\mathrm{t}}\, a)\cdot\lambda a - (a^{\mathrm{t}}\,\lambda a)\cdot a \;=\; \lambda(a^{\mathrm{t}}\, a)\cdot a - \lambda(a^{\mathrm{t}}\, a)\cdot a \;=\; 0\,.$$

Aufgabe 70

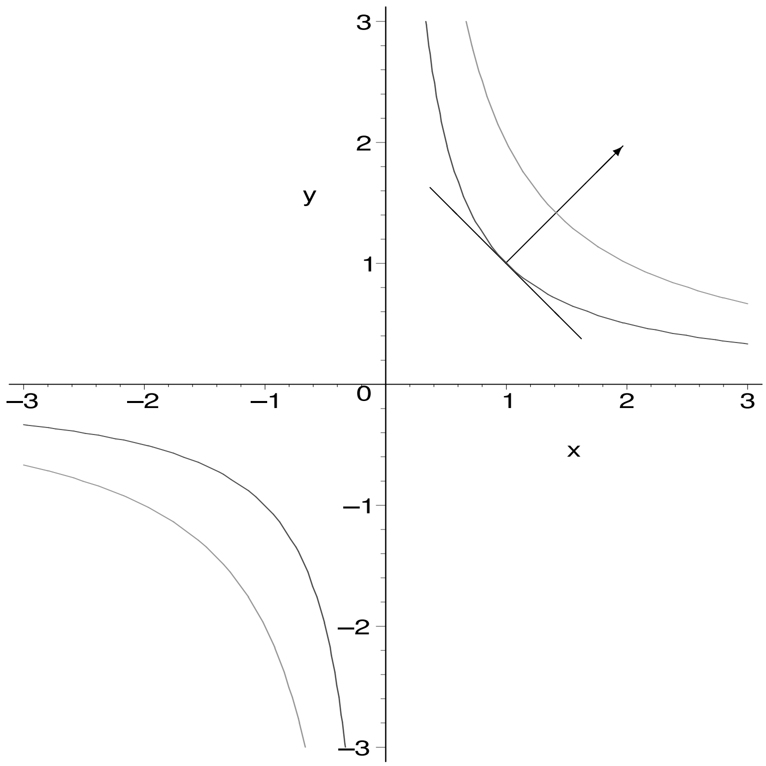
Es genügt, $(\|a\|+\|b\|)^2 - \|a+b\|^2 \overset{!}{\geqslant} 0$ zu wissen. Indertat wird mit Cauchy-Schwarz aus §5.2.2

$$\begin{array}{rcl}
(\|a\|+\|b\|)^2 - \|a+b\|^2 & = & (\|a\|+\|b\|)^2 \\
& = & (\|a\|^2 + 2\|a\|\|b\| + \|b\|^2) - (a+b)^{\mathrm{t}}(a+b) \\
& = & (\|a\|^2 + 2\|a\|\|b\| + \|b\|^2) - (a^{\mathrm{t}}a + a^{\mathrm{t}}b + b^{\mathrm{t}}a + b^{\mathrm{t}}b) \\
& = & (\|a\|^2 + 2\|a\|\|b\| + \|b\|^2) - (\|a\|^2 + 2a^{\mathrm{t}}b + \|b\|^2) \\
& = & 2\|a\|\|b\| - 2a^{\mathrm{t}}b \\
& \geqslant & 2\|a\|\|b\| - 2|a^{\mathrm{t}}b| \\
& \overset{\mathrm{CS}}{\geqslant} & 0\,.
\end{array}$$

Aufgabe 71

Es ist $f_x(x,y) = y$, also $f_x(1,1) = 1$. Es ist $f_x(x,y) = x$, also $f_x(1,1) = 1$. Somit ist $\binom{f_x(1,1)}{f_y(1,1)} = \binom{1}{1}$.

Wir skizzieren die Höhenlinien wie folgt, wobei die äußeren zu $f(x, y) = 2$ gehören und die inneren zu $f(x, y) = 1$. Wir haben den Gradienten $\binom{f_x(1,1)}{f_y(1,1)} = \binom{1}{1}$ am Punkt $(x, y) = (1, 1)$ eingetragen, samt der Tangente der Höhenlinie an diesem Punkt.



Man erkennt die Orthogonalität des Gradienten auf der Höhenlinie.

In diesem Beispiel ergeben sich die verlangten Höhenlinien auch durch Auflösen nach y als $y = 1/x$ resp. $y = 2/x$.

Aufgabe 72

Es ist $f_x(x, y) = \cos(x) \cdot \sin(y)$, also $f_x(\pi/6, \pi/2) = \cos(\pi/6) \cdot \sin(\pi/2) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$.

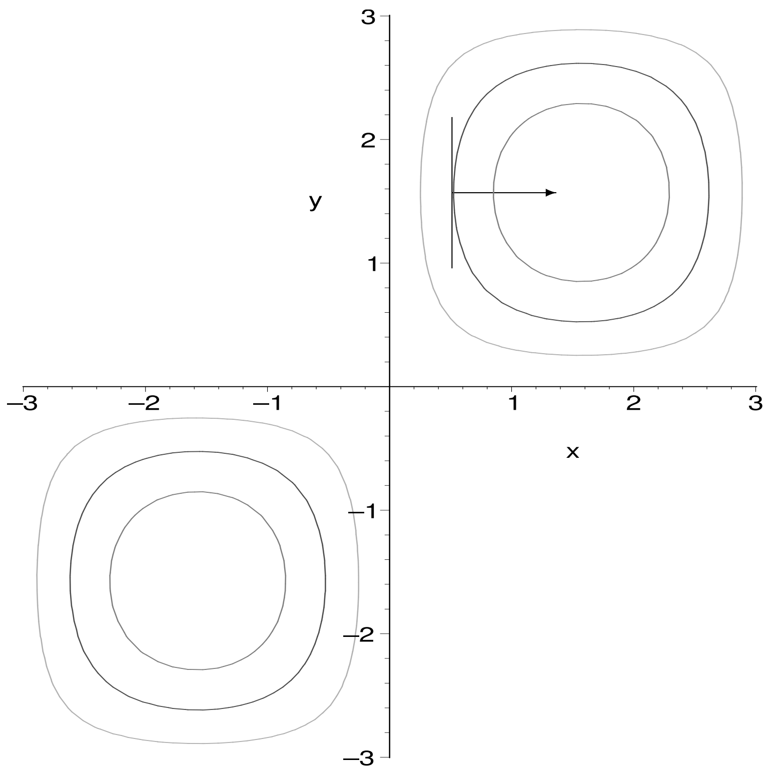
Es ist $f_y(x, y) = \sin(x) \cdot \cos(y)$, also $f_y(\pi/6, \pi/2) = \sin(\pi/6) \cdot \cos(\pi/2) = 0$.

Somit ergibt sich der Gradient von f am Punkt $(\pi/6, \pi/2)$ zu $\binom{f_x(\pi/6,\pi/2)}{f_y(\pi/6,\pi/2)} = \frac{1}{2}\sqrt{3}\binom{1}{0}$

Wir skizzieren die Höhenlinien wie folgt, wobei die äußeren zu $f(x, y) = 1/4$ gehören, die inneren zu $f(x, y) = 3/4$ und die mittleren zu $f(x, y) = 1/2$.

Wir haben den Gradienten $\binom{f_x(\pi/6,\pi/2)}{f_y(\pi/6,\pi/2)} = \frac{1}{2}\sqrt{3}\binom{1}{0}$ am Punkt $(x, y) = (\pi/6, \pi/2)$ eingetragen, samt der

Tangente der Höhenlinie an diesem Punkt.



Man erkennt die Orthogonalität des Gradienten auf der Höhenlinie.

Aufgabe 73

(1) Es wird $a^{\mathrm{t}}\, b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}^{\mathrm{t}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot (-1) = -1$.

Es wird $a \times b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot (-1) - 1 \cdot 0 \\ 1 \cdot 1 - 0 \cdot (-1) \\ 0 \cdot 0 - 1 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Der Flächeninhalt des von a und b aufgespannten Parallelogramms beträgt

$$\|a \times b\| \; = \; ((-1)^2 + 1^2 + (-1)^2)^{1/2} \; = \; \sqrt{3}\,.$$

(2) Der Rauminhalt des von a, b und c aufgespannten Parallelepipeds beträgt

$$|a^{\mathrm{t}}\,(b \times c)| \; = \; |\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}^{\mathrm{t}} (\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix})| \; = \; |\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}^{\mathrm{t}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}| \; = \; 1\,.$$

Das aufgespannte Parallelepiped von a, b und c ist ein Würfel mit Kantenlänge 1, der auch das Volumen 1 haben sollte.

Aufgabe 74

(1) Es wird $a^{\mathrm{t}}\, b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}^{\mathrm{t}} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = 1 \cdot 3 + 2 \cdot (-1) + 5 \cdot 2 = 11$.

Es wird $a \times b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 2 - 5 \cdot (-1) \\ 5 \cdot 3 - 1 \cdot 2 \\ 1 \cdot (-1) - 2 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 13 \\ -7 \end{pmatrix}$.

Der Flächeninhalt des von a und b aufgespannten Parallelogramms beträgt

$$\|a \times b\| \; = \; (9^2 + 13^2 + (-7)^2)^{1/2} \; = \; \sqrt{299}\,.$$

(2) Der Rauminhalt des von a, b und c aufgespannten Parallelepipeds beträgt

$$|a^{\mathrm{t}}\,(b \times c)| \;=\; |\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}^{\mathrm{t}}(\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}-3\\-1\\2\end{pmatrix})| \;=\; |\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}^{\mathrm{t}}\begin{pmatrix}1\\-7\\-2\end{pmatrix}| \;=\; 8\,.$$

Aufgabe 75

(1) Es ist

$$a \times b \;=\; \begin{pmatrix}\alpha_2\beta_3-\alpha_3\beta_2\\ \alpha_3\beta_1-\alpha_1\beta_3\\ \alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1\end{pmatrix} \;=\; -\begin{pmatrix}\beta_2\alpha_3-\beta_3\alpha_2\\ \beta_3\alpha_1-\beta_1\alpha_3\\ \beta_1\alpha_2-\beta_2\alpha_1\end{pmatrix} \;=\; -(b \times a)\,.$$

Folglich ist $a \times a = -(a \times a)$, und also $a \times a = 0$.

Letzteres sieht man auch direkt aus der Definition.

(2) Es ist

$$a^{\mathrm{t}}(a\times b) \;=\; (\alpha_1\;\alpha_2\;\alpha_3)\begin{pmatrix}\alpha_2\beta_3-\alpha_3\beta_2\\ \alpha_3\beta_1-\alpha_1\beta_3\\ \alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1\end{pmatrix} \;=\; \alpha_1(\alpha_2\beta_3-\alpha_3\beta_2)+\alpha_2(\alpha_3\beta_1-\alpha_1\beta_3)+\alpha_3(\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1) \;=\; 0\,.$$

Es ist

$$b^{\mathrm{t}}(a\times b) \;=\; (\beta_1\;\beta_2\;\beta_3)\begin{pmatrix}\alpha_2\beta_3-\alpha_3\beta_2\\ \alpha_3\beta_1-\alpha_1\beta_3\\ \alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1\end{pmatrix} \;=\; \beta_1(\alpha_2\beta_3-\alpha_3\beta_2)+\beta_2(\alpha_3\beta_1-\alpha_1\beta_3)+\beta_3(\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1) \;=\; 0\,.$$

(3) Es ist

$$\begin{aligned}
& a \times (b \times c) + b \times (c \times a) + c \times (a \times b)\\
= \;& \begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}\beta_2\gamma_3-\beta_3\gamma_2\\ \beta_3\gamma_1-\beta_1\gamma_3\\ \beta_1\gamma_2-\beta_2\gamma_1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \beta_3\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}\gamma_2\alpha_3-\gamma_3\alpha_2\\ \gamma_3\alpha_1-\gamma_1\alpha_3\\ \gamma_1\alpha_2-\gamma_2\alpha_1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\gamma_1\\ \gamma_2\\ \gamma_3\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}\alpha_2\beta_3-\alpha_3\beta_2\\ \alpha_3\beta_1-\alpha_1\beta_3\\ \alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1\end{pmatrix}\\
= \;& \begin{pmatrix}\alpha_2\beta_1\gamma_2-\alpha_2\beta_2\gamma_1-\alpha_3\beta_3\gamma_1+\alpha_3\beta_1\gamma_3\\ \alpha_3\beta_2\gamma_3-\alpha_3\beta_3\gamma_2-\alpha_1\beta_1\gamma_2+\alpha_1\beta_2\gamma_1\\ \alpha_1\beta_3\gamma_1-\alpha_1\beta_1\gamma_3-\alpha_2\beta_2\gamma_3+\alpha_2\beta_3\gamma_2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\beta_2\gamma_1\alpha_2-\beta_2\gamma_2\alpha_1-\beta_3\gamma_3\alpha_1+\beta_3\gamma_1\alpha_3\\ \beta_3\gamma_2\alpha_3-\beta_3\gamma_3\alpha_2-\beta_1\gamma_1\alpha_2+\beta_1\gamma_2\alpha_1\\ \beta_1\gamma_3\alpha_1-\beta_1\gamma_1\alpha_3-\beta_2\gamma_2\alpha_3+\beta_2\gamma_3\alpha_2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\gamma_2\alpha_1\beta_2-\gamma_2\alpha_2\beta_1-\gamma_3\alpha_3\beta_1+\gamma_3\alpha_1\beta_3\\ \gamma_3\alpha_2\beta_3-\gamma_3\alpha_3\beta_2-\gamma_1\alpha_1\beta_2+\gamma_1\alpha_2\beta_1\\ \gamma_1\alpha_3\beta_1-\gamma_1\alpha_1\beta_3-\gamma_2\alpha_2\beta_3+\gamma_2\alpha_3\beta_2\end{pmatrix}\\
= \;& \begin{pmatrix}\alpha_2\beta_1\gamma_2-\alpha_2\beta_2\gamma_1-\alpha_3\beta_3\gamma_1+\alpha_3\beta_1\gamma_3\\ \alpha_3\beta_2\gamma_3-\alpha_3\beta_3\gamma_2-\alpha_1\beta_1\gamma_2+\alpha_1\beta_2\gamma_1\\ \alpha_1\beta_3\gamma_1-\alpha_1\beta_1\gamma_3-\alpha_2\beta_2\gamma_3+\alpha_2\beta_3\gamma_2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\alpha_2\beta_2\gamma_1-\alpha_1\beta_2\gamma_2-\alpha_1\beta_3\gamma_3+\alpha_3\beta_3\gamma_1\\ \alpha_3\beta_3\gamma_2-\alpha_2\beta_3\gamma_3-\alpha_2\beta_1\gamma_1+\alpha_1\beta_1\gamma_2\\ \alpha_1\beta_1\gamma_3-\alpha_3\beta_1\gamma_1-\alpha_3\beta_2\gamma_2+\alpha_2\beta_2\gamma_3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\alpha_1\beta_2\gamma_2-\alpha_2\beta_1\gamma_2-\alpha_3\beta_1\gamma_3+\alpha_1\beta_3\gamma_3\\ \alpha_2\beta_3\gamma_3-\alpha_3\beta_2\gamma_3-\alpha_1\beta_2\gamma_1+\alpha_2\beta_1\gamma_1\\ \alpha_3\beta_1\gamma_1-\alpha_1\beta_3\gamma_1-\alpha_2\beta_3\gamma_2+\alpha_3\beta_2\gamma_2\end{pmatrix}\\
= \;& \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\,.
\end{aligned}$$

(4) Es ist

$$a^{\mathrm{t}}(b \times c) \;=\; (\alpha_1\;\alpha_2\;\alpha_3)\begin{pmatrix}\beta_2\gamma_3-\beta_3\gamma_2\\ \beta_3\gamma_1-\beta_1\gamma_3\\ \beta_1\gamma_2-\beta_2\gamma_1\end{pmatrix} \;=\; \alpha_1\beta_2\gamma_3 - \alpha_1\beta_3\gamma_2 + \alpha_2\beta_3\gamma_1 - \alpha_2\beta_1\gamma_3 + \alpha_3\beta_1\gamma_2 - \alpha_3\beta_2\gamma_1\,.$$

Also ist

$$\begin{aligned}
b^{\mathrm{t}}(a \times c) \;&=\; (\beta_1\;\beta_2\;\beta_3)\begin{pmatrix}\alpha_2\gamma_3-\alpha_3\gamma_2\\ \alpha_3\gamma_1-\alpha_1\gamma_3\\ \alpha_1\gamma_2-\alpha_2\gamma_1\end{pmatrix}\\
&=\; \beta_1\alpha_2\gamma_3 - \beta_1\alpha_3\gamma_2 + \beta_2\alpha_3\gamma_1 - \beta_2\alpha_1\gamma_3 + \beta_3\alpha_1\gamma_2 - \beta_3\alpha_2\gamma_1\\
&=\; \alpha_2\beta_1\gamma_3 - \alpha_3\beta_1\gamma_2 + \alpha_3\beta_2\gamma_1 - \alpha_1\beta_2\gamma_3 + \alpha_1\beta_3\gamma_2 - \alpha_2\beta_3\gamma_1\\
&=\; -a^{\mathrm{t}}(b \times c)\,.
\end{aligned}$$

Folglich ist $a^{\mathrm{t}}\,(a \times b) = -a^{\mathrm{t}}\,(b \times a) = b^{\mathrm{t}}\,(a \times a) = b^t\,0_{3\times 1} = 0$. Somit ist erneut verifiziert, daß a senkrecht auf $a \times b$ steht; vgl. (2).

Aufgabe 76

Es ist $E = \{\,\alpha\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\ :\ \alpha,\,\beta\,\in\,\mathbf{R}\,\}$.

Es ist $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$.

Also ist $g = \{\,\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\ :\ \gamma \in \mathbf{R}\,\}$.

Um $g \cap E$ zu bestimmen, haben wir also das Gleichungssystem

$$\alpha\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$$

zu lösen.

Wie solche linearen Gleichungssysteme systematisch gelöst werden, wird in §5.3 behandelt werden.

Wir lesen aus dem ersten Eintrag ab, daß $\alpha = 0$, aus dem dritten, daß $\gamma = -\beta$ und aus dem zweiten, daß $\beta = 1 + \gamma = 1 - \beta$. Also ist $\beta = 1/2$ und $\gamma = -1/2$.

Somit ist $g \cap E = \{\begin{pmatrix}0\\1/2\\-1/2\end{pmatrix}\}$.

Aufgabe 77

Es ist $E = \{\,\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} + \alpha\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\ :\ \alpha,\,\beta\,\in\,\mathbf{R}\,\}$.

Es ist $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$.

Also ist $g = \{\,\begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\ :\ \gamma \in \mathbf{R}\,\}$.

Um $g \cap E$ zu bestimmen, haben wir also das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} + \alpha\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$$

zu lösen.

Wie solche linearen Gleichungssysteme systematisch gelöst werden, wird in §5.3 behandelt werden.

Dem zweiten Eintrag entnehmen wir $\beta = -1$.

Dem dritten Eintrag entnehmen wir sodann $\alpha - 1 = \gamma$.

Dem ersten Eintrag entnehmen wir sodann $\alpha + 1 = 3 - \gamma = 4 - \alpha$. Also ist $\alpha = 3/2$. Es folgt $\gamma = 1/2$.

Somit ist $g \cap E = \{\begin{pmatrix}5/2\\0\\1/2\end{pmatrix}\}$.

Der Abstand von P und E ist

$$\|\begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}5/2\\0\\1/2\end{pmatrix}\| \;=\; ((1/2)^2 + 0^2 + (-1/2)^2)^{1/2} \;=\; \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\,.$$

Spiegeln wir P an E, so erhalten wir den Punkt

$$\begin{pmatrix}5/2\\0\\1/2\end{pmatrix} - (\begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}5/2\\0\\1/2\end{pmatrix}) \;=\; \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}\ .$$

Aufgabe 78

(1) Wir formen um.

$$(A|b) \;=\; \left(\begin{array}{ccc|c} 0&1&1&1\\ 2&1&1&0\\ 2&2&2&0 \end{array}\right) \;\rightsquigarrow\; \left(\begin{array}{ccc|c} 1&1&1&0\\ 0&1&1&1\\ 0&-1&-1&0 \end{array}\right) \;\rightsquigarrow\; \left(\begin{array}{ccc|c} 1&0&0&-1\\ 0&1&1&1\\ 0&0&0&1 \end{array}\right) \;=\; (\tilde{A}|\tilde{b})$$

Die dritte Zeile ist nicht lösbar. Also ist $\{\, x \in \mathbf{R}^{3\times 1} \;:\; Ax = b \,\} = \emptyset$.

(2) Wie in (1), nur daß sich $\tilde{b} = \begin{pmatrix} 0\\0\\0 \end{pmatrix}$ ergibt. Es ist $\ell_1 = 1$ und $\ell_2 = 2$. Es ist $\ell'_1 = 3$.

Wir erhalten $x_0 = \begin{pmatrix} 0\\0\\0 \end{pmatrix}$, $x_1 = \begin{pmatrix} 0\\-1\\\boxed{1} \end{pmatrix}$ und also

$$\{\, x \in \mathbf{R}^{3\times 1} \;:\; Ax = b \,\} \;=\; \{\, \lambda_1 \begin{pmatrix} 0\\-1\\1 \end{pmatrix} \;:\; \lambda_1 \in \mathbf{R} \,\}\,.$$

(3) Wir formen um.

$$(A|b) \;=\; \left(\begin{array}{cccc|c} 1&1&1&1&2\\ 1&1&0&1&1 \end{array}\right) \;\rightsquigarrow\; \left(\begin{array}{cccc|c} 1&1&1&1&2\\ 0&0&-1&0&-1 \end{array}\right) \;\rightsquigarrow\; \left(\begin{array}{cccc|c} 1&1&0&1&1\\ 0&0&1&0&1 \end{array}\right)\,.$$

Es ist $\ell_1 = 1$ und $\ell_2 = 3$. Es ist $\ell'_1 = 2$ und $\ell'_2 = 4$.

Es wird $x_0 = \begin{pmatrix} 1\\\boxed{0}\\1\\\boxed{0} \end{pmatrix}$.

Es wird $x_1 = \begin{pmatrix} -1\\\boxed{1}\\0\\\boxed{0} \end{pmatrix}$ und $x_2 = \begin{pmatrix} -1\\\boxed{0}\\0\\\boxed{1} \end{pmatrix}$.

Insgesamt wird

$$\{\, x \in \mathbf{R}^{4\times 1} \;:\; Ax = b \,\} \;=\; \{\, \begin{pmatrix} 1\\0\\1\\0 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} -1\\1\\0\\0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -1\\0\\0\\1 \end{pmatrix} \;:\; \lambda_1\,,\, \lambda_2 \,\in\, \mathbf{R} \,\}\,.$$

(4) Von der zugehörige Matrix $(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 0&1&1&1 \end{array}\right)$ ist A bereits in Zeilenstufenform.
Der Algorithmus fordert einen auf, die zweite Spalte zu säubern – nur ist da nichts zu tun.
Somit wird $\ell_1 = 2$, mithin $\ell'_1 = 1$ und $\ell'_2 = 3$.

Wir erhalten $x_0 = \begin{pmatrix} \boxed{0}\\1\\\boxed{0} \end{pmatrix}$.

Ferner wird $x_1 = \begin{pmatrix} \boxed{1}\\0\\\boxed{0} \end{pmatrix}$ und $x_2 = \begin{pmatrix} \boxed{0}\\-1\\\boxed{1} \end{pmatrix}$.

Also ist $\{\, x \in \mathbf{R}^{3\times 1} \;:\; Ax = b \,\} = \{\, \begin{pmatrix} 0\\1\\0 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} 1\\0\\0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0\\-1\\1 \end{pmatrix} \;:\; \lambda_1\,,\, \lambda_2 \,\in\, \mathbf{R} \,\}$.

Aufgabe 79

(1) Wir formen um.

$$(A|b) \;=\; \left(\begin{array}{ccccc|c} 1&1&1&1&1&0\\ 1&1&1&0&2&1 \end{array}\right) \;\rightsquigarrow\; \left(\begin{array}{ccccc|c} 1&1&1&1&1&0\\ 0&0&0&-1&1&1 \end{array}\right) \;\rightsquigarrow\; \left(\begin{array}{ccccc|c} 1&1&1&0&2&1\\ 0&0&0&1&-1&-1 \end{array}\right)\,.$$

Es ist $\ell_1 = 1$ und $\ell_2 = 4$. Es ist $\ell'_1 = 2$, $\ell'_2 = 3$ und $\ell'_3 = 5$.

Wir erhalten $x_0 = \begin{pmatrix} 1\\\boxed{0}\\\boxed{0}\\-1\\\boxed{0} \end{pmatrix}$.

Wir erhalten $x_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ \boxed{1} \\ \boxed{0} \\ 0 \\ \boxed{0} \end{pmatrix}$, $x_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ \boxed{0} \\ \boxed{1} \\ 0 \\ \boxed{0} \end{pmatrix}$ und $x_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ \boxed{0} \\ \boxed{0} \\ 1 \\ \boxed{1} \end{pmatrix}$.

Insgesamt wird

$$\{ x \in \mathbf{R}^{5\times 1} \;:\; Ax = b \} \;=\; \{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \;:\; \lambda_1\,,\, \lambda_2\,,\, \lambda_3 \,\in\, \mathbf{R} \}$$

und

$$\{ x \in \mathbf{R}^{5\times 1} \;:\; Ax = 0 \} \;=\; \{ \lambda_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \;:\; \lambda_1\,,\, \lambda_2\,,\, \lambda_3 \,\in\, \mathbf{R} \}$$

(2) Wir formen um.

$$(A|b) \;=\; \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right) \;\rightsquigarrow\; \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \;\rightsquigarrow\; \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Die dritte Zeile ist nicht erfüllbar. Also ist

$$\{ x \in \mathbf{R}^{5\times 1} \;:\; Ax = b \} \;=\; \emptyset\,.$$

Lösen wir noch das zugehörige homogene lineare Gleichungssystem. Es ist $\ell_1 = 1$ und $\ell_2 = 2$. Also ist $\ell'_1 = 3$ und $\ell'_2 = 4$.

Wir erhalten $x_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ \boxed{1} \\ \boxed{0} \end{pmatrix}$ und $x_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ \boxed{0} \\ \boxed{1} \end{pmatrix}$.

Insgesamt wird

$$\{ x \in \mathbf{R}^{4\times 1} \;:\; Ax = 0 \} \;=\; \{ \lambda_1 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \;:\; \lambda_1\,,\, \lambda_2 \,\in\, \mathbf{R} \}\,.$$

(3) Wir formen um.

$$(A|b) \;=\; \left(\begin{array}{cccccc|c} 2 & 2 & 4 & 1 & 0 & -1 & 4 \\ 4 & 4 & 8 & 1 & 2 & 1 & 8 \\ 2 & 2 & 4 & 5 & -8 & 2 & -11 \\ 2 & 2 & 4 & 2 & -2 & -1 & 1 \end{array}\right) \;\rightsquigarrow\; \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & -1 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 6 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -6 & 3 & -12 \end{array}\right) \;\rightsquigarrow\; \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & -1/2 & 7/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & -3 \end{array}\right) \;\rightsquigarrow\; \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Es ist $\ell_1 = 1$, $\ell_2 = 4$ und $\ell_3 = 6$. Also ist $\ell'_1 = 2$, $\ell'_2 = 3$ und $\ell'_3 = 5$.

Wir erhalten $x_0 := \begin{pmatrix} 3 \\ \boxed{0} \\ \boxed{0} \\ -3 \\ \boxed{0} \\ -1 \end{pmatrix}$.

Wir erhalten $x_1 := \begin{pmatrix} -1 \\ \boxed{1} \\ \boxed{0} \\ 0 \\ \boxed{0} \\ 0 \end{pmatrix}$, $x_2 := \begin{pmatrix} -2 \\ \boxed{0} \\ \boxed{1} \\ 0 \\ \boxed{0} \\ 0 \end{pmatrix}$ und $x_3 := \begin{pmatrix} -1 \\ \boxed{0} \\ \boxed{0} \\ 2 \\ \boxed{1} \\ 0 \end{pmatrix}$.

Insgesamt wird

$$\{ x \in \mathbf{R}^{6\times 1} \;:\; Ax = b \} \;=\; \{ \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ -3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} 0 + \lambda_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \;:\; \lambda_1\,,\, \lambda_2\,,\, \lambda_3 \,\in\, \mathbf{R} \}$$

und

$$\{\, x \in \mathbf{R}^{6\times 1} \;:\; Ax = 0 \,\} \;=\; \{\, \lambda_1 \begin{pmatrix} -1\\ 1\\ 0\\ 0\\ 0 \end{pmatrix} 0 + \lambda_2 \begin{pmatrix} -2\\ 0\\ 1\\ 0\\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} -1\\ 0\\ 2\\ 1\\ 0 \end{pmatrix} \;:\; \lambda_1\,,\, \lambda_2\,,\, \lambda_3 \,\in\, \mathbf{R}\} \,.$$

(4) Von der zugehörigen Matrix $(A|b) = \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right)$ ist A bereits in Zeilenstufenform.
Der Algorithmus fordert einen auf, die zweite Spalte zu säubern – nur ist da nichts zu tun.
Somit wird $\ell_1 = 2$, mithin $\ell'_1 = 1$, $\ell'_2 = 3$ und $\ell'_3 = 4$.

Wir erhalten $x_0 = \begin{pmatrix} \boxed{0}\\ 3\\ \boxed{0}\\ \boxed{0} \end{pmatrix}$.

Ferner wird $x_1 = \begin{pmatrix} \boxed{1}\\ 0\\ \boxed{0}\\ \boxed{0} \end{pmatrix}$, $x_2 = \begin{pmatrix} \boxed{0}\\ -1\\ \boxed{1}\\ \boxed{0} \end{pmatrix}$ und $x_3 = \begin{pmatrix} \boxed{0}\\ 2\\ \boxed{0}\\ \boxed{1} \end{pmatrix}$.

Also ist $\{\, x \in \mathbf{R}^{4\times 1} \;:\; Ax = b \,\} = \{ \begin{pmatrix} 0\\ 3\\ 0\\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} 1\\ 0\\ 0\\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0\\ -1\\ 1\\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0\\ -2\\ 0\\ 1 \end{pmatrix} \;:\; \lambda_1\,,\, \lambda_2\,,\, \lambda_3 \,\in\, \mathbf{R}\,\}$.

Aufgabe 80

Setze

$$(A|b) := \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1 & -2 & -1 & 0\\ 2 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Wir haben $\{\, x := \begin{pmatrix} s\\ t\\ u\\ v\\ w \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^{5\times 1} \;:\; Ax = b\}$ zu bestimmen.

Wir formen um.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1 & -2 & -1 & 0\\ 2 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & -1 & 0 & -3 & -2 & -1\\ 0 & -1 & -3 & -2 & -1 & -2 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1 & -2 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 3 & 2 & 1\\ 0 & 0 & -3 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & -5/3 & -2/3 & -1/3\\ 0 & 1 & 0 & 3 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 1 & -1/3 & -1/3 & 1/3 \end{array}\right) .$$

Es ist $\ell_1 = 1$, $\ell_2 = 2$ und $\ell_3 = 3$. Also ist $\ell'_1 = 4$ und $\ell'_2 = 5$.

Wir erhalten $x_0 = \begin{pmatrix} -1/3\\ 1\\ 1/3\\ \boxed{0}\\ \boxed{0} \end{pmatrix}$.

Ferner wird $x_1 = \begin{pmatrix} 5/3\\ -3\\ 1/3\\ \boxed{1}\\ \boxed{0} \end{pmatrix}$ und $x_2 = \begin{pmatrix} 2/3\\ -2\\ 1/3\\ \boxed{0}\\ \boxed{1} \end{pmatrix}$.

Also ist $\{\, x = \begin{pmatrix} s\\ t\\ u\\ v\\ w \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^{5\times 1} \;:\; Ax = b \,\} = \{ \begin{pmatrix} -1/3\\ 1\\ 1/3\\ 0\\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} 5/3\\ -3\\ 1/3\\ 1\\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 2/3\\ -2\\ 1/3\\ 0\\ 1 \end{pmatrix} \;:\; \lambda_1\,,\, \lambda_2 \,\in\, \mathbf{R}\,\}$.

Durch Probieren sieht man, daß z.B. $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = 1$ die ganzzahlige Lösung

$$\begin{pmatrix} s\\ t\\ u\\ v\\ w \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} -1/3\\ 1\\ 1/3\\ 0\\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5/3\\ -3\\ 1/3\\ 1\\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2/3\\ -2\\ 1/3\\ 0\\ 1 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} 2\\ -4\\ 1\\ 1\\ 1 \end{pmatrix}$$

liefern.

Aufgabe 81

Wir formen um.

$$(A|\mathrm{E}_3) \;=\; \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0&1&1&1&0&0\\ 1&1&1&0&1&0\\ 1&1&0&0&0&1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1&1&0&0&0&1\\ 0&1&1&1&0&0\\ 0&0&1&0&1&-1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1&0&-1&-1&0&1\\ 0&1&1&1&0&0\\ 0&0&1&0&1&-1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1&0&0&-1&1&0\\ 0&1&0&1&-1&1\\ 0&0&1&0&1&-1 \end{array}\right).$$

Also ist $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1&1&0\\ 1&-1&1\\ 0&1&-1 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 82

(1) Wir formen um.

$$(A|\mathrm{E}_3) \;=\; \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0&1&1&1&0&0\\ 1&2&1&0&1&0\\ 1&1&0&0&0&1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1&1&0&0&0&1\\ 0&1&1&1&0&0\\ 0&1&1&0&1&-1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1&0&-1&-1&0&1\\ 0&1&1&1&0&0\\ 0&0&0&-1&1&-1 \end{array}\right).$$

Die Zeilenstufenform von A ist nicht E_3. Also hat A keine Inverse.

(2) Wir formen um.

$$(A|\mathrm{E}_3) \;=\; \left(\begin{array}{cccc|cccc} 0&0&1&1&1&0&0&0\\ 0&1&1&1&0&1&0&0\\ 1&1&1&0&0&0&1&0\\ 1&1&0&0&0&0&0&1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1&1&0&0&0&0&0&1\\ 0&0&1&1&1&0&0&0\\ 0&1&1&1&0&1&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&1&-1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1&0&-1&-1&0&-1&0&1\\ 0&1&1&1&0&1&0&0\\ 0&0&1&1&1&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&1&-1 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1&0&0&0&1&-1&0&1\\ 0&1&0&0&-1&1&0&0\\ 0&0&1&1&1&0&0&0\\ 0&0&0&-1&-1&0&1&-1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1&0&0&0&1&-1&0&1\\ 0&1&0&0&-1&1&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&1&-1\\ 0&0&0&1&1&0&-1&1 \end{array}\right).$$

Somit ist $A^{-1} := \begin{pmatrix} 1&-1&0&1\\ -1&1&0&0\\ 0&0&1&-1\\ 1&0&-1&1 \end{pmatrix}$.

(3) Es wird in der Tat

$$\begin{pmatrix} \alpha&\beta\\ \gamma&\delta \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\alpha\delta-\beta\gamma} \begin{pmatrix} \delta&-\beta\\ -\gamma&\alpha \end{pmatrix} \;=\; \frac{1}{\alpha\delta-\beta\gamma} \begin{pmatrix} \alpha\delta-\beta\gamma & -\alpha\beta+\beta\alpha\\ \gamma\delta-\delta\gamma & -\gamma\beta+\delta\alpha \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} 1&0\\ 0&1 \end{pmatrix} \;=\; \mathrm{E}_2\,.$$

Aufgabe 83

(1) Wir formen die durch Nebeneinanderstellen der gegebenen Vektoren entstehende Matrix um.

$$\begin{pmatrix} 1&1&1\\ 1&1&1\\ 1&1&1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1&1&1\\ 0&0&0\\ 0&0&0 \end{pmatrix}.$$

Die erreichte Zeilenstufenform enthält zwei Nullzeilen. Also ist $(x_1\,, x_2\,, x_3)$ nicht erzeugend.

Die erreichte Zeilenstufenform enthält weniger Nichtnullzeilen als Spalten. Also ist $(x_1\,, x_2\,, x_3)$ nicht linear unabhängig.

Insgesamt ist $(x_1\,, x_2\,, x_3)$ keine Basis von $\mathbf{R}^{3\times 1}$.

(2) Wir formen die durch Nebeneinanderstellen der gegebenen Vektoren entstehende Matrix um.

$$\begin{pmatrix} 1&1&0\\ 1&0&1\\ 0&1&1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1&1&0\\ 0&-1&1\\ 0&1&1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1&0&1\\ 0&1&-1\\ 0&0&2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1&0&0\\ 0&1&0\\ 0&0&1 \end{pmatrix}$$

Die erreichte Zeilenstufenform enthält keine Nullzeile. Also ist $(x_1\,, x_2\,, x_3)$ erzeugend.

Die erreichte Zeilenstufenform enthält genausoviele Nichtnullzeilen wie Spalten. Also ist $(x_1\,, x_2\,, x_3)$ linear unabhängig.

Insgesamt ist $(x_1\,, x_2\,, x_3)$ eine Basis von $\mathbf{R}^{3\times 1}$.

Aufgabe 84

(1) Wir formen die durch Nebeneinanderstellen der gegebenen Vektoren entstehende Matrix um.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1 \\ 0 & -1/2 & -2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Die erreichte Zeilenstufenform enthält keine Nullzeile. Also ist $(x_1\,,\,x_2\,,\,x_3)$ erzeugend.

Die erreichte Zeilenstufenform enthält weniger Nichtnullzeilen als Spalten. Also ist $(x_1\,,\,x_2\,,\,x_3)$ nicht linear unabhängig.

Insgesamt ist $(x_1\,,\,x_2\,,\,x_3)$ keine Basis von $\mathbf{R}^{2\times 1}$. Das hätte man von vorneherein bemerken können, da aus $\dim(\mathbf{R}^{2\times 1}) = 2$ folgt, daß jede Basis von $\mathbf{R}^{2\times 1}$ aus 2 Vektoren besteht.

(2) Wir formen die durch Nebeneinanderstellen der gegebenen Vektoren entstehende Matrix um.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die erreichte Zeilenstufenform enthält eine Nullzeile. Also ist $(x_1\,,\,x_2\,,\,x_3)$ nicht erzeugend.

Die erreichte Zeilenstufenform enthält weniger Nichtnullzeilen als Spalten. Also ist $(x_1\,,\,x_2\,,\,x_3)$ nicht linear unabhängig.

Insgesamt ist $(x_1\,,\,x_2\,,\,x_3)$ keine Basis von $\mathbf{R}^{3\times 1}$.

(3) Wir formen die durch Nebeneinanderstellen der gegebenen Vektoren entstehende Matrix um.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Die erreichte Zeilenstufenform ist E_3. Also ist $(x_1\,,\,x_2\,,\,x_3)$ eine Basis von $\mathbf{R}^{3\times 1}$.

(4) Wir formen die durch Nebeneinanderstellen der gegebenen Vektoren entstehende Matrix um.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Die erreichte Zeilenstufenform enthält eine Nullzeile. Also ist $(x_1\,,\,x_2\,,\,x_3)$ nicht erzeugend.

Die erreichte Zeilenstufenform enthält genausoviele Nichtnullzeilen wie Spalten. Also ist $(x_1\,,\,x_2\,,\,x_3)$ linear unabhängig.

Insgesamt ist $(x_1\,,\,x_2\,,\,x_3)$ keine Basis von $\mathbf{R}^{3\times 1}$. Das hätte man von vorneherein bemerken können, da aus $\dim(\mathbf{R}^{4\times 1}) = 4$ folgt, daß jede Basis von $\mathbf{R}^{4\times 1}$ aus 4 Vektoren besteht.

Aufgabe 85

(1) Wir formen um.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Da nun genausoviele Nichtnullzeilen wie Spalten vorliegen, ist das gegebene Tupel für T linear unabhängig.

Wir formen um.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Da nun genausoviele Nichtnullzeilen wie Spalten vorliegen, ist das gegebene Tupel für T linear unabhängig.

(2) Wir formen um.

$$A \;:=\; \begin{pmatrix} 1&0&0&1\\ 1&1&1&1\\ 0&1&2&1 \end{pmatrix} \;\rightsquigarrow\; \begin{pmatrix} 1&0&0&1\\ 0&1&1&0\\ 0&1&2&1 \end{pmatrix} \;\rightsquigarrow\; \begin{pmatrix} 1&0&0&1\\ 0&1&1&0\\ 0&0&1&1 \end{pmatrix} \;\rightsquigarrow\; \begin{pmatrix} 1&0&0&1\\ 0&1&0&-1\\ 0&0&1&1 \end{pmatrix}$$

Es ist $\ell_1 = 1$, $\ell_2 = 2$ und $\ell_3 = 3$. Also ist eine Basis von $T + U$ gegeben durch $\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}\right)$.

Eine Basis von $\{\, x \in \mathbf{R}^{4\times 1} \;:\; Ax = 0 \,\}$ ist gegeben durch $\left(\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\\\boxed{1}\end{pmatrix}\right)$. Also ist

$$\left((-1)\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + 1\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right) \;=\; \left(\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right)$$

eine (einelementige) Basis von $T \cap U$.

Aufgabe 86

(1) Wir formen um.

$$\begin{pmatrix} 0&1&0\\ 1&1&0\\ 1&1&1\\ 0&1&1\\ 0&1&0 \end{pmatrix} \;\rightsquigarrow\; \begin{pmatrix} 1&1&0\\ 0&1&0\\ 0&0&1\\ 0&1&1\\ 0&1&0 \end{pmatrix} \;\rightsquigarrow\; \begin{pmatrix} 1&0&0\\ 0&1&0\\ 0&0&1\\ 0&0&1\\ 0&0&0 \end{pmatrix} \;\rightsquigarrow\; \begin{pmatrix} 1&0&0\\ 0&1&0\\ 0&0&1\\ 0&0&0\\ 0&0&0 \end{pmatrix}$$

Da nun genausoviele Nichtnullzeilen wie Spalten vorliegen, ist das gegebene Tupel für T linear unabhängig.

Wir formen um.

$$\begin{pmatrix} 1&1&2\\ 2&1&3\\ 4&1&3\\ 3&-1&0\\ 1&1&2 \end{pmatrix} \;\rightsquigarrow\; \begin{pmatrix} 1&1&2\\ 0&-1&-1\\ 0&-3&-5\\ 0&-4&-6\\ 0&0&0 \end{pmatrix} \;\rightsquigarrow\; \begin{pmatrix} 1&0&1\\ 0&1&1\\ 0&0&-2\\ 0&0&-2\\ 0&0&0 \end{pmatrix} \;\rightsquigarrow\; \begin{pmatrix} 1&0&0\\ 0&1&0\\ 0&0&1\\ 0&0&0\\ 0&0&0 \end{pmatrix}$$

Da nun genausoviele Nichtnullzeilen wie Spalten vorliegen, ist das gegebene Tupel für U linear unabhängig.

(2) Wir formen um.

$$A \;:=\; \begin{pmatrix} 0&1&0&1&1&2\\ 1&1&0&2&1&3\\ 1&1&1&4&1&3\\ 0&1&1&3&-1&0\\ 0&1&0&1&1&2 \end{pmatrix} \;\rightsquigarrow\; \begin{pmatrix} 1&1&0&2&1&3\\ 0&1&0&1&1&2\\ 0&0&1&2&0&0\\ 0&1&1&3&-1&0\\ 0&1&0&1&1&2 \end{pmatrix} \;\rightsquigarrow\; \begin{pmatrix} 1&0&0&1&0&1\\ 0&1&0&1&1&2\\ 0&0&1&2&0&0\\ 0&0&1&2&-2&-2\\ 0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix} \;\rightsquigarrow\; \begin{pmatrix} 1&0&0&1&0&1\\ 0&1&0&1&1&2\\ 0&0&1&2&0&0\\ 0&0&0&0&-2&-2\\ 0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix} \;\rightsquigarrow\; \begin{pmatrix} 1&0&0&1&0&1\\ 0&1&0&1&0&1\\ 0&0&1&2&0&0\\ 0&0&0&0&1&1\\ 0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix}$$

Es ist $\ell_1 = 1$, $\ell_2 = 2$ und $\ell_3 = 3$ und $\ell_4 = 5$. Also ist eine Basis von $T + U$ gegeben durch

$$\left(\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\\-1\\1\end{pmatrix}\right).$$

Eine Basis von $\{\, x \in \mathbf{R}^{6\times 1} \;:\; Ax = 0 \,\}$ ist gegeben durch

$$\left(\begin{pmatrix}-1\\-1\\-2\\\boxed{1}\\0\\\boxed{0}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\-1\\0\\\boxed{0}\\-1\\\boxed{1}\end{pmatrix}\right).$$

Also ist

$$\left((-1)\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\\0\end{pmatrix} + (-1)\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\1\end{pmatrix} + (-2)\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\\0\end{pmatrix},\; (-1)\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\\0\end{pmatrix} + (-1)\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\1\end{pmatrix} + 0\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\\0\end{pmatrix}\right) \;=\; \left(\begin{pmatrix}-1\\-2\\-4\\-3\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\-2\\-2\\-1\\-1\end{pmatrix}\right)$$

eine Basis von $T \cap U$.

(3) Es ist $\dim(T) + \dim(U) = 3 + 3 = 6$. Es ist $\dim(T + U) + \dim(T \cap U) = 4 + 2 = 6$. Also stimmen beide Seiten der fraglichen Gleichung in der Tat überein.

Aufgabe 87

(1) Die Aussage ist falsch. Sei z.B. $V = \mathbf{R}^{2\times 1}$.

Sei $T := \langle \binom{1}{1} \rangle$. Sei $U := \langle \binom{1}{0} \rangle$. Sei $W := \langle \binom{0}{1} \rangle$.

Dann ist $U + W = \langle \binom{1}{0}, \binom{0}{1} \rangle = \mathbf{R}^{2\times 1}$. Also ist $T \cap (U + W) = T$.

Auf der anderen Seite ist $T \cap U = \{\binom{0}{0}\}$ und $T \cap W = \{\binom{0}{0}\}$. Also ist $(T \cap U) + (T \cap W) = \{\binom{0}{0}\}$.

Die beiden Seiten der fraglichen Gleichung stimmen also in diesem Beispiel nicht überein.

(2) Die Aussage ist richtig. Denn mit der Dimensionsformel für Unterräume aus §5.4.3 wird zum einen

$$\begin{array}{rcl} \dim(T+U+W) & = & \dim(T+U) + \dim(W) - \dim((T+U)\cap W) \\ & = & \dim(T) + \dim(U) - \dim(T\cap U) + \dim(W) - \dim((T+U)\cap W)\ , \end{array}$$

zum anderen aber auch, nach Vertauschen von U und W,

$$\begin{array}{rcl} \dim(T+W+U) & = & \dim(T+W) + \dim(U) - \dim((T+W)\cap U) \\ & = & \dim(T) + \dim(W) - \dim(T\cap W) + \dim(U) - \dim((T+W)\cap U)\ . \end{array}$$

Bilden wir die Differenz, so erhalten wir

$$0 \;=\; \big(\dim(T\cap W) - \dim(T\cap U)\big) - \big(\dim((T+U)\cap W) - \dim((T+W)\cap U)\big)\ ,$$

wie behauptet.

(3) Die Aussage ist richtig. Für $1 \leqslant i \leqslant m$ und $1 \leqslant j \leqslant n$ sei $\mathrm{e}_{i,j} \in \mathbf{R}^{m\times n}$ die Matrix, die an Position (i,j) den Eintrag 1 und an allen anderen Positionen den Eintrag 0 hat.

Es genügt zu zeigen, daß das $(m \cdot n)$-Tupel $(\, \mathrm{e}_{i,j} \,:\, 1 \leqslant i \leqslant m,\ 1 \leqslant j \leqslant n \,)$ eine Basis von $\mathbf{R}^{m\times n}$ ist.

Erzeugend. Sei $A = (\alpha_{i,j})_{i,j} \in \mathbf{R}^{m\times n}$ gegeben. Es ist

$$(\alpha_{i,j})_{i,j} \;=\; \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \alpha_{i,j}\, \mathrm{e}_{i,j} \;\in\; \langle\, \mathrm{e}_{i,j} \,:\, 1 \leqslant i \leqslant m,\ 1 \leqslant j \leqslant n \,\rangle\ .$$

Linear unabhängig. Seien $\lambda_{i,j} \in \mathbf{R}$ für $1 \leqslant i \leqslant m$ und $1 \leqslant j \leqslant n$ so gegeben, daß $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \lambda_{i,j}\, \mathrm{e}_{i,j} = 0$. Wir haben zu zeigen, daß $\lambda_{i,j} \overset{!}{=} 0$ stets. In der Tat ist

$$0 \;=\; \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \lambda_{i,j}\, \mathrm{e}_{i,j} \;=\; (\lambda_{i,j})_{i,j}\ ,$$

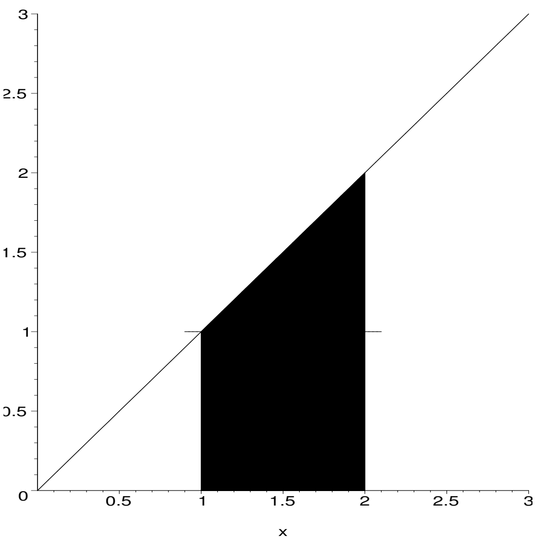
und da eine Matrix genau dann null ist, wenn alle ihre Einträge null sind, können wir auf $\lambda_{i,j} = 0$ für $1 \leqslant i \leqslant m$ und $1 \leqslant j \leqslant n$ schließen.

Aufgabe 88

Es ist $F(x) := \frac{1}{2}\, x^2$ eine Stammfunktion von $f(x) := x$. Nach Hauptsatz wird also

$$\int_1^2 x \,\mathrm{d}x \;=\; [\frac{1}{2}\, x^2]_{x=1}^2 \;=\; \frac{1}{2}\, 2^2 - \frac{1}{2}\, 1^2 \;=\; 1{,}5\ .$$

Skizze.



Der Skizze ist zu entnehmen, daß unser Integral den Inhalt einer Fläche berechnet, die sich aus einem Quadrat der Seitenlänge 1 und einem Dreieck mit Grundseite 1 und Höhe 1 zusammensetzt. Dieser Flächeninhalt beträgt also $1^2 + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = 1{,}5$.

Durch beide Rechnungen sind wir zum selben Ergebnis gelangt.

Aufgabe 89

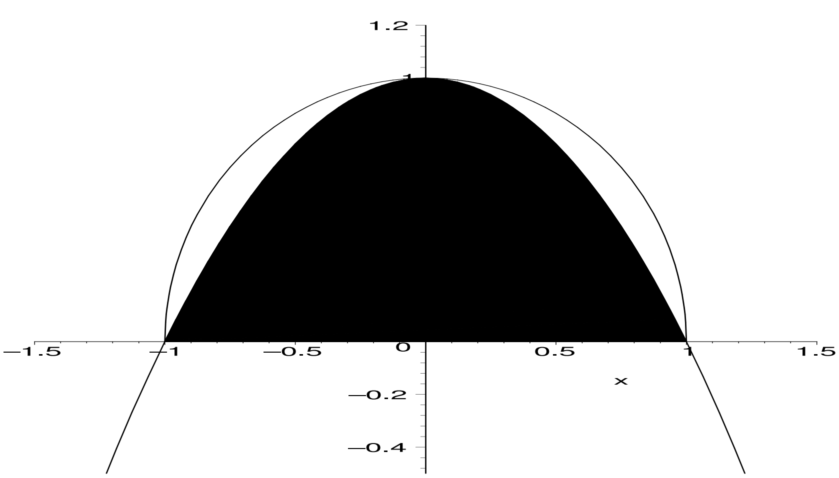
Es ist $f(x) \geqslant 0$ genau dann, wenn $x \in [-1, +1]$.

Es ist $F(x) := x - \frac{1}{3}\,x^3$ eine Stammfunktion von $f(x) = 1 - x^2$. Der Flächeninhalt zwischen der Parabel $f(x) = 1 - x^2$ und der x-Achse beträgt also

$$\int_{-1}^{+1} (1 - x^2)\,\mathrm{d}x \;=\; \big[x - \frac{1}{3}\,x^3\big]_{x=-1}^{+1} \;=\; (1 - \frac{1}{3}\,1^3) - (-1 - \frac{1}{3}\,(-1)^3) \;=\; \frac{4}{3} \;=\; 1{,}\overline{3}\,.$$

Aus der Geometrie ist bekannt, daß der Flächeninhalt eines Halbkreises von Radius 1 gleich $\frac{\pi}{2} \approx 1{,}5708$ beträgt.

Somit ist die Halbkreisfläche größer. Dies wird auch durch folgende Skizze bestätigt.

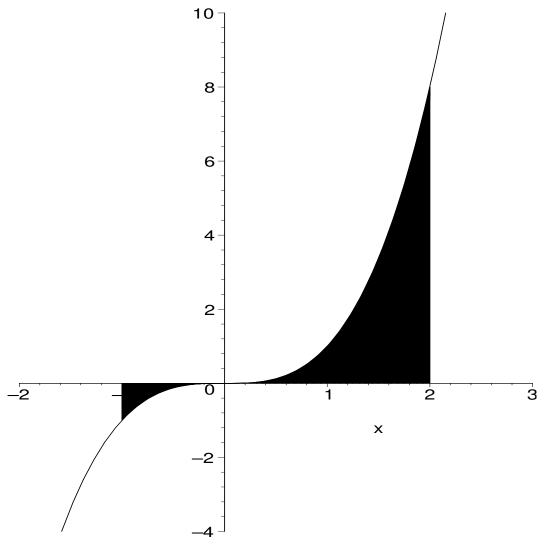


Beachte auch noch, daß die Halbkreislinie der Graph von $g(x) = \sqrt{1-x^2}$ ist und daß dieser für $x \in [-1, +1]$ oberhalb des Graphen von $f(x) = 1 - x^2$ verläuft, da $t \geqslant t^2$ für $t \in [0, 1]$.

Aufgabe 90

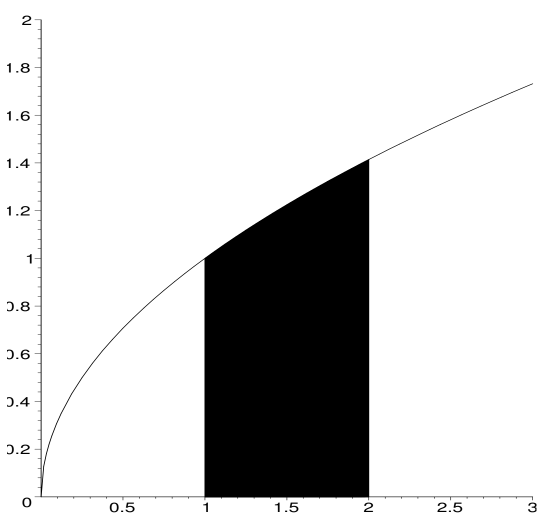
(1) Eine Stammfunktion von $f(x) = x^3$ ist gegeben durch $F(x) = \frac{1}{4}\,x^4$. Also wird

$$\int_{-1}^{2} x^3 \,\mathrm{d}x \;=\; \big[\frac{1}{4}\,x^4\big]_{x=-1}^{2} \;=\; \frac{1}{4}\,2^4 - \frac{1}{4}(-1)^4 \;=\; \frac{15}{4} \;=\; 3{,}75\;.$$



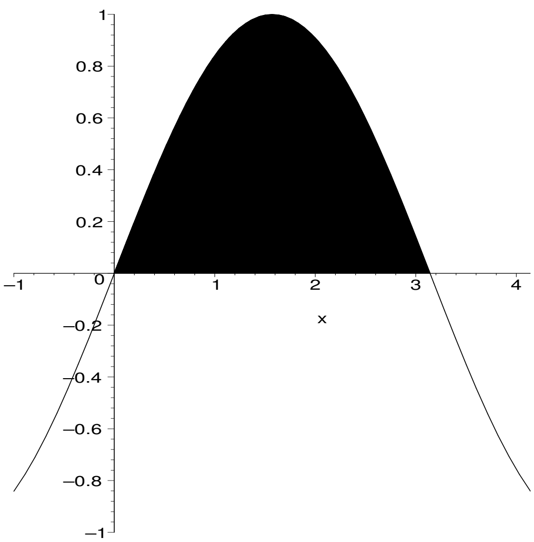
(2) Eine Stammfunktion von $f(x) = x^{1/2}$ ist gegeben durch $F(x) = \frac{2}{3}\,x^{3/2}$. Also wird

$$\int_{1}^{2} \sqrt{x}\,\mathrm{d}x \;=\; \big[\frac{2}{3}\,x^{3/2}\big]_{x=1}^{2} \;=\; \frac{2}{3}\,2^{3/2} - \frac{2}{3}\,1^{3/2} \;\approx\; 1{,}2190\;.$$



(3) Eine Stammfunktion von $f(x) = \sin(x)$ ist gegeben durch $F(x) = -\cos(x)$. Also wird

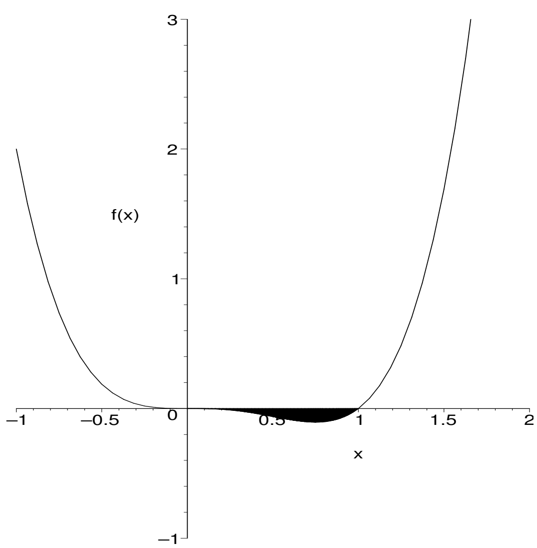
$$\int_{0}^{\pi} \sin(x)\,\mathrm{d}x \;=\; \big[-\cos(x)\big]_{x=0}^{\pi} \;=\; -\cos(\pi) + \cos(0) \;=\; -(-1) + 1 \;=\; 2\;.$$



Aufgabe 91

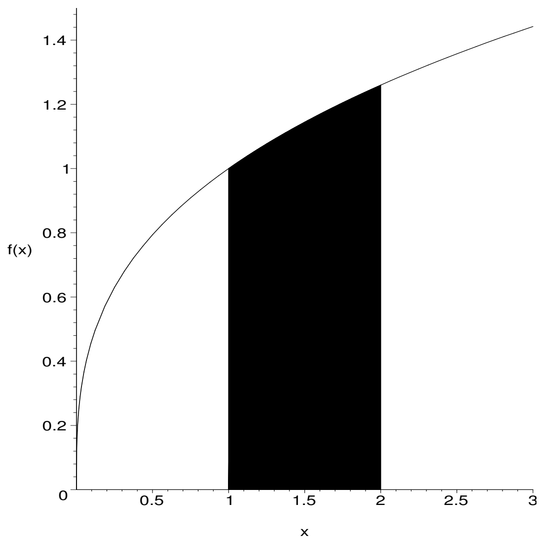
(1) Für $f(x) := x^4 - x^3$ ist $F(x) = \frac{1}{5}\,x^5 - \frac{1}{4}x^4$ eine Stammfunktion. Also wird

$$\int_0^1 (x^4 - x^3)\,\mathrm{d}x \;=\; \big[\frac{1}{5}\,x^5 - \frac{1}{4}x^4\big]_{x=0}^1 \;=\; (\frac{1}{5}\,1^5 - \frac{1}{4}\,1^4) - (\frac{1}{5}\,0^5 - \frac{1}{4}\,0^4) \;=\; -\frac{1}{20} \;=\; -0{,}05\;.$$



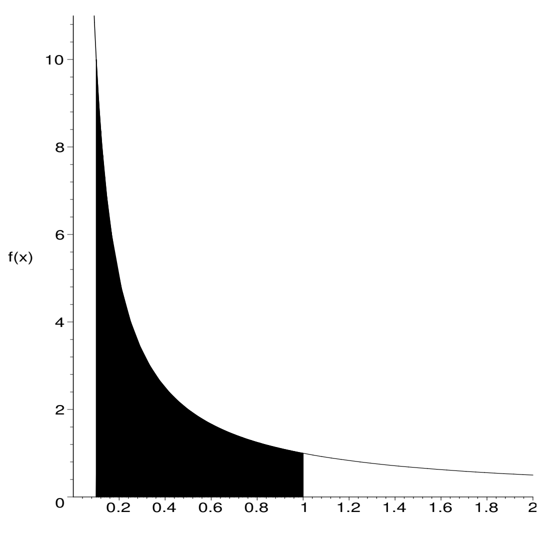
(2) Für $f(x) := \sqrt[3]{x} = x^{1/3}$ ist $\frac{3}{4}x^{4/3}$ eine Stammfunktion. Also wird

$$\int_1^2 \sqrt[3]{x}\,\mathrm{d}x \;=\; \big[\frac{3}{4}\,x^{4/3}\big]_{x=1}^2 \;=\; \frac{3}{4}\,2^{4/3} - \frac{3}{4}\,1^{4/3} \;\approx\; 1{,}1399\;.$$



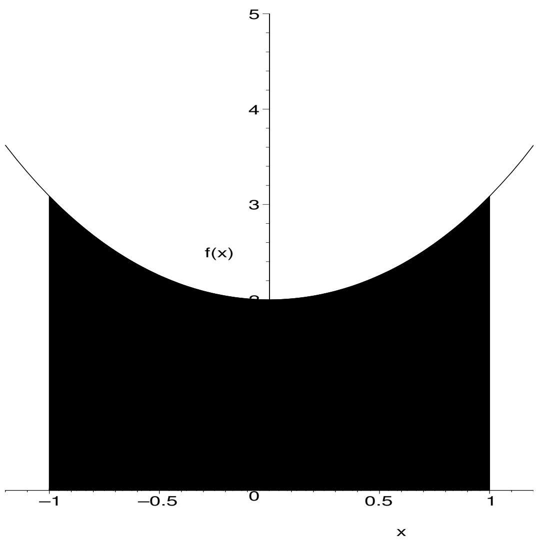
(3) Für $f(x) = x^{-1}$ ist $F(x) = \ln(x)$ eine Stammfunktion. Also wird

$$\int_{1/10}^{1} x^{-1}\,\mathrm{d}x \;=\; \big[\ln(x)\big]_{x=1/10}^{1} \;=\; \ln(1) - \ln(1/10) \;=\; \ln(10) \;\approx\; 2{,}3026\,.$$



(4) Für $f(x) = \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}$ ist $F(x) = \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}$ eine Stammfunktion. Also wird

$$\int_{-1}^{1} (\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})\,\mathrm{d}x \;=\; \big[\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}\big]_{x=-1}^{1} \;=\; (\mathrm{e}^1 - \mathrm{e}^{-1}) - (\mathrm{e}^{-1} - \mathrm{e}^{-(-1)}) \;=\; 2(\mathrm{e} - \mathrm{e}^{-1}) \;\approx\; 4{,}7008\,.$$



Aufgabe 92

Wir substituieren mittels $g(x) := \sin(x)$ und erhalten

$$\int_0^{\pi/2} \sqrt{\sin(x)} \cdot \cos(x)\,\mathrm{d}x \;=\; \int_0^{\pi/2} \sqrt{g(x)}\,g'(x)\,\mathrm{d}x \;=\; \int_{\sin(0)}^{\sin(\pi/2)} \sqrt{u}\,\mathrm{d}u \;=\; \int_0^1 u^{1/2}\,\mathrm{d}u \;=\; \left[\tfrac{2}{3}\,u^{3/2}\right]_{u=0}^{1} \;=\; \frac{2}{3} \;=\; 0{,}\overline{6}\,.$$

Aufgabe 93

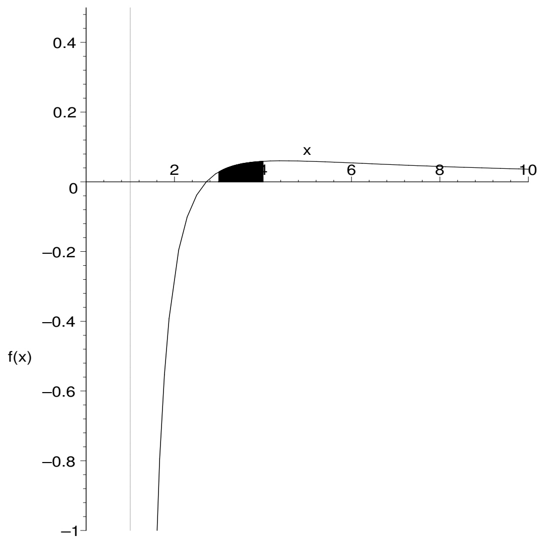
(1) Wir substituieren mittels $g(x) := \ln(x)$ und erhalten

$$\int_3^4 \frac{\ln(\ln(x))}{\ln(x)x}\,\mathrm{d}x \;=\; \int_3^4 \frac{\ln(g(x))}{g(x)}g'(x)\,\mathrm{d}x \;=\; \int_{\ln(3)}^{\ln(4)} \frac{\ln(u)}{u}\,\mathrm{d}u\,.$$

Nun substituieren wir mittels $h(u) := \ln(u)$ und erhalten

$$\int_{\ln(3)}^{\ln(4)} \frac{\ln(u)}{u}\,\mathrm{d}u \;=\; \int_{\ln(3)}^{\ln(4)} h(u)\,h'(u)\,\mathrm{d}u \;=\; \int_{\ln(\ln(3))}^{\ln(\ln(4))} t\,\mathrm{d}t \;=\; [\frac{1}{2}\,t^2]_{t=\ln(\ln(3))}^{\ln(\ln(4))} \;=\; \frac{1}{2}(\ln(\ln(4))^2 - \ln(\ln(3))^2) \;\approx\; 0{,}04892\,.$$

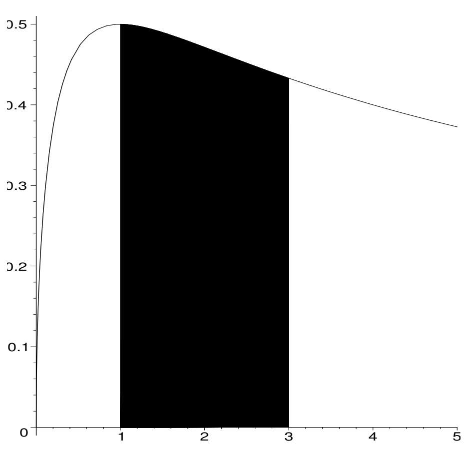
Insgesamt wird also $\int_3^4 \frac{\ln(\ln(x))}{\ln(x)x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(\ln(\ln(4))^2 - \ln(\ln(3))^2) \approx 0{,}04892$.



(2) Wir substituieren mittels $g(x) := x^{1/2}$ und erhalten wegen $g'(x) = \frac{1}{2}\,x^{-1/2} = \frac{1}{2}\,g(x)^{-1}$

$$\begin{aligned}
\int_1^s \frac{\sqrt{x}}{1+x}\,\mathrm{d}x &= \int_1^s \frac{g(x)}{1+g(x)^2}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_1^s \frac{2g(x)^2}{1+g(x)^2}\cdot\frac{1}{2}\,g(x)^{-1}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_1^s \frac{2g(x)^2}{1+g(x)^2}\,g'(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{g(1)}^{g(s)} \frac{2u^2}{1+u^2}\,\mathrm{d}u \\
&= 2\int_1^{s^{1/2}} \frac{u^2}{1+u^2}\,\mathrm{d}u \\
&= 2\int_1^{s^{1/2}} \frac{1+u^2-1}{1+u^2}\,\mathrm{d}u \\
&= 2\int_1^{s^{1/2}} (1 - \frac{1}{1+u^2})\,\mathrm{d}u \\
&\overset{\text{A. 38.(2)}}{=} 2[u - \arctan(u)]_{u=1}^{s^{1/2}} \\
&= 2(s^{1/2} - \arctan(s^{1/2}) - 1 + \arctan(1)) \\
&= 2(s^{1/2} - \arctan(s^{1/2}) - 1 + \frac{\pi}{4})\,.
\end{aligned}$$

Skizze im Falle $s = 3$.



(3) Wir substituieren mittels $x = g(t) := \sin(t)$ und erhalten

$$\int_{-1}^{+1} (1-x^2)^{1/2}\,\mathrm{d}x \;=\; \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} (1-\sin(t)^2)^{1/2}\cdot(\cos(t))\,\mathrm{d}t \;=\; \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \cos(t)\cos(t)\,\mathrm{d}t$$

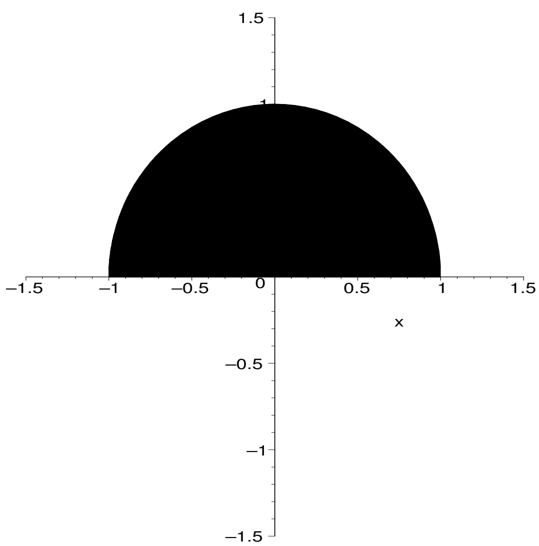
Nun wird mit der Produktregel aus §6.3.2

$$\int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \cos(t)\cos(t)\,\mathrm{d}t \;=\; [\sin(t)\cos(t)]_{t=-\pi/2}^{+\pi/2} - \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \sin(t)(-\sin(t))\,\mathrm{d}t \;=\; \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \sin(t)\sin(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Also folgt

$$2\int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \cos(t)^2\,\mathrm{d}t \;=\; \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \sin(t)^2\,\mathrm{d}t + \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \cos(t)^2\,\mathrm{d}t \;=\; \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} 1\,\mathrm{d}t \;=\; \pi\,.$$

Somit ist $\int_{-1}^{+1}(1-x^2)^{1/2}\,\mathrm{d}x = \int_{-\pi/2}^{+\pi/2}\cos(t)^2\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$.
Skizze.



Angesichts dessen, daß der Graph von $\sqrt{1-x^2}$ ein Halbkreis von Radius 1 ist, war dieses Ergebnis als Flächeninhalt dieses Halbkreises auch zu erwarten.

Da das Integrationsintervall $[-1,+1]$ nicht in einem offenen Definitionsbereich liegt, hätte man strenggenommen einen Grenzübergang im Sinne von §6.4 durchführen müssen, was aus Stetigkeitsgründen jedoch dasselbe Ergebnis gibt.
Um abzukürzen, hätte man $\cos(t)^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2t)$ verwenden können.

Aufgabe 94

Mit der Produktregel erhalten wir

$$\begin{aligned}
\textstyle\int_1^2 \ln(x)\cdot x^{-2}\,\mathrm{d}x &= [\ln(x)\cdot \tfrac{1}{-1}\,x^{-1}]_{x=1}^2 - \textstyle\int_1^2 x^{-1}\cdot\tfrac{1}{-1}\,x^{-1}\,\mathrm{d}x \\
&= -\tfrac{1}{2}\,\ln(2) + \textstyle\int_1^2 x^{-2}\,\mathrm{d}x \\
&= -\tfrac{1}{2}\,\ln(2) + [\tfrac{1}{-1}\,x^{-1}]_{x=1}^2 \\
&= -\tfrac{1}{2}\,\ln(2) + \tfrac{1}{2} \\
&\approx 0{,}153426\,.
\end{aligned}$$

Aufgabe 95

(1) Zweimalige Anwendung der Produktregel liefert

$$\begin{array}{rcl}\int_0^1 x^2 \cdot \mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x & \overset{\text{P.R.}}{=} & [x^2 \cdot \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{2x}]_{x=0}^1 - \int_0^1 2x \cdot \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x \\ & = & \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^2 - \int_0^1 x \cdot \mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x \\ & \overset{\text{P.R.}}{=} & \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^2 - [x \cdot \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{2x}]_{x=0}^1 + \int_0^1 1 \cdot \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x \\ & = & \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^2 - \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^2 + \int_0^1 1 \cdot \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x \\ & = & [\frac{1}{4}\,\mathrm{e}^{2x}]_{x=0}^1 \\ & = & \frac{1}{4}\,(\mathrm{e}^2 - 1) \\ & \approx & 1{,}59726\ . \end{array}$$

(2) Mit der Produktregel erhalten wir

$$\begin{array}{rcl}\int_1^u (x\ln(x) - x)\,\mathrm{d}x & = & \int_1^u x\ln(x)\,\mathrm{d}x - \int_1^u x\,\mathrm{d}x \\ & = & \int_1^u x\ln(x)\,\mathrm{d}x - [\frac{1}{2}\,x^2]_{x=1}^u \\ & = & \int_1^u x \cdot \ln(x)\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}(1-u^2) \\ & \overset{\text{P.R.}}{=} & [\frac{1}{2}\,x^2 \cdot \ln(x)]_{x=1}^u - \int_1^u \frac{1}{2}\,x^2 \cdot x^{-1}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}(1-u^2) \\ & = & \frac{1}{2}\,u^2 \cdot \ln(u) - [\frac{1}{4}\,x^2]_{x=1}^u + \frac{1}{2}(1-u^2) \\ & = & \frac{1}{2}\,u^2 \cdot \ln(u) + \frac{3}{4}(1-u^2)\ . \end{array}$$

(3) Mit der Produktregel und nachfolgender Substitution $g(x) := 1 + x^2$ erhalten wir

$$\begin{array}{rcl}\int_0^u 1 \cdot \arctan(x)\,\mathrm{d}x & \overset{\text{P.R.}}{=} & [x \cdot \arctan(x)]_{x=0}^s - \int_0^s x \cdot (1+x^2)^{-1}\,\mathrm{d}x \\ & = & s\arctan(s) - \int_0^s \frac{1}{2}\,g(x)^{-1}\,2x\,\mathrm{d}x \\ & = & s\arctan(s) - \frac{1}{2}\int_0^s g(x)^{-1}\,g'(x)\,\mathrm{d}x \\ & = & s\arctan(s) - \frac{1}{2}\int_{g(0)}^{g(s)} u^{-1}\,\mathrm{d}u \\ & = & s\arctan(s) - \frac{1}{2}\int_1^{1+s^2} u^{-1}\,\mathrm{d}u \\ & = & s\arctan(s) - \frac{1}{2}[\ln(u)]_{u=1}^{1+s^2} \\ & = & s\arctan(s) - \frac{1}{2}\ln(1+s^2)\ . \end{array}$$

Aufgabe 96

Wir machen den Ansatz

$$\frac{1}{x^2(x-1)} \overset{!}{=} \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-1}$$

mit noch zu bestimmenden A, B, $C \in \mathbf{R}$. Durchmultiplizieren mit $x^2(x-1)$ gibt

$$\begin{array}{rcl} 1 & \overset{!}{=} & Ax(x-1) + B(x-1) + Cx^2 \\ & = & A(x^2 - x) + B(x-1) + Cx^2\ . \end{array}$$

Koeffizientenvergleich liefert folgendes von $\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^{4\times 1}$ zu erfüllende lineare Gleichungssystem, welches wir auch sogleich umformen.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Es folgt $A = -1$, $B = -1$ und $C = 1$, d.h.

$$\frac{1}{x^2(x-1)} \overset{!}{=} -\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x-1}$$

wie man durch eine Probe bestätigt.

Dies gibt

$$\begin{aligned}
\int_2^4 \tfrac{1}{x^2(x-1)}\,\mathrm{d}x &= \int_2^4 \big(-\tfrac{1}{x} - \tfrac{1}{x^2} + \tfrac{1}{x-1}\big)\,\mathrm{d}x \\
&= \big[-\ln(x) + \tfrac{1}{x} + \ln(x-1)\big]_{x=2}^4 \\
&= -\ln(2) - \tfrac{1}{4} + \ln(3) \\
&= \ln(3/2) - \tfrac{1}{4} \\
&\approx 0{,}155465\,.
\end{aligned}$$

Aufgabe 97

(1) Der Grad des Zählers ist nicht kleiner als der Grad des Nenners. Also führen wir eine Polynomdivision durch und erhalten

$$x^4 \;=\; (x^4 - 2x^2 + 1)\cdot 1 + (2x^2 - 1)\,,$$

und also

$$\frac{x^4}{x^4 - 2x^2 + 1} \;=\; 1 + \frac{2x^2 - 1}{x^4 - 2x^2 + 1}\,.$$

Auf den hierbei entstandenen Bruch wollen wir Partialbruchzerlegung anwenden.

Dazu stellen wir fest, daß $x^4 - 2x^2 + 1 = (x^2 - 1)^2 = (x-1)^2(x+1)^2$.

Wir machen den Ansatz

$$\frac{2x^2 - 1}{(x-1)^2(x+1)^2} \;\overset{!}{=}\; \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+1} + \frac{D}{(x+1)^2}$$

mit noch zu bestimmenden $A, B, C, D \in \mathbf{R}$. Durchmultiplizieren mit $(x-1)^2(x+1)^2$ gibt

$$\begin{aligned}
2x^2 - 1 &\overset{!}{=} A(x-1)(x+1)^2 + B(x+1)^2 + C(x-1)^2(x+1) + D(x-1)^2 \\
&= A(x^3 + x^2 - x - 1) + B(x^2 + 2x + 1) + C(x^3 - x^2 - x + 1) + D(x^2 - 2x + 1)\,.
\end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich liefert folgendes von $\left(\begin{smallmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{smallmatrix}\right) \in \mathbf{R}^{4\times 1}$ zu erfüllende lineare Gleichungssystem, welches wir auch sogleich umformen.

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} -1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 2 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -4 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & -4 & 0 & 3 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 0 & 0 & 3/4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -3/4 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & -1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 0 & 0 & 3/4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -3/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/4 \end{array}\right)$$

Es folgt $A = \frac{3}{4}$, $B = \frac{1}{4}$, $C = -\frac{3}{4}$ und $D = \frac{1}{4}$, d.h.

$$\frac{2x^2 - 1}{x^4 - 2x^2 + 1} \;=\; \frac{1}{4}\Big(\frac{3}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{3}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2}\Big)$$

wie man durch eine Probe bestätigt.

Dies gibt

$$\begin{aligned}
\int_2^3 \tfrac{x^4}{x^4 - 2x^2 + 1}\,\mathrm{d}x &= \int_2^3 \big(1 + \tfrac{1}{4}\big(\tfrac{3}{x-1} + \tfrac{1}{(x-1)^2} - \tfrac{3}{x+1} + \tfrac{1}{(x+1)^2}\big)\big)\,\mathrm{d}x \\
&= \big[x + \tfrac{1}{4}\big(3\ln(x-1) - \tfrac{1}{x-1} - 3\ln(x+1) - \tfrac{1}{x+1}\big)\big]_{x=2}^3 \\
&= 1 + \tfrac{1}{4}\big(3\ln(2) + \tfrac{1}{2} - 3\ln(4/3) + \tfrac{1}{12}\big) \\
&= \tfrac{3}{4}\ln(3/2) + \tfrac{55}{48} \\
&\approx 1{,}44993\,.
\end{aligned}$$

(2) Wir machen den Ansatz

$$\frac{1}{x^3(x-1)^2(x+1)^2} \overset{!}{=} \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3} + \frac{D}{x-1} + \frac{E}{(x-1)^2} + \frac{F}{x+1} + \frac{G}{(x+1)^2}$$

mit noch zu bestimmenden A, B, C, D, E, F, $G \in \mathbf{R}$. Durchmultiplizieren mit $x^3(x-1)^2(x+1)^2$ gibt

$$\begin{array}{rcl} 1 & \overset{!}{=} & Ax^2(x-1)^2(x+1)^2 + Bx(x-1)^2(x+1)^2 + C(x-1)^2(x+1)^2 + Dx^3(x-1)(x+1)^2 + Ex^3(x+1)^2 \\ & & + Fx^3(x-1)^2(x+1) + Gx^3(x-1)^2 \\ & = & A(x^6 - 2x^4 + x^2) + B(x^5 - 2x^3 + x) + C(x^4 - 2x^2 + 1) + D(x^6 + x^5 - x^4 - x^3) + E(x^5 + 2x^4 + x^3) \\ & & + F(x^6 - x^5 - x^4 + x^3) + G(x^5 - 2x^4 + x^3)\ . \end{array}$$

Koeffizientenvergleich liefert folgendes von $\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \\ G \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^{7\times 1}$ zu erfüllende lineare Gleichungssystem, welches wir auch sogleich umformen.

$$\left(\begin{array}{rrrrrrr|r} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & -1 & 2 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{rrrrrrr|r} 1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -1 & 2 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{rrrrrrr|r} 1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -1 & 2 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{rrrrrrr|r} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -2 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{rrrrrrr|r} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & -2 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{rrrrrrr|r} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & -2 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{rrrrrrr|r} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{rrrrrrr|r} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1/4 \end{array}\right) .$$

Es folgt $A = 2$, $B = 0$, $C = 1$, $D = -1$, $E = \frac{1}{4}$, $F = -1$ und $G = -\frac{1}{4}$, d.h.

$$\frac{1}{x^3(x-1)^2(x+1)^2} = \frac{2}{x} + \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{4(x-1)^2} - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{4(x+1)^2}$$

wie man durch eine Probe bestätigt.

Dies gibt

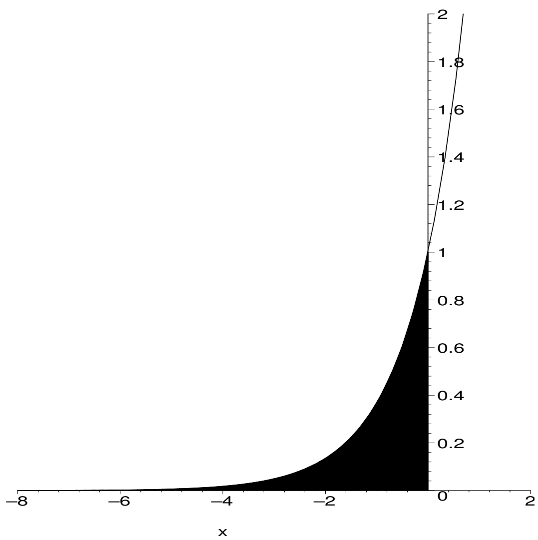
$$\begin{array}{rcl} \int_2^3 \frac{1}{x^3(x-1)^2(x+1)^2}\,\mathrm{d}x & = & \int_2^3 \left(\frac{2}{x} + \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{4(x-1)^2} - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{4(x+1)^2}\right)\mathrm{d}x \\ & = & \left[2\ln(x) - \frac{1}{2x^2} - \ln(x-1) - \frac{1}{4(x-1)} - \ln(x+1) + \frac{1}{4(x+1)}\right]_{x=2}^{3} \\ & = & 2\ln(3/2) + \frac{5}{72} - \ln(2) + \frac{1}{8} - \ln(4/3) - \frac{1}{48} \\ & = & \ln(27/32) + \frac{25}{144} \\ & \approx & 0{,}00371207\ . \end{array}$$

Aufgabe 98

Da bei $-\infty$ uneigentlich zu integrieren ist, müssen wir einen Grenzübergang durchführen und erhalten

$$\begin{array}{rcl} \int_{-\infty}^0 \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x & = & \lim_{s\to-\infty} \int_s^0 \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x \\ & = & \lim_{s\to-\infty} [\mathrm{e}^x]_{x=s}^0 \\ & = & \lim_{s\to-\infty} (1 - \mathrm{e}^s) \\ & = & 1 - \lim_{s\to-\infty} \mathrm{e}^s \\ & = & 1 - 0 \\ & = & 1\ . \end{array}$$

Skizze.



Aufgabe 99

(1) Es liegt ein bei 0 uneigentliches Integral vor. Wir müssen also einen Grenzübergang durchführen und erhalten

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^{-\alpha}\,\mathrm{d}x &= \lim_{s\to 0}\int_s^1 x^{-\alpha}\,\mathrm{d}x\\ &= \lim_{s\to 0}[\tfrac{1}{1-\alpha}\,x^{1-\alpha}]_{x=s}^1\\ &= \lim_{s\to 0}\tfrac{1}{1-\alpha}\,(1-s^{1-\alpha})\\ &= \tfrac{1}{1-\alpha}\,(1-\lim_{s\to 0}s^{1-\alpha})\\ &= \tfrac{1}{1-\alpha}\,(1-\lim_{s\to 0}\mathrm{e}^{(1-\alpha)\ln(s)})\\ &= \tfrac{1}{1-\alpha}\,(1-0)\\ &= \tfrac{1}{1-\alpha}\ ;\end{aligned}$$

beachte, daß $(1-\alpha)\ln(s)$ für $s\to 0$ gegen $-\infty$ geht wegen $1-\alpha>0$, und also $\mathrm{e}^{(1-\alpha)\ln(s)}$ gegen 0.

(2) Es ist $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3/2}} = \lim_{k\to\infty}\sum_{n=1}^{k}\frac{1}{n^{3/2}}$, falls existent.

Da $\frac{1}{n^{3/2}}\geqslant 0$, genügt es für die Konvergenz unserer Reihe, zu zeigen, daß die Folge $(\sum_{n=1}^{k}\frac{1}{n^{3/2}})_{k\geqslant 0}$ eine obere Schranke hat; vgl. vorletztes Lemma in §2.2.2.

Nun zeigt ein Vergleich von Flächeninhalten, daß für $k\geqslant 1$

$$\sum_{n=1}^{k}\frac{1}{n^{3/2}}\ \leqslant\ 1+\int_1^k x^{-3/2}\,\mathrm{d}x\ =\ 1+[-2x^{-1/2}]_{x=1}^k\ =\ 1+(-2(k^{-1/2}-1))\ =\ 3-2k^{-1/2}\ \leqslant 3\ ;$$

vgl. untenstehende Skizze. Also konvergiert die Reihe $\sum_{k\geqslant 1}\frac{1}{n^{3/2}}$, d.h. ihr Grenzwert $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3/2}}$ existiert.

Der Grenzübergang $k\to\infty$ liefert noch

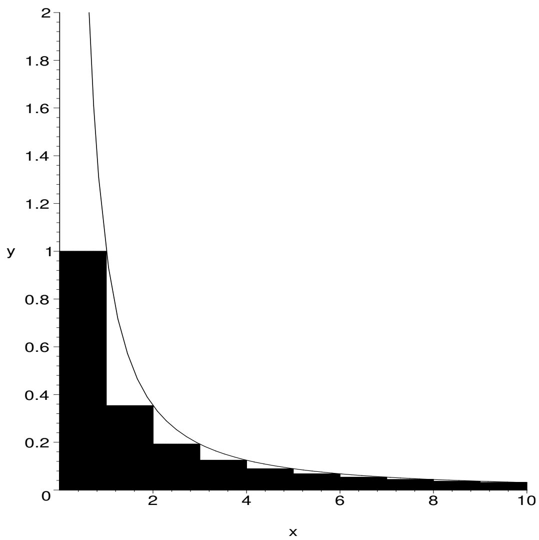
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3/2}}\ \leqslant\ 1+\int_1^{\infty}x^{-3/2}\,\mathrm{d}x\ =\ \lim_{k\to\infty}(3-2k^{-1/2})\ =\ 3\ ,$$

insbesondere also auch $\int_1^{\infty}x^{-3/2}\,\mathrm{d}x = 2$, wie gefragt.

Zum Vergleich, es wird

$$\begin{aligned}\textstyle\sum_{n=1}^{100}\frac{1}{n^{3/2}} &\approx 2{,}412874\\ \textstyle\sum_{n=1}^{10^6}\frac{1}{n^{3/2}} &\approx 2{,}610375\ .\end{aligned}$$

Skizze.



(3) Es ist $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n}$, falls existent.

Wir *nehmen an,* der Grenzwert $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} =: g$ existiert. Dann gibt es insbesondere für $\varepsilon := 1$ ein $\ell \geqslant 1$ mit

$$|g - \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n}| \;<\; \varepsilon \;=\; 1$$

und also insbesondere

$$\sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n} \;\leqslant\; g+1$$

für alle $k \geqslant \ell$, und damit für alle $k \geqslant 0$.

Nun zeigt ein Vergleich von Flächeninhalten, daß für $k \geqslant 0$

$$g+1 \;\geqslant\; \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n} \;\geqslant\; \int_1^{k+1} x^{-1}\,\mathrm{d}x \;=\; [\ln(x)]_{x=1}^{k+1} \;=\; \ln(k+1)\;;$$

vgl. untenstehende Skizze.

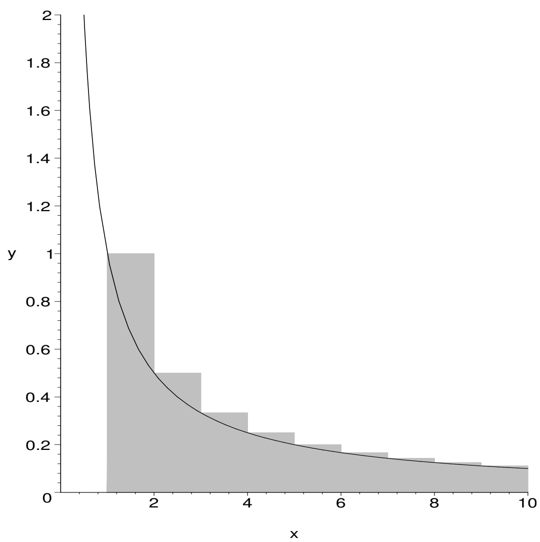
Für $k > \exp(g+1)$ ist aber $\ln(k+1) > \ln\exp(g+1) = g+1$, da $\ln(x)$ auf $\mathbf{R}_{>0}$ streng monoton wachsend ist, da dort $\ln(x)' = x^{-1} > 0$ ist; vgl. §3.2.2.

Wir erhalten für $k > \exp(g+1)$ insgesamt

$$g+1 \;\geqslant\; \ln(k+1) \;>\; g+1\,,$$

und das ist ein *Widerspruch.* Also kann unsere Annahme nicht richtig gewesen sein. In anderen Worten, der fragliche Grenzwert $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ existiert nicht, d.h. die Reihe $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$ divergiert.

Skizze.



Aufgabe 100

Das Anlagevermögen nach t Jahren berechnet sich zu $K(t) = 50.000 \cdot 1{,}06^t + 50.000$. Dann gilt $K'(t) = \ln(1{,}06) \cdot 50.000 \cdot 1{,}06^t$. Damit ergibt sich die Wachstumsrate zu

$$\mathrm{R}_K(t) \;=\; \frac{K'(t)}{K(t)} \;=\; \frac{\ln(1{,}06) \cdot 50.000 \cdot 1{,}06^t}{50.000 \cdot 1{,}06^t + 50.000} \;=\; \frac{\ln(1{,}06) \cdot 1{,}06^t}{1{,}06^t + 1} \;.$$

Für $t = 10$ gibt dies ein Wachstum von $\mathrm{R}_K(10) = \frac{\ln(1{,}06)\cdot 1{,}06^{1}0}{1{,}06^{1}0+1} \approx 0{,}03739$.

Aufgabe 101

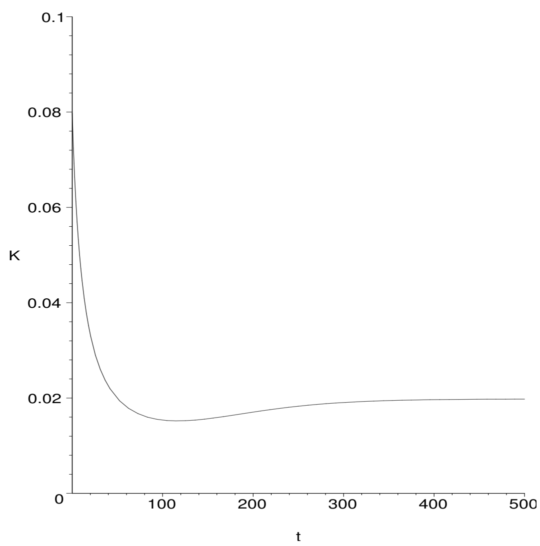
Sei zunächst erwähnt, daß die Rechnung mit beliebigen $t \in \mathbf{R}$ anstelle von den praktisch relevanten $t \in \mathbf{Z}_{\geqslant 0}$ den tatsächlichen Sachverhalt nur angenähert wiedergibt, was das Wachstum angeht.

(1) Das erzielte Gesamtkapital beträgt

$$K(t) \;=\; 100.000 \cdot 1{,}02^t + 6.000 \cdot t \;.$$

Somit wird

$$\mathrm{R}_K(t) \;=\; \frac{K'(t)}{K(t)} \;=\; \frac{100.000 \cdot \ln(1{,}02) \cdot 1{,}02^t + 6.000}{100.000 \cdot 1{,}02^t + 6.000 \cdot t}$$



Es ist

$$\mathrm{R}_K(0) \;=\; \frac{100.000 \cdot \ln(1{,}02) \cdot 1{,}02^0 + 6.000}{100.000 \cdot 1{,}02^0 + 6.000 \cdot 0} \;\approx\; 0{,}0798$$

die Wachstumsrate des Gesamtkapitals nach 0 Jahren, also zu Beginn.

Es ist

$$\mathrm{R}_K(10) \;=\; \frac{100.000 \cdot \ln(1{,}02) \cdot 1{,}02^{10} + 6.000}{100.000 \cdot 1{,}02^{10} + 6.000 \cdot 10} \;\approx\; 0{,}0463$$

die Wachstumsrate des Gesamtkapitals nach 10 Jahren.

Es ist

$$\mathrm{R}_K(20) \;=\; \frac{100.000 \cdot \ln(1{,}02) \cdot 1{,}02^{20} + 6.000}{100.000 \cdot 1{,}02^{20} + 6.000 \cdot 20} \;\approx\; 0{,}0333$$

die Wachstumsrate des Gesamtkapitals nach 20 Jahren.

(2) Die Mieteinnahmen betragen nach t Jahren

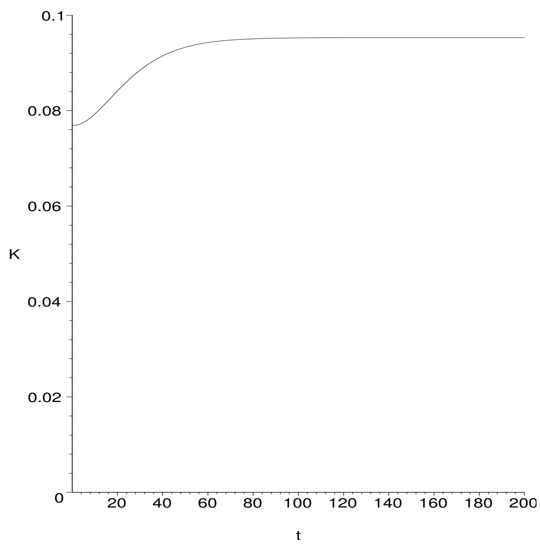
$$6.000 \cdot 1{,}1^0 + 6.000 \cdot 1{,}1^1 + 6.000 \cdot 1{,}1^2 + \cdots + 6.000 \cdot 1{,}1^{t-1} \;=\; 6.000 \cdot \frac{1{,}1^t - 1}{1{,}1 - 1} \;=\; 60.000 \cdot (1{,}1^t - 1)\;,$$

denn dies ist eine geometrische Summe; vgl. §2.3.2. Das erzielte Gesamtkapital beträgt also

$$K(t) \;=\; 100.000 \cdot 1{,}02^t + 60.000 \cdot (1{,}1^t - 1)\;.$$

Somit wird

$$\mathrm{R}_K(t) \;=\; \frac{K'(t)}{K(t)} \;=\; \frac{100.000 \cdot \ln(1{,}02) \cdot 1{,}02^t + 60.000 \cdot \ln(1{,}1) \cdot 1{,}1^t}{100.000 \cdot 1{,}02^t + 60.000 \cdot (1{,}1^t - 1)}\;.$$



Es ist

$$\mathrm{R}_K(t) \;=\; \frac{100.000 \cdot \ln(1{,}02) \cdot 1{,}02^0 + 60.000 \cdot \ln(1{,}1) \cdot 1{,}1^0}{100.000 \cdot 1{,}02^0 + 60.000 \cdot (1{,}1^0 - 1)} \;\approx\; 0{,}0770$$

die Wachstumsrate des Gesamtkapitals nach 0 Jahren, also zu Beginn.

Es ist

$$\mathrm{R}_K(t) \;=\; \frac{100.000 \cdot \ln(1{,}02) \cdot 1{,}02^{10} + 60.000 \cdot \ln(1{,}1) \cdot 1{,}1^{10}}{100.000 \cdot 1{,}02^{10} + 60.000 \cdot (1{,}1^{10} - 1)} \;\approx\; 0{,}0793$$

die Wachstumsrate des Gesamtkapitals nach 10 Jahren.

Es ist

$$\mathrm{R}_K(t) \;=\; \frac{100.000 \cdot \ln(1{,}02) \cdot 1{,}02^{20} + 60.000 \cdot \ln(1{,}1) \cdot 1{,}1^{20}}{100.000 \cdot 1{,}02^{20} + 60.000 \cdot (1{,}1^{20} - 1)} \;\approx\; 0{,}0841$$

die Wachstumsrate des Gesamtkapitals nach 20 Jahren.

Aufgabe 102

Es ist $f(x) = \frac{1}{2x}$. Wir erhalten $f'(x) = -\frac{1}{2x^2}$. Daher gilt $\mathrm{E}_f(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}\, x = -\frac{2x^2}{2x}\, x = -1$.

Aufgabe 103

(1) Die Elastizität von $f(x)$ wird

$$\mathrm{E}_f(x) \;=\; \frac{f'(x)}{f(x)} \cdot x \;=\; \frac{-\frac{10.000}{(900+x^2)^2} \cdot 2x}{\frac{10.000}{900+x^2}} \cdot x \;=\; -\,\frac{2x^2}{900+x^2}\;.$$

Die Elastizität von $f'(x)$ wird

$$\mathrm{E}_{f'}(x) \;=\; \frac{f''(x)}{f'(x)} \cdot x \;=\; \frac{-\frac{20.000\cdot(900+x^2)^2 - 20.000x\cdot 2(900+x^2)\cdot 2x}{(900+x^2)^4}}{-\frac{20.000x}{(900+x^2)^2}} \cdot x \;=\; \frac{900-3x^2}{900+x^2}\;.$$

Zu Bestimmung des Maximums des Gesamtgewinns überprüfen wir die Bedingungen des Lemmas aus §7.2.2.

Es ist $f(x) = \frac{10.000}{900+x^2} > 0$ und $f'(x) = -\frac{10.000}{(900+x^2)^2} \cdot 2x < 0$ für $x \in \mathbf{R}_{>0}$.

Für welche $x \in \mathbf{R}_{>0}$ ist $\mathrm{E}_f(x) < -1$? Diese Bedingung ist äquivalent zu $\frac{2x^2}{900+x^2} > 1$, also zu $2x^2 > 900 + x^2$, also zu $x^2 > 900$, also, da $x > 0$, zu $x \in (30, \infty)$.

Für welche $x \in \mathbf{R}_{>0}$ ist $\mathrm{E}_{f'}(x) > -2$? Diese Bedingung ist äquivalent zu $\frac{900-3x^2}{900+x^2} > -2$, also zu $900 - 3x^2 > -1.800 - 2x^2$, also zu $2.700 > x^2$, also, da $x > 0$, zu $x \in (0, 30\sqrt{3})$.

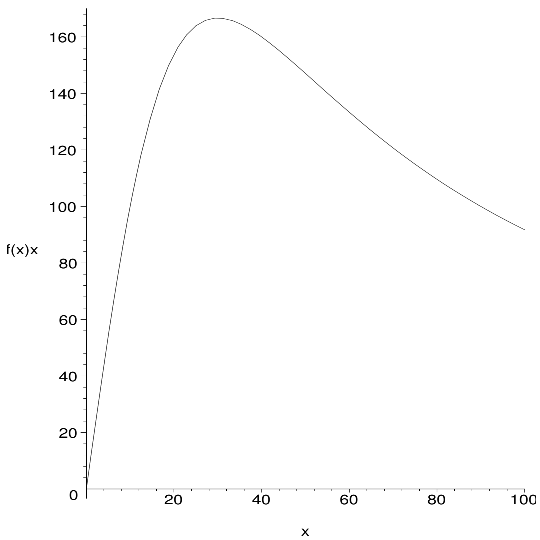
Für alle $x \in \mathbf{R}_{>0}$ ist aber $x \in (0, 30\sqrt{3})$ oder $x \in (30, \infty)$, also auch $\mathrm{E}_{f'}(x) > -2$ oder $\mathrm{E}_f(x) < -1$.

Insgesamt dürfen wir das Lemma anwenden.

Wir suchen ein $x_0 \in \mathbf{R}_{>0}$, für welches $\mathrm{E}_f(x_0) = -1$ ist. Formen wir um wie bei der Untersuchung von $\mathrm{E}_f(x) < -1$, nur mit einem Gleichheitszeichen an jeder Stelle, so sehen wir, daß dies für $x_0 = 30$ zutrifft.

Also muß der Verkäufer eine Gewinnmarge von 30 Euro pro Tonne Eternit ansetzen, um seinen Gesamtgewinn zu maximieren. Dieser beträgt dann $f(30) \cdot 30 = 166{,}67$ Euro, bei einem Absatz von $f(30) = 5,556$ Tonnen.

Skizze des Gesamtgewinns in Euro in Abhängigkeit von der Gewinnmarge in Euro pro Tonne.



(2) Die Elastizität von $f(x)$ wird

$$\mathrm{E}_f(x) \;=\; \frac{f'(x)}{f(x)} \cdot x \;=\; \frac{12.000 \cdot 2 \cdot (-1{,}4) \cdot (2x+1)^{-2{,}4}}{12.000 \cdot (2x+1)^{-1{,}4}} \cdot x \;=\; -\,2{,}8x(2x+1)^{-1}\,;$$

vgl. §3.2.4.3.1.

Die Elastizität von $f'(x)$ wird

$$\mathrm{E}_{f'}(x) \;=\; \frac{f''(x)}{f'(x)} \cdot x \;=\; \frac{12.000 \cdot 2 \cdot (-1{,}4) \cdot 2 \cdot (-2{,}4) \cdot (2x+1)^{-3{,}4}}{12.000 \cdot 2 \cdot (-1{,}4) \cdot (2x+1)^{-2{,}4}} \cdot x \;=\; -4{,}8x(2x+1)^{-1}\,.$$

Zu Bestimmung des Maximums des Gesamtgewinns überprüfen wir die Bedingungen des Lemmas aus §7.2.2.

Es ist $f(x) = 12.000 \cdot (2x+1)^{-1{,}4} > 0$ und $f'(x) = 12.000 \cdot 2 \cdot (-1{,}4) \cdot (2x+1)^{-2{,}4} < 0$ für $x \in \mathbf{R}_{>0}$.

Für welche $x \in \mathbf{R}_{>0}$ ist $\mathrm{E}_f(x) < -1$? Diese Bedingung ist äquivalent zu $2{,}8x(2x+1)^{-1} > 1$, also zu $2{,}8x < 2x + 1$, also zu $0{,}8x > 1$, also zu $x \in (1{,}25, \infty)$.

Für welche $x \in \mathbf{R}_{>0}$ ist $\mathrm{E}_{f'}(x) > -2$? Diese Bedingung ist äquivalent zu $4{,}8x(2x+1)^{-1} < 2$, also zu $4{,}8x < 4x + 2$, also zu $0{,}8x < 2$, also, da $x > 0$, zu $x \in (0, 2{,}5)$.

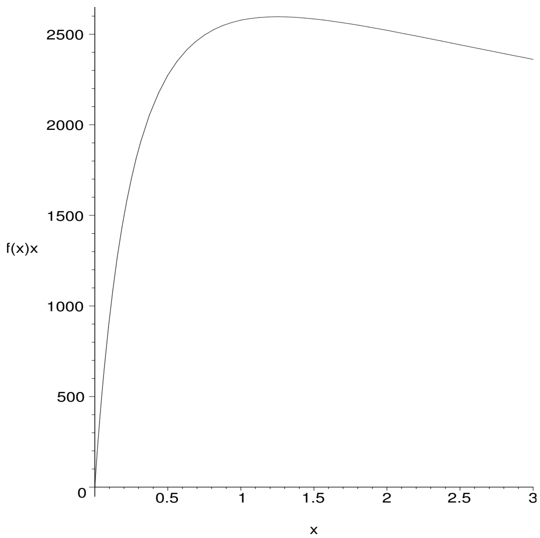
Für alle $x \in \mathbf{R}_{>0}$ ist aber $x \in (0, 2{,}5)$ oder $x \in (1{,}25, \infty)$, also auch $\mathrm{E}_{f'}(x) > -2$ oder $\mathrm{E}_f(x) < -1$.

Insgesamt dürfen wir das Lemma anwenden.

Wir suchen ein $x_0 \in \mathbf{R}_{>0}$, für welches $\mathrm{E}_f(x_0) = -1$ ist. Formen wir um wie bei der Untersuchung von $\mathrm{E}_f(x) < -1$, nur mit einem Gleichheitszeichen an jeder Stelle, so sehen wir, daß dies für $x_0 = 1{,}25$ zutrifft.

Also muß der Verkäufer 1,25 Kilogramm Zirkonium auf den Markt werfen, um seinen Gesamtgewinn zu maximieren. Dieser beträgt dann $f(1{,}25) \cdot 1{,}25 = 2596{,}55$ Yen, bei einer Gewinnmarge von $f(1{,}25) = 2077{,}24$ Yen pro Kilogramm.

Skizze des Gesamtgewinns in Yen in Abhängigkeit von der angebotenen Menge in Kilogramm.



Aufgabe 104

Es ist $f(x) = x^{1/2}$, also $f(1) = 1$.

Es ist $f'(x) = \frac{1}{2} \cdot x^{-1/2}$, also $f'(1) = \frac{1}{2}$.

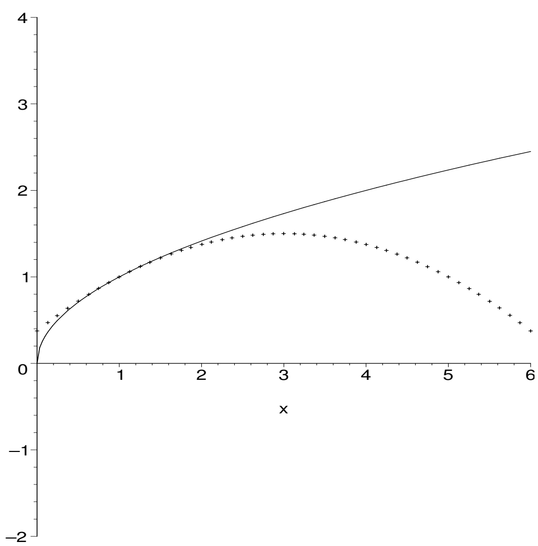
Es ist $f''(x) = \frac{1}{2} \cdot (-\frac{1}{2}) \cdot x^{-3/2}$, also $f''(1) = -\frac{1}{4}$.

Das gesuchte Taylorpolynom ergibt sich zu

$$f(1)(x-1)^0 + f'(1)(x-1)^1 + \frac{1}{2}\, f''(1)(x-1)^2 \;=\; 1 + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{8}(x-1)^2 \;.$$

(Die Ausdrücke der Form $(x-1)^m$ sind hierbei nicht auszumultiplizieren.)

Skizze von $f(x)$ (durchgezogen) und vom Taylorpolynom (gepunktelt).



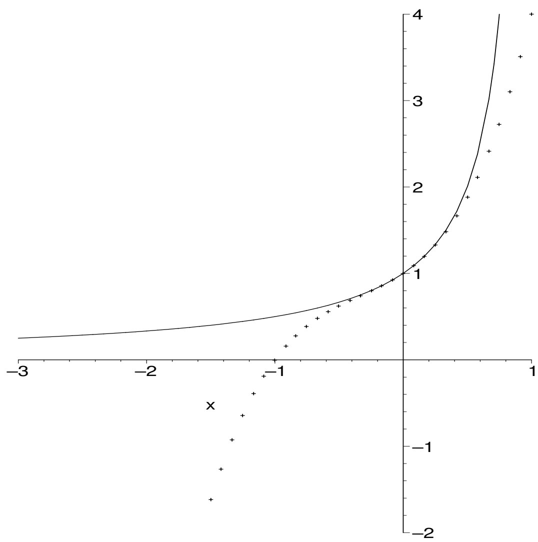
Aufgabe 105

(1) Es ist $f(x) = (1-x)^{-1}$, also $f(0) = 1$.
Es ist $f'(x) = (1-x)^{-2}$, also $f'(0) = 1$.
Es ist $f''(x) = 2(1-x)^{-3}$, also $f''(0) = 2$.
Es ist $f'''(x) = 6(1-x)^{-4}$, also $f'''(0) = 6$.
Es ist $f^{(4)}(x) = 24(1-x)^{-5}$.
Für $x \in (-\infty, 1)$ ist also

$$\begin{aligned} & f(x) \\ = \; & f(0)(x-0)^0 + f'(0)(x-0)^1 + \tfrac{1}{2!}f''(0)(x-0)^2 + \tfrac{1}{3!}f'''(0)(x-0)^3 + \overbrace{\tfrac{1}{3!}\int_0^x f^{(4)}(t)(x-t)^3\,\mathrm{d}t}^{\text{Restglied}} \\ = \; & \underbrace{1 + x + x^2 + x^3}_{\text{Taylorpolynom}} + \underbrace{4\int_0^x (1-t)^{-5}(x-t)^3\,\mathrm{d}t}_{\text{Restglied}} \; . \end{aligned}$$

Vgl. die geometrische Reihe $f(x) = (1-x)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$ aus §2.3.2.

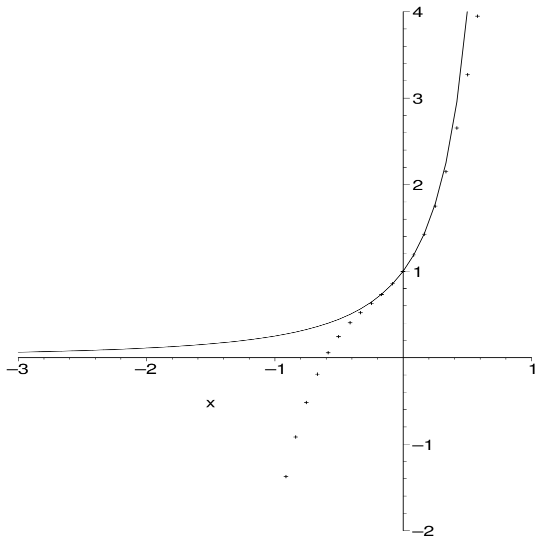
Skizze von $f(x)$ (durchgezogen) und vom Taylorpolynom (gestrichelt).



(2) Es ist $f(x) = (1-x)^{-2}$, also $f(0) = 1$.
Es ist $f'(x) = 2(1-x)^{-3}$, also $f'(0) = 2$.
Es ist $f''(x) = 6(1-x)^{-4}$, also $f''(0) = 6$.
Es ist $f'''(x) = 24(1-x)^{-5}$, also $f'''(0) = 24$.
Es ist $f^{(4)}(x) = 120(1-x)^{-6}$.
Für $x \in (-\infty, 1)$ ist also

$$\begin{aligned} & f(x) \\ = \; & f(0)(x-0)^0 + f'(0)(x-0)^1 + \tfrac{1}{2!}f''(0)(x-0)^2 + \tfrac{1}{3!}f'''(0)(x-0)^3 + \overbrace{\tfrac{1}{3!}\int_0^x f^{(4)}(t)(x-t)^3\,\mathrm{d}t}^{\text{Restglied}} \\ = \; & \underbrace{1 + 2x + 3x^2 + 4x^3}_{\text{Taylorpolynom}} + \underbrace{40\int_0^x (1-t)^{-6}(x-t)^3\,\mathrm{d}t}_{\text{Restglied}} \; . \end{aligned}$$

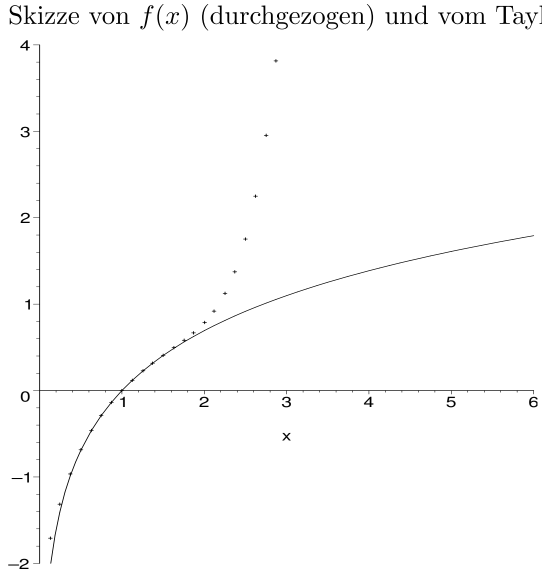
Skizze von $f(x)$ (durchgezogen) und vom Taylorpolynom (gepunktelt).



(3) Es ist $f(x) = \ln x$, also $f(1) = 0$.
Es ist $f'(x) = x^{-1}$, also $f'(1) = 1$. Vgl. §3.2.4.2.
Es ist $f''(x) = -x^{-2}$, also $f''(1) = -1$.
Es ist $f'''(x) = 2x^{-3}$, also $f'''(1) = 2$.
Es ist $f^{(4)}(x) = -6x^{-4}$, also $f^{(4)}(1) = -6$.
Es ist $f^{(5)}(x) = 24x^{-5}$, also $f^{(5)}(1) = 24$.
Es ist $f^{(6)}(x) = -120x^{-6}$.
Für $x \in (0, \infty)$ ist also

$$\begin{array}{rl} & f(x) \\ = & f(1)(x-1)^0 + f'(1)(x-1)^1 + \frac{1}{2!}f''(1)(x-1)^2 + \frac{1}{3!}f'''(1)(x-1)^3 + \frac{1}{4!}f'''(1)(x-1)^4 + \frac{1}{5!}f'''(1)(x-1)^5 \\ & + \underbrace{\frac{1}{5!}\int_0^x f^{(6)}(t)(x-t)^5\,\mathrm{d}t}_{\text{Restglied}} \\ = & \underbrace{(x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 - \frac{1}{4}(x-1)^4 + \frac{1}{5}(x-1)^5}_{\text{Taylorpolynom}} + \underbrace{(-1)\int_1^x t^{-6}(x-t)^5\,\mathrm{d}t}_{\text{Restglied}}\ . \end{array}$$

Skizze von $f(x)$ (durchgezogen) und vom Taylorpolynom (gepunktelt).



(4) Es ist $f(x) = x^{2/3}$, also $f(1) = 1$.

Es ist $f'(x) = \frac{2}{3}\,x^{-1/3}$, also $f'(1) = \frac{2}{3}$.

Es ist $f''(x) = -\frac{2}{9}\,x^{-4/3}$, also $f''(1) = -\frac{2}{9}$.

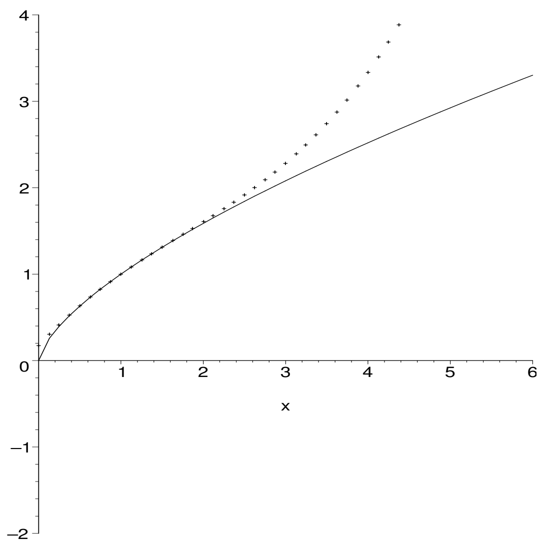
Es ist $f'''(x) = \frac{8}{27}\,x^{-7/3}$, also $f'''(1) = \frac{8}{27}$.

Es ist $f^{(4)}(x) = -\frac{56}{81}\,x^{-10/3}$.

Für $x \in (0, \infty)$ ist also

$$\begin{aligned} & f(x) \\ = \;& f(1)(x-1)^0 + f'(1)(x-1)^1 + \tfrac{1}{2!}f''(1)(x-1)^2 + \tfrac{1}{3!}f'''(1)(x-1)^3 + \overbrace{\tfrac{1}{3!}\int_1^x f^{(4)}(t)(x-t)^3\,\mathrm{d}t}^{\text{Restglied}} \\ = \;& \underbrace{1 + \tfrac{2}{3}\,(x-1) - \tfrac{1}{9}\,(x-1)^2 + \tfrac{4}{81}\,(x-1)^3}_{\text{Taylorpolynom}} + \underbrace{(-\tfrac{28}{243})\int_0^x t^{-10/3}(x-t)^3\,\mathrm{d}t}_{\text{Restglied}}\;. \end{aligned}$$

Skizze von $f(x)$ (durchgezogen) und vom Taylorpolynom (gepunktelt).



Aufgabe 106

Wir haben $f(x) = \mathrm{e}^x$, $f'(x) = \mathrm{e}^x$ und $f''(x) = \mathrm{e}^x$. Daher ist das Taylorpolynom zweiter Ordnung von f um 0 gegeben durch

$$p(x) \;:=\; f(0) + f'(0)(x-0) + \tfrac{1}{2}\,f''(0)(x-0)^2 \;=\; 1 + x + \tfrac{1}{2}\,x^2\;.$$

Wir erhalten

$$\int_{-1}^1 p(x)\,\mathrm{d}x \;=\; [x + \tfrac{1}{2}\,x^2 + \tfrac{1}{6}\,x^3]_{x=-1}^1 \;=\; \tfrac{7}{3} \;=\; 2{,}\overline{3}\;.$$

Auf der anderen Seite wird

$$\int_{-1}^1 \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x \;=\; [\mathrm{e}^x]_{x=-1}^1 \;=\; \mathrm{e} - \mathrm{e}^{-1} \;\approx\; 2{,}350\;.$$

Damit weicht die approximative Lösung von $\int_{-1}^1 \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$ mit Hilfe des Taylorpolynoms um weniger als 0,02 vom exakten Wert des Integrals ab.

Aufgabe 107

(1) Es ist $f^{(2k)}(x) = (-1)^k \cos(x)$ und $f^{(2k+1)}(x) = (-1)^{k+1} \sin(x)$ für $k \geqslant 0$. Insbesondere ist $f^{(2k)}(x_0) = (-1)^k \cos(0) = (-1)^k$ und $f^{(2k+1)}(x_0) = (-1)^{k+1} \sin(0) = 0$. Bei Taylorentwicklung um $x_0 = 0$ in $2n$-ter Ordnung verbleibt also

$$\begin{aligned} \cos(x) &= \left(\sum_{k=0}^{n} \tfrac{1}{(2k)!} f^{(2k)}(x_0)(x-x_0)^{2k}\right) + \tfrac{1}{(2n)!} \int_{x_0}^{x} f^{(2n+1)}(t)(x-t)^{2n}\, \mathrm{d}t \\ &= \left(\sum_{k=0}^{n} \tfrac{(-1)^k}{(2k)!}\, x^{2k}\right) + \tfrac{(-1)^{n+1}}{(2n)!} \int_0^x \sin(t)(x-t)^{2n}\, \mathrm{d}t\ . \end{aligned}$$

Für das Restglied gilt, daß

$$\begin{aligned} & |\tfrac{(-1)^{n+1}}{(2n)!} \int_0^x \sin(t)(x-t)^{2n}\, \mathrm{d}t| \\ \overset{\S 6.2}{\leqslant}\ & \tfrac{1}{(2n)!}\, |x| \cdot \max_{t \in [-|x|,+|x|]} |\sin(t)(x-t)^{2n}| \\ \leqslant\ & \tfrac{1}{(2n)!}\, |x| \cdot |2x|^{2n}\ , \end{aligned}$$

wobei das Maximum über einen etwas größeren Bereich als nötig genommen wurde. Dies zeigt, daß das Restglied gegen 0 konvergiert für $n \to \infty$. Also ist

$$\cos(x) \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} \tfrac{(-1)^k}{(2k)!}\, x^{2k} \;=\; \tfrac{x^0}{0!} - \tfrac{x^2}{2!} + \tfrac{x^4}{4!} - \tfrac{x^6}{6!} \pm \cdots \;=\; 1 - \tfrac{x^2}{2} + \tfrac{x^4}{24} - \tfrac{x^6}{720} \pm \cdots$$

für $x \in \mathbf{R}$.

Vgl. Taylorentwicklung von $\sin(x)$ aus Beispiel (3) aus §8.1.

(2) Zunächst sei angemerkt, daß sich der tatsächliche Wert des Integrals zu

$$\int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \cos(x)\, \mathrm{d}x \;=\; [\sin(x)]_{x=-\pi/2}^{+\pi/2} = \sin(+\pi/2) - \sin(-\pi/2) \;=\; 1-(-1) \;=\; 2\ .$$

Mit dem Taylorpolynom in 2-ter Ordnung ergibt sich die Näherung

$$\int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \cos(x)\, \mathrm{d}x \;\approx\; \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} (1 - \tfrac{x^2}{2})\, \mathrm{d}x \;=\; [x - \tfrac{x^3}{6}]_{x=-\pi/2}^{+\pi/2} \;=\; \pi - \tfrac{\pi^3}{24} \;\approx\; 1{,}849664\ .$$

Mit dem Taylorpolynom in 4-ter Ordnung ergibt sich die Näherung

$$\int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \cos(x)\, \mathrm{d}x \;\approx\; \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} (1 - \tfrac{x^2}{2} + \tfrac{x^4}{24})\, \mathrm{d}x \;=\; [x - \tfrac{x^3}{6} + \tfrac{x^5}{120}]_{x=-\pi/2}^{+\pi/2} \;=\; \pi - \tfrac{\pi^3}{24} + \tfrac{\pi^5}{1920} \;\approx\; 2{,}009049711\ .$$

Mit dem Taylorpolynom in 6-ter Ordnung ergibt sich die Näherung

$$\begin{aligned} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \cos(x)\, \mathrm{d}x \;&\approx\; \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} (1 - \tfrac{x^2}{2} + \tfrac{x^4}{24} - \tfrac{x^6}{720})\, \mathrm{d}x \;=\; [x - \tfrac{x^3}{6} + \tfrac{x^5}{120} - \tfrac{x^7}{5040}]_{x=-\pi/2}^{+\pi/2} \\ &= \pi - \tfrac{\pi^3}{24} + \tfrac{\pi^5}{1920} - \tfrac{\pi^7}{322560} \;\approx\; 1{,}99968620280\ . \end{aligned}$$

Aufgabe 108

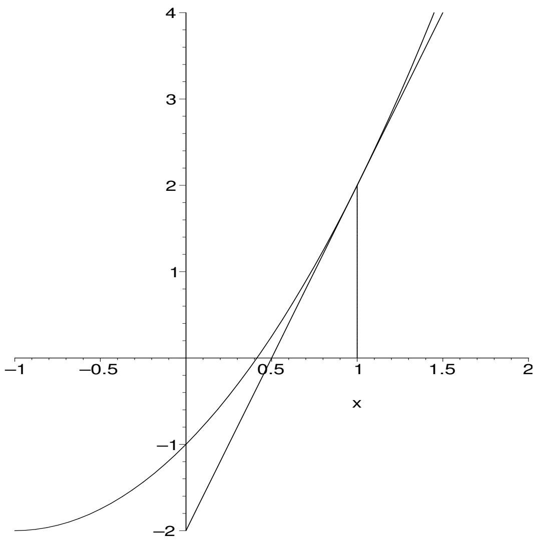
Es ist $f(x) = x^2 + 2x - 1$.

Wir haben $f(0) = -1$ und $f(1) = 2$. Außerdem haben wir $f'(x) = 2x + 2$ und $f''(x) = 2$. Für alle $x \in [0,1]$ ist also $f'(x) > 0$ und $f''(x) > 0$. Somit können wir das Newtonverfahren anwenden.

Es ist $x_1 = 1$.

Es wird $x_2 = x_1 - f(x_1)/f'(x_1) = 1 - 2/4 = 1/2$.

Skizze von f und von diesem ersten Schritt.



Weiterhin gilt $f(1/2) = 1/4$, $f'(1/2) = 3$ und daher $x_3 = x_2 - f(x_2)/f'(x_2) = 1/2 - 1/12 = 5/12 = 0{,}41\overline{6}$.

Das direkte Lösen der quadratischen Gleichung $x^2 + 2x - 1 = 0$ liefert $\xi = \sqrt{2} - 1 \approx 0{,}4142$. Die Differenz von Näherung und tatsächlicher Nullstelle beträgt $|\xi - x_3| \approx 0{,}0024$.

Aufgabe 109

(1) Prüfen wir die Voraussetzungen. Es ist $f(a) = -1/2 < 0$ und $f(b) = 5/4 > 0$. Es ist

$$f'(x) \;=\; 1 - x^{-2} \;>\; 0$$

für $x > 1$, also insbesondere für $x \in [2,4]$. Es ist

$$f''(x) \;=\; 2x^{-3} \;>\; 0$$

für $x > 0$, insbesondere also für $x \in [2,4]$. Also sind die Voraussetzungen für das Newtonverfahren für $f(x)$ auf dem Intervall $[2,4]$ erfüllt.

Werfen wir das Verfahren an. Es ist

$$x_1 \;=\; b \;=\; 4\;.$$

Es ist

$$x_2 \;=\; x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \;=\; x_1 - \frac{x_1 + x_1^{-1} - 3}{1 - x_1^{-2}} \;=\; \frac{8}{3} \;=\; 2{,}\overline{6}\;.$$

Es ist

$$x_3 \;=\; x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} \;=\; x_2 - \frac{x_2 + x_2^{-1} - 3}{1 - x_2^{-2}} \;=\; \frac{144}{55} \;=\; 2{,}6\overline{18}\;.$$

Es ist

$$x_4 \;=\; x_3 - \frac{f(x_3)}{f'(x_3)} \;=\; x_3 - \frac{x_3 + x_3^{-1} - 3}{1 - x_3^{-2}} \;=\; \frac{46368}{17711} \;\approx\; 2{,}6180339901755970\;.$$

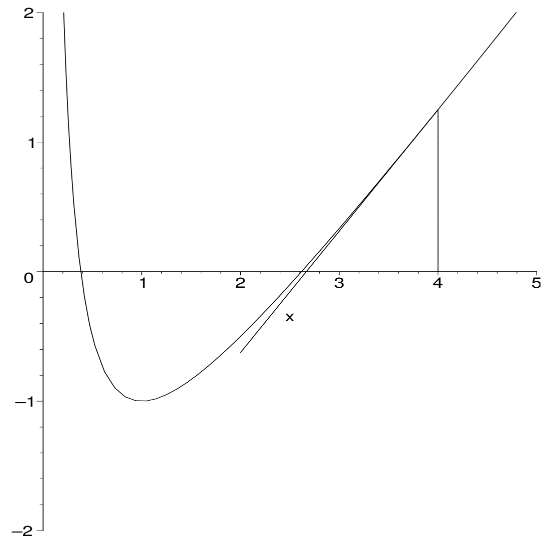
Ist ξ die Nullstelle von $f(x)$ auf $[2,4]$, dann ist

$$|x_4 - \xi| \;\leqslant\; (4-2)^{2^{4-1}} \cdot \left(\tfrac{1}{2}\max_{x\in[2,4]} |f''(x)|\right)^{2^{4-1}-1} \;=\; 2^8 \cdot \left(\tfrac{1}{8}\right)^7 \;\approx\; 1{,}22 \cdot 10^{-4}\;.$$

Hier ist die Bestimmung der Nullstelle noch explizit möglich. Denn $\xi + \xi^{-1} - 3 = 0$ ist für $\xi \neq 0$ äquivalent zu $\xi^2 - 3\xi + 1 = 0$, also zu $\xi = \frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{5}$. In $[2,4]$ liefert das

$$\xi \;=\; \tfrac{3}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{5} \;\approx\; 2{,}61803398874989485\;.$$

Somit ist tatsächlich $|x_4 - \xi| \approx 1{,}43 \cdot 10^{-9}$.



(2) Prüfen wir die Voraussetzungen. Es ist $f(a) = -1 < 0$ und $f(b) = 1 > 0$. Es ist

$$f'(x) \;=\; \frac{1}{3}\,x^{-2/3} \;>\; 0$$

für $x \in \mathbf{R} \smallsetminus \{0\}$. Das verletzt schon die Voraussetzung an $f(x)$, differenzierbar zu sein. Positivität von $f'(x)$ ist dennoch weitgehend gegeben. Ferner ist

$$f''(x) \;=\; -\frac{2}{9}\,x^{-5/3} \;<\; 0$$

für $x \in \mathbf{R} \smallsetminus \{0\}$. Also ist die Voraussetzung an $f''(x)$ für das Newtonverfahren grob verletzt.

Werfen wir dennoch das Verfahren an. Es ist

$$x_1 \;=\; b \;=\; 1\,.$$

Es ist

$$x_2 \;=\; x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \;=\; x_1 - \frac{x^{1/3}}{\frac{1}{3}x_1^{-2/3}} \;=\; x_1 - 3x_1 \;=\; -2x_1 \;=\; -2\,.$$

Es ist

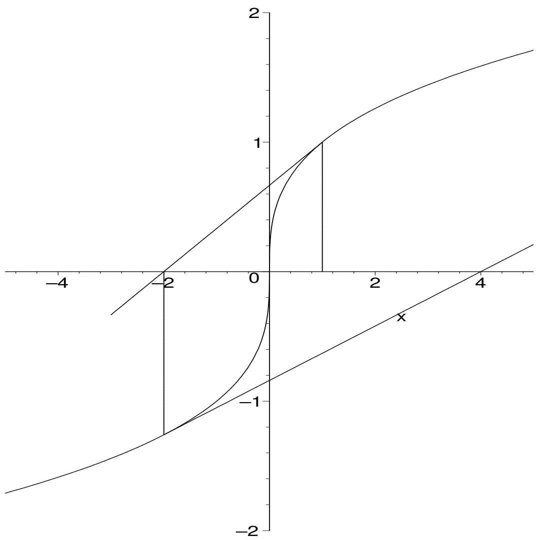
$$x_3 \;=\; -2x_2 \;=\; 4\,.$$

Es ist

$$x_4 \;=\; -2x_3 \;=\; -8\,.$$

Es nähert sich die Folge der x_i nicht der Nullstelle $\xi = 0$. Das darf nicht verwundern, denn die Voraussetzungen für das Newtonverfahren sind nicht erfüllt.

Wir deuten die ersten beiden Schritte eines Versuchs der Durchführung des Newtonverfahrens an.



Wir erkennen den Fehlschlag auch graphisch – die Schnittpunkte der Tangenten mit der x-Achse entfernen sich von der Nullstelle bei $\xi = 0$.

(3) Prüfen wir die Voraussetzungen. Es ist $f(2{,}1) = \mathrm{e}^{2{,}1} - 8{,}4 \approx -0{,}23383 < 0$ und $f(b) = \mathrm{e}^{2{,}2} - 8{,}8 \approx 0{,}22501 > 0$. Es ist

$$f'(x) \;=\; \mathrm{e}^x - 4 \;>\; 0$$

für $x > \ln(4) \approx 1{,}38629$, also insbesondere für $x \in [2{,}1\,,2{,}2]$. Es ist

$$f''(x) \;=\; \mathrm{e}^x \;>\; 0$$

für $x \in \mathbf{R}$, insbesondere also für $x \in [2{,}1\,,2{,}2]$. Also sind die Voraussetzungen für das Newtonverfahren für $f(x)$ auf dem Intervall $[2{,}1\,,2{,}2]$ erfüllt.

Werfen wir das Verfahren an. Es ist

$$x_1 \;=\; b \;=\; 2{,}2\;.$$

Es ist

$$x_2 \;=\; x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \;=\; x_1 - \frac{\mathrm{e}^{x_1} - 4x_1}{\mathrm{e}^{x_1} - 4} \;\approx\; 2{,}1552213144384\;.$$

Es ist

$$x_3 \;=\; x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} \;=\; x_2 - \frac{\mathrm{e}^{x_2} - 4x_2}{\mathrm{e}^{x_2} - 4} \;\approx\; 2{,}1532958296542\;.$$

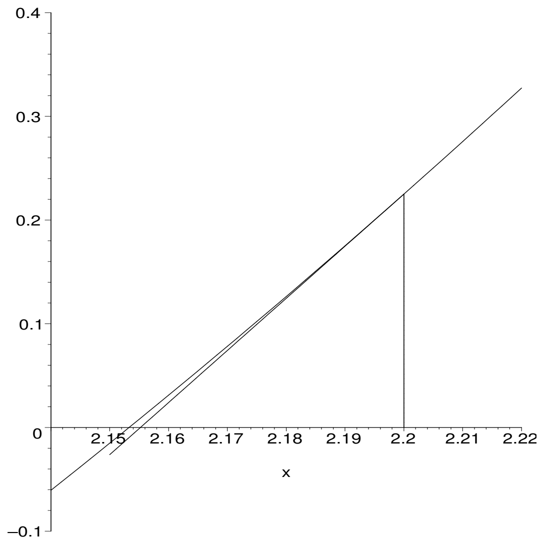
Es ist

$$x_4 \;=\; x_3 - \frac{f(x_3)}{f'(x_3)} \;=\; x_3 - \frac{\mathrm{e}^{x_3} - 4x_3}{\mathrm{e}^{x_3} - 4} \;\approx\; 2{,}1532923641216\;.$$

Ist ξ die Nullstelle von $f(x)$ auf $[2{,}1\,,2{,}2]$, dann ist

$$|x_4 - \xi| \;\leqslant\; (2{,}2 - 2{,}1)^{2^{4-1}} \cdot (\tfrac{1}{2}\max\nolimits_{x\in[2{,}1\,,2{,}2]} |f''(x)|)^{2^{4-1}-1} \;=\; 0{,}1^8 \cdot (\tfrac{1}{2}\,\mathrm{e}^{2{,}2})^7 \;\approx\; 3{,}81 \cdot 10^{-4}\;.$$

Ein weiteres Fortsetzen des Newtonverfahrens zeigt, daß $\xi \approx 2{,}1532923641103496491690991500 9$. Tatsächlich ist also $|x_4 - \xi| \approx 1{,}12 \cdot 10^{-11}$.



Aufgabe 110

Mit $[a,b] = [1{,}7, 1{,}8]$ und $f(x) = x^2 - 3$ erhalten wir $f(a) = 1{,}7^2 - 3 = 2{,}89 - 3 = -0{,}11 < 0$ und $f(b) = 1{,}8^3 = 3{,}24 - 3 = 0{,}24 > 0$. Des weiteren gilt $f'(x) = 2x$ und $f''(x) = 2$. Also ist $f'(x) > 0$ und $f''(x) > 0$ für $x \in [1{,}7, 1{,}8]$. Damit sind die Voraussetzungen für das Newtonverfahren erfüllt.

Die a-priori-Abschätzung gibt $|x_n - \sqrt{3}| \leqslant 0{,}1^{2^{n-1}}$, was bereits für $n = 3$ die Abschätzung

$$|x_3 - \sqrt{3}| \;\leqslant\; 0{,}1^4 \;=\; 10^{-4}$$

liefert.

Wir erhalten $x_1 = b = 1{,}8$, $x_2 = x_1 - \frac{x_1^2-3}{2x_1} = 1{,}7\overline{3}$ und $x_3 = x_2 - \frac{x_2^2-3}{2x_2} \approx 1{,}73\overline{205128}$.

Prüfen wir die a-priori-Abschätzung a posteriori nach, so wird unter Verwendung des Taschenrechnerwerts für $\sqrt{3}$

$$|\sqrt{3} - x_2| \;\approx\; 4{,}7 \cdot 10^{-7} \;\leqslant\; 10^{-4}\;.$$

Aufgabe 111

(1) Sei z.B. $a := 1{,}45$ und $b := 1{,}5$. Dann ist $f(1{,}45) = -0{,}5795 < 0$, $f(1{,}5) = 0{,}0625 > 0$. Für $x \in [1{,}45\,, 1{,}5]$ ist sowohl $f'(x) = 4x^3$ als auch $f''(x) = 12x^2$ positiv. Also können wir das Newtonverfahren anwerfen. Es ist $\xi = 5^{1/4}$ die einzige Nullstelle von $f(x)$ auf $[1{,}45\,, 1{,}5]$. Nach der fünften Iteration erhalten wir laut a-priori-Abschätzung aus dem Lemma aus §8.2 ein x_6 mit

$$\begin{array}{rcl} |x_5 - \xi| & \leqslant & (1{,}5 - 1{,}45)^{2^{6-1}} \cdot (\frac{1}{2}\max_{x\in[1{,}4\,,1{,}5]}|f''(x)|)^{2^{6-1}-1} \\ & = & 0{,}05^{32} \cdot (\frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 1{,}5^2)^{31} \\ & \approx & 2{,}5550 \cdot 10^{-7} \end{array}$$

Werfen wir das Newtonverfahren mit $x_1 = 1{,}5$ und $x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} = x_i - \frac{x_i^4-5}{4x_i^3}$ für $i \geqslant 1$ an, so wird

$$\begin{array}{rcl} x_1 & = & 1{,}5 \\ x_2 & = & 1{,}495\overline{370} \\ x_3 & \approx & 1{,}4953487816887504102873368005014092333656867939892049114045604250872076662643281 \\ x_4 & \approx & 1{,}4953487812212205421311630686373712286496602732989739459157675518291412549615541 \\ x_5 & \approx & 1{,}4953487812212205419111898994140913395411686032616774691034151605036845949393 3405 \\ x_6 & \approx & 1{,}4953487812212205419111898994140913395363459757614706345516593500047921466975 3300 \\ \text{(zum Vergleich:)}\quad 5^{1/4} & \approx & 1{,}4953487812212205419111898994140913395363459757614706345516593500047921466972 9970 \end{array}$$

Wie gesagt, mit unserer a-priori-Abschätzung wissen wir die Übereinstimmung von x_6 und $5^{1/4}$ nur bis zu einer Differenz, welche im Betrag $\leqslant 2{,}5550 \cdot 10^{-7}$ nicht überschreitet, in der Realität ist x_6 schon eine deutlich bessere Näherung.

(2) Sei z.B. $a = 0{,}69$ und $b = 0{,}7$. Dann ist $f(0{,}69) = -0{,}00628 < 0$, $f(0{,}7) = 0{,}01375 > 0$. Für $x \in [0{,}69\,,0{,}7]$ ist sowohl $f'(x) = \mathrm{e}^x$ als auch $f''(x) = \mathrm{e}^x$ positiv. Also können wir das Newtonverfahren anwerfen. Es ist $\xi = \ln(2)$ die einzige Nullstelle von $f(x)$ auf $[0{,}69\,,0{,}7]$. Nach der zweiten Iteration erhalten wir laut a-priori-Abschätzung aus dem Lemma aus §8.2 ein x_3 mit

$$\begin{array}{rcl} |x_3 - \xi| & \leqslant & (0{,}7 - 0{,}69)^{2^{3-1}} \cdot (\frac{1}{2} \max_{x\in[0{,}69\,,0{,}7]} |f''(x)|)^{2^{3-1}-1} \\ & = & 0{,}01^4 \cdot (\frac{1}{2} \cdot \mathrm{e}^{0{,}7})^3 \\ & \approx & 1{,}02 \cdot 10^{-8} \end{array}$$

Werfen wir das Newtonverfahren mit $x_1 = 1{,}5$ und $x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} = x_i - \frac{\mathrm{e}^{x_i}-5}{\mathrm{e}^{x_i}}$ für $i \geqslant 1$ an, so wird

$$\begin{array}{rrcl} & x_1 & = & 0{,}7 \\ & x_2 & \approx & 0{,}6931706075828 \\ & x_3 & \approx & 0{,}6931471808343 \\ \text{(zum Vergleich:)} & \ln(2) & \approx & 0{,}6931471805599 \end{array}$$

Aufgabe 112

Man berechnet

$$\nabla_f(x,y) \;=\; \begin{pmatrix} f_x(x,y) \\ f_y(x,y) \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$$

und

$$\mathrm{H}_f(x,y) \;=\; \begin{pmatrix} f_{xx}(x,y) & f_{xy}(x,y) \\ f_{yx}(x,y) & f_{yy}(x,y) \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

Aufgabe 113

(1) Der Gradient wird

$$\nabla_f(x,y,z) \;=\; \begin{pmatrix} f_x(x,y,z) \\ f_y(x,y,z) \\ f_z(x,y,z) \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} 3x^2+2yz \\ 2xz \\ 2xy \end{pmatrix} .$$

Die Hessematrix wird

$$\mathrm{H}_f(x,y,z) \;=\; \begin{pmatrix} f_{xx}(x,y,z) & f_{xy}(x,y,z) & f_{xz}(x,y,z) \\ f_{yx}(x,y,z) & f_{yy}(x,y,z) & f_{yz}(x,y,z) \\ f_{zx}(x,y,z) & f_{zy}(x,y,z) & f_{zz}(x,y,z) \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} 6x & 2z & 2y \\ 2z & 0 & 2x \\ 2y & 2x & 0 \end{pmatrix} .$$

(2) Der Gradient wird

$$\nabla_f(x,y,z) \;=\; \begin{pmatrix} f_x(x,y,z) \\ f_y(x,y,z) \\ f_z(x,y,z) \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} 4x^3y-2z(1+x)\mathrm{e}^{x+y} \\ x^4-2xz\mathrm{e}^{x+y} \\ -2x\mathrm{e}^{x+y} \end{pmatrix} .$$

Die Hessematrix wird

$$\mathrm{H}_f(x,y,z) \;=\; \begin{pmatrix} f_{xx}(x,y,z) & f_{xy}(x,y,z) & f_{xz}(x,y,z) \\ f_{yx}(x,y,z) & f_{yy}(x,y,z) & f_{yz}(x,y,z) \\ f_{zx}(x,y,z) & f_{zy}(x,y,z) & f_{zz}(x,y,z) \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} 12x^2y-2z(2+x)\mathrm{e}^{x+y} & 4x^3-2(1+x)z\mathrm{e}^{x+y} & -2(1+x)\mathrm{e}^{x+y} \\ 4x^3-2(1+x)z\mathrm{e}^{x+y} & -2xz\mathrm{e}^{x+y} & -2x\mathrm{e}^{x+y} \\ -2(1+x)\mathrm{e}^{x+y} & -2x\mathrm{e}^{x+y} & 0 \end{pmatrix} .$$

Aufgabe 114

Es ist

$$\begin{array}{rcl} f & = & x + x^2y \\ f_x & = & 1 + 2xy \\ f_y & = & x^2 \\ f_{xx} & = & 2y \\ f_{xy} & = & 2x \\ f_{yy} & = & 0\,. \end{array}$$

Somit wird die Taylorentwicklung erster Ordnung um $(1,1)$ zu

$$
\begin{aligned}
f(x,y) &= \overbrace{f(1,1) + \begin{pmatrix} x-1 & y-1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f_x(1,1) \\ f_y(1,1) \end{pmatrix}}^{\text{Taylorpolynom}} + \overbrace{\tfrac{1}{2} \begin{pmatrix} x-1 & y-1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f_{xx}(1+s(x-1),1+s(y-1)) & f_{xy}(1+s(x-1),1+s(y-1)) \\ f_{yx}(1+s(x-1),1+s(y-1)) & f_{yy}(1+s(x-1),1+s(y-1)) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \end{pmatrix}}^{\text{Restglied}} \\
&= \overbrace{2 + \begin{pmatrix} x-1 & y-1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}}^{\text{Taylorpolynom}} + \overbrace{\tfrac{1}{2} \begin{pmatrix} x-1 & y-1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2(1+s(y-1)) & 2(1+s(x-1)) \\ 2(1+s(x-1) & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \end{pmatrix}}^{\text{Restglied}} \\
&= \overbrace{2 + 3(x-1) + (y-1)}^{\text{Taylorpolynom}} + \overbrace{\tfrac{1}{2}(2(1+s(y-1)) \cdot (x-1)^2 + 2 \cdot 2(1+s(x-1)) \cdot (x-1)(y-1) + 0 \cdot (y-1)^2)}^{\text{Restglied}} \\
&= \overbrace{2 + 3(x-1) + (y-1)}^{\text{Taylorpolynom}} + \overbrace{(x-1)^2 + 2(x-1)(y-1) + 3s(x-1)^2(y-1)}^{\text{Restglied}}
\end{aligned}
$$

für ein passendes, uns aber unbekannt bleibendes $s \in [0,1]$.

Der Betrag der Differenz von Funktionswert und Wert des Taylorpolynoms an der Stelle (1,1 , 1,2) ergibt sich zu

$$|f(\,1{,}1\,,\ 1{,}2\,) - (2 + 3 \cdot 0{,}1 + 0{,}2)| \;=\; |(1{,}1 + 1{,}1^2 \cdot 1{,}2) - 2{,}5| \;=\; 0{,}052\;.$$

Aufgabe 115

Es ist

$$
\begin{aligned}
f &= \mathrm{e}^{x-y} \\
f_x &= \mathrm{e}^{x-y} \\
f_y &= -ee^{x-y} \\
f_{xx} &= \mathrm{e}^{x-y} \\
f_{xy} &= -\mathrm{e}^{x-y} \\
f_{yy} &= \mathrm{e}^{x-y}\;.
\end{aligned}
$$

Somit wird die Taylorentwicklung erster Ordnung um $(0,0)$ zu

$$
\begin{aligned}
f(x,y) &= \overbrace{f(0,0) + \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f_x(0,0) \\ f_y(0,0) \end{pmatrix}}^{\text{Taylorpolynom}} + \overbrace{\tfrac{1}{2} \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f_{xx}(sx,sy) & f_{xy}(sx,sy) \\ f_{yx}(sx,sy) & f_{yy}(sx,sy) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}^{\text{Restglied}} \\
&= \overbrace{1 + \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}}^{\text{Taylorpolynom}} + \overbrace{\tfrac{1}{2} \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{sx-sy} & -\mathrm{e}^{sx-sy} \\ -\mathrm{e}^{sx-sy} & \mathrm{e}^{sx-sy} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}^{\text{Restglied}} \\
&= \overbrace{1 + x - y}^{\text{Taylorpolynom}} + \overbrace{\tfrac{1}{2}\,\mathrm{e}^{s(x-y)}(x^2 - 2xy + y^2)}^{\text{Restglied}}
\end{aligned}
$$

für ein passendes, uns aber unbekannt bleibendes $s \in [0,1]$.

Der Betrag der Differenz von Funktionswert und Wert des Taylorpolynoms an der Stelle (0,2 , 0,3) ergibt sich zu

$$|f(\,0{,}2\,,\ 0{,}3\,) - (1 + 0{,}2 - 0{,}3)| \;=\; |\mathrm{e}^{-0{,}1} - 0{,}9| \;\approx\; 0{,}00484\;.$$

Aufgabe 116

(1) Es ist

$$\begin{array}{rcl} f & = & x + x^2 + xy^3 \\ f_x & = & 1 + 2x + y^3 \\ f_y & = & 3xy^2 \\ f_{xx} & = & 2 \\ f_{xy} & = & 3y^2 \\ f_{yy} & = & 6xy \\ f_{xxx} & = & 0 \\ f_{xxy} & = & 0 \\ f_{xyy} & = & 6y \\ f_{yyy} & = & 6x\ . \end{array}$$

Somit wird die Taylorentwicklung erster Ordnung um $(0,0)$ zu

$$\begin{array}{rcl} f(x,y) & = & \overbrace{f(0,0) + (\,x\ y\,) \cdot \begin{pmatrix} f_x(0,0) \\ f_y(0,0) \end{pmatrix}}^{\text{Taylorpolynom}} + \overbrace{\tfrac{1}{2}\,(\,x\ y\,) \cdot \begin{pmatrix} f_{xx}(sx,sy) & f_{xy}(sx,sy) \\ f_{yx}(sx,sy) & f_{yy}(sx,sy) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}^{\text{Restglied}} \\ & = & \overbrace{0 + (\,x\ y\,) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}^{\text{Taylorpolynom}} + \overbrace{\tfrac{1}{2}\,(\,x\ y\,) \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3s^2y^2 \\ 3s^2y^2 & 6s^2xy \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}^{\text{Restglied}} \\ & = & \overbrace{x}^{\text{Taylorpolynom}} + \overbrace{\tfrac{1}{2}(2 \cdot x^2 + 2 \cdot 3s^2y^2 \cdot xy + 6s^2xy \cdot y^2)}^{\text{Restglied}} \\ & = & \overbrace{x}^{\text{Taylorpolynom}} + \overbrace{x^2 + 6s^2xy^3}^{\text{Restglied}} \end{array}$$

für ein passendes, uns aber unbekannt bleibendes $s \in [0,1]$.
Der Betrag der Differenz von Funktionswert und Wert des Taylorpolynoms an der Stelle $(\ 0{,}1\ ,\ 0{,}1\ )$ ergibt sich zu

$$|f(\ 0{,}1\ ,\ 0{,}1\ ) - 0{,}1| \ = \ |(0{,}1 + 0{,}1^2 + 0{,}1 \cdot 0{,}1^3) - 0{,}1| \ = \ 0{,}0101\ .$$

Die Taylorentwicklung zweiter Ordnung um $(0,0)$ wird zu

$$\begin{array}{rcl} f(x,y) & = & \overbrace{f(0,0) + (\,x\ y\,) \cdot \begin{pmatrix} f_x(0,0) \\ f_y(0,0) \end{pmatrix} + \tfrac{1}{2}\,(\,x\ y\,) \cdot \begin{pmatrix} f_{xx}(0,0) & f_{xy}(0,0) \\ f_{yx}(0,0) & f_{yy}(0,0) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}^{\text{Taylorpolynom}} \\ & & + \underbrace{\tfrac{1}{6}(f_{xxx}(sx,sy)x^3 + 3f_{xxy}(sx,sy)x^2y + 3f_{xyy}(sx,sy)xy^2 + f_{yyy}(sx,sy)y^3)}_{\text{Restglied}} \\ & = & \overbrace{0 + (\,x\ y\,) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \tfrac{1}{2}\,(\,x\ y\,) \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}^{\text{Taylorpolynom}} \\ & & + \underbrace{\tfrac{1}{6}(3 \cdot 6sy \cdot xy^2 + 6sx \cdot y^3)}_{\text{Restglied}} \\ & = & \overbrace{x + x^2}^{\text{Taylorpolynom}} \\ & & + \ \underbrace{4sxy^3}_{\text{Restglied}} \end{array}$$

für ein passendes, uns aber unbekannt bleibendes $s \in [0,1]$.

Der Betrag der Differenz von Funktionswert und Wert des Taylorpolynoms an der Stelle (0,1 , 0,1) ergibt sich zu

$$|f(\ 0{,}1\ ,\ 0{,}1\ ) - (0{,}1 + 0{,}1^2)| \ = \ |(0{,}1 + 0{,}1^2 + 0{,}1 \cdot 0{,}1^3) - 0{,}11| \ = \ 0{,}0001\ .$$

(2) Die benötigten partiellen Ableitungen können wir aus (1) entnehmen.
Die Taylorentwicklung erster Ordnung um $(1,-1)$ wird zu

$$\begin{aligned}
& f(x,y) \\
= \quad & \overbrace{f(1,-1) + \begin{pmatrix} x-1 & y+1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f_x(1,-1) \\ f_y(1,-1) \end{pmatrix}}^{\text{Taylorpolynom}} + \overbrace{\tfrac{1}{2} \begin{pmatrix} x-1 & y+1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f_{xx}(1+s(x-1),-1+s(y+1)) & f_{xy}(1+s(x-1),-1+s(y+1)) \\ f_{yx}(1+s(x-1),-1+s(y+1)) & f_{yy}(1+s(x-1),-1+s(y+1)) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x-1 \\ y+1 \end{pmatrix}}^{\text{Restglied}} \\
= \quad & \overbrace{1 + \begin{pmatrix} x-1 & y+1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}}^{\text{Taylorpolynom}} + \overbrace{\tfrac{1}{2} \begin{pmatrix} x-1 & y+1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3(-1+s(y+1))^2 \\ 3(-1+s(y+1))^2 & 6(1+s(x-1))(-1+s(y+1) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x-1 \\ y+1 \end{pmatrix}}^{\text{Restglied}} \\
= \quad & \overbrace{1 + 2(x-1) + 3(y+1)}^{\text{Taylorpolynom}} \\
& + \overbrace{\tfrac{1}{2}(2 \cdot (x-1)^2 + 2 \cdot 3(-1+s(y+1))^2 \cdot (x-1)(y+1) + 6(1+s(x-1))(-1+s(y+1) \cdot (y+1)^2)}^{\text{Restglied}}
\end{aligned}$$

für ein passendes, uns aber unbekannt bleibendes $s \in [0,1]$.
Der Betrag der Differenz von Funktionswert und Wert des Taylorpolynoms an der Stelle (1,1 , −0,9) ergibt sich zu

$$|f(\ 1{,}1\ ,\ -0{,}9\ ) - (1 + 2 \cdot 0{,}1 + 3 \cdot 0{,}1)| \ = \ |(1{,}1 + 1{,}1^2 + 1{,}1 \cdot (-0{,}9)^3) - 1{,}5| \ = \ 0{,}0081\ .$$

Die Taylorentwicklung zweiter Ordnung um $(1,-1)$ wird zu

$$\begin{aligned}
f(x,y) \quad = \quad & \overbrace{f(1,-1) + \begin{pmatrix} x-1 & y+1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f_x(1,-1) \\ f_y(1,-1) \end{pmatrix} + \tfrac{1}{2} \begin{pmatrix} x-1 & y+1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f_{xx}(1,-1) & f_{xy}(1,-1) \\ f_{yx}(1,-1) & f_{yy}(1,-1) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x-1 \\ y+1 \end{pmatrix}}^{\text{Taylorpolynom}} \\
& \underbrace{\begin{aligned} & +\tfrac{1}{6}(f_{xxx}(1+s(x-1),-1+s(y+1)) \cdot (x-1)^3 \\ & \quad +3 \cdot f_{xxy}(1+s(x-1),-1+s(y+1)) \cdot (x-1)^2(y+1) \\ & \quad +3 \cdot f_{xyy}(1+s(x-1),-1+s(y+1)) \cdot (x-1)(y+1)^2 \\ & \quad +f_{yyy}(1+s(x-1),-1+s(y+1)) \cdot (y+1)^3) \end{aligned}}_{\text{Restglied}} \\
= \quad & \overbrace{1 + \begin{pmatrix} x-1 & y+1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \tfrac{1}{2} \begin{pmatrix} x-1 & y+1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x-1 \\ y+1 \end{pmatrix}}^{\text{Taylorpolynom}} \\
& \underbrace{\begin{aligned} & +\tfrac{1}{6}(0 \\ & \quad +3 \cdot 0 \\ & \quad +3 \cdot 6(-1+s(y+1)) \cdot (x-1)(y+1)^2 \\ & \quad +6(1+s(x-1)) \cdot (y+1)^3) \end{aligned}}_{\text{Restglied}} \\
= \quad & \overbrace{1 + 2(x-1) + 3(y+1) + (x-1)^2 + 3(x-1)(y+1) - 3(y+1)^2}^{\text{Taylorpolynom}} \\
& \underbrace{+3(-1+s(y+1))(x-1)(y+1)^2 + (1+s(x-1))(y+1)^3}_{\text{Restglied}}
\end{aligned}$$

für ein passendes, uns aber unbekannt bleibendes $s \in [0,1]$.

Der Betrag der Differenz von Funktionswert und Wert des Taylorpolynoms an der Stelle (1,1 , −0,9) ergibt sich zu

$$|f(\,1{,}1\,,\ -0{,}9\,) - (1{+}2{\cdot}0{,}1{+}3{\cdot}0{,}1{+}0{,}1^2{+}3{\cdot}0{,}1{\cdot}0{,}1{-}3{\cdot}0{,}1^2)| \;=\; |(1{,}1{+}1{,}1^2{+}1{,}1{\cdot}(-0{,}9)^3) - 1{,}51| \;=\; 0{,}0019\ .$$

(3) Es ist

$$\begin{array}{rcr} f &=& \cos(x-2y) \\ f_x &=& -\sin(x-2y) \\ f_y &=& 2\sin(x-2y) \\ f_{xx} &=& -\cos(x-2y) \\ f_{xy} &=& 2\cos(x-2y) \\ f_{yy} &=& -4\cos(x-2y) \\ f_{xxx} &=& \sin(x-2y) \\ f_{xxy} &=& -2\sin(x-2y) \\ f_{xyy} &=& 4\sin(x-2y) \\ f_{yyy} &=& -8\sin(x-2y)\ . \end{array}$$

Somit wird die Taylorentwicklung erster Ordnung um $(0,0)$ zu

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \overbrace{f(0,0) + (\,x\ y\,)\cdot\begin{pmatrix} f_x(0,0) \\ f_y(0,0)\end{pmatrix}}^{\text{Taylorpolynom}} + \overbrace{\tfrac{1}{2}\,(\,x\ y\,)\cdot\begin{pmatrix} f_{xx}(sx,sy) & f_{xy}(sx,sy) \\ f_{yx}(sx,sy) & f_{yy}(sx,sy)\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y\end{pmatrix}}^{\text{Restglied}} \\ &= \overbrace{1 + (\,x\ y\,)\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 0\end{pmatrix}}^{\text{Taylorpolynom}} + \overbrace{\tfrac{1}{2}\,(\,x\ y\,)\cdot\begin{pmatrix} -\cos(s(x-2y)) & 2\cos(s(x-2y)) \\ 2\cos(s(x-2y)) & -4\cos(s(x-2y))\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y\end{pmatrix}}^{\text{Restglied}} \\ &= \overbrace{1}^{\text{Taylorpolynom}} + \overbrace{\tfrac{1}{2}\cos(s(x-2y))(-x^2+4xy-4y^2)}^{\text{Restglied}} \end{aligned}$$

für ein passendes, uns aber unbekannt bleibendes $s \in [0,1]$.
Der Betrag der Differenz von Funktionswert und Wert des Taylorpolynoms an der Stelle (0,1 , 0,1) ergibt sich zu

$$|f(\,0{,}1\,,\ 0{,}1\,) - 1| \;=\; |\cos(0{,}1 - 2\cdot 0{,}1) - 1| \;\approx\; 4{,}996\cdot 10^{-3}\ .$$

Die Taylorentwicklung zweiter Ordnung um $(0,0)$ ergibt sich zu

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \overbrace{f(0,0) + (\,x\ y\,)\cdot\begin{pmatrix} f_x(0,0) \\ f_y(0,0)\end{pmatrix} + \tfrac{1}{2}\,(\,x\ y\,)\cdot\begin{pmatrix} f_{xx}(0,0) & f_{xy}(0,0) \\ f_{yx}(0,0) & f_{yy}(0,0)\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y\end{pmatrix}}^{\text{Taylorpolynom}} \\ &\quad + \underbrace{\tfrac{1}{6}(f_{xxx}(sx,sy)x^3 + 3f_{xxy}(sx,sy)x^2y + 3f_{xyy}(sx,sy)xy^2 + f_{yyy}(sx,sy)y^3)}_{\text{Restglied}} \\ &= \overbrace{1 + (\,x\ y\,)\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 0\end{pmatrix} + \tfrac{1}{2}\,(\,x\ y\,)\cdot\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y\end{pmatrix}}^{\text{Taylorpolynom}} \\ &\quad + \underbrace{\tfrac{1}{6}(\sin(s(x-2y))x^3 - 6\sin(s(x-2y))x^2y + 12\sin(s(x-2y))xy^2 - 8\sin(s(x-2y))y^3)}_{\text{Restglied}} \\ &= \overbrace{1 - \tfrac{1}{2}x^2 + 2xy - 2y^2}^{\text{Taylorpolynom}} \\ &\quad + \underbrace{\tfrac{1}{6}\sin(s(x-2y))(x^3 - 6x^2y + 12xy^2 - 8y^3)}_{\text{Restglied}} \end{aligned}$$

für ein passendes, uns aber unbekannt bleibendes $s \in [0,1]$.

Der Betrag der Differenz von Funktionswert und Wert des Taylorpolynoms an der Stelle (0,1 , 0,1) ergibt sich zu

$$|f(\,0{,}1\ ,\ 0{,}1\,) - (1 - \tfrac{1}{2}\,0{,}1^2 + 2\cdot 0{,}1\cdot 0{,}1 - 2\cdot 0{,}1^2)| \;=\; |\cos(0{,}1 - 2\cdot 0{,}1) - 0{,}995| \;\approx\; 4{,}165\cdot 10^{-6}\ .$$

Aufgabe 117

Es ist

$$\begin{array}{rcl} f & = & \cos(x)\mathrm{e}^{yz} \\ f_x & = & -\sin(x)\mathrm{e}^{yz} \\ f_y & = & z\cos(x)\mathrm{e}^{yz} \\ f_z & = & y\cos(x)\mathrm{e}^{yz} \\ f_{xx} & = & -\cos(x)\mathrm{e}^{yz} \\ f_{xy} & = & -z\sin(x)\mathrm{e}^{yz} \\ f_{xz} & = & -y\sin(x)\mathrm{e}^{yz} \\ f_{yy} & = & z^2\cos(x)\mathrm{e}^{yz} \\ f_{yz} & = & \cos(x)\mathrm{e}^{yz} + yz\cos(x)\mathrm{e}^{yz} \;=\; (1+yz)\cos(x)\mathrm{e}^{yz} \\ f_{zz} & = & y^2\cos(x)\mathrm{e}^{yz} \end{array}$$

Das Taylorpolynom erster Ordnung um $(0,0,0)$ ergibt sich zu

$$\begin{array}{rcl} f(x,y,z) & = & f(0,0,0) + \left(\begin{smallmatrix} x & y & z \end{smallmatrix}\right)\begin{pmatrix} f_x(0,0,0) \\ f_y(0,0,0) \\ f_z(0,0,0) \end{pmatrix} \\ & = & 1 + \left(\begin{smallmatrix} x & y & z \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \\ & = & 1\ . \end{array}$$

Der Betrag der Differenz von Funktionswert und Wert des Taylorpolynoms an der Stelle (0,1 , 0,1 , −0,1) ergibt sich zu

$$|f(\,0{,}1\ ,\ 0{,}1\ ,\ -0{,}1\,) - 1| \;=\; |\cos(0{,}1)\,\mathrm{e}^{0{,}1\cdot(-0{,}1)} - 1| \;\approx\; 1{,}4896\cdot 10^{-2}\ .$$

Das Taylorpolynom zweiter Ordnung um $(0,0,0)$ ergibt sich zu

$$\begin{array}{rcl} f(x,y,z) & = & f(0,0,0) + \left(\begin{smallmatrix} x & y & z \end{smallmatrix}\right)\begin{pmatrix} f_x(0,0,0) \\ f_y(0,0,0) \\ f_z(0,0,0) \end{pmatrix} + \tfrac{1}{2}\left(\begin{smallmatrix} x & y & z \end{smallmatrix}\right)\begin{pmatrix} f_{xx}(0,0,0) & f_{xy}(0,0,0) & f_{xz}(0,0,0) \\ f_{yx}(0,0,0) & f_{yy}(0,0,0) & f_{yz}(0,0,0) \\ f_{zx}(0,0,0) & f_{zy}(0,0,0) & f_{zz}(0,0,0) \end{pmatrix}\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) \\ & = & 1 + \left(\begin{smallmatrix} x & y & z \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) + \tfrac{1}{2}\left(\begin{smallmatrix} x & y & z \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) \\ & = & 1 - \tfrac{1}{2}\,x^2 + yz\ . \end{array}$$

Der Betrag der Differenz von Funktionswert und Wert des Taylorpolynoms an der Stelle (0,1 , 0,1 , −0,1) ergibt sich zu

$$|f(\,0{,}1\ ,\ 0{,}1\ ,\ -0{,}1\,) - (1 - \tfrac{1}{2}\,0{,}1^2 + 0{,}1\cdot(-0{,}1))| \;=\; |\cos(0{,}1)\,\mathrm{e}^{0{,}1\cdot(-0{,}1)} - 0{,}985| \;\approx\; 1{,}0371\cdot 10^{-4}\ .$$

Aufgabe 118

Es ist $\det\left(\begin{smallmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 4 \end{smallmatrix}\right) = 3\cdot 4 - 2\cdot 7 = -2$; vgl. §9.1, Bemerkung, (1).

Für die zweite Determinante formen wir um.

$$\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{smallmatrix}\right) \;\rightsquigarrow\; \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -8 \end{smallmatrix}\right)\ .$$

Wegen der entstandenen Nullzeile können wir auf $\det\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{smallmatrix}\right) = 0$ schließen.

Aufgabe 119

(1) Es ist $\det\left(\,3\,\right) = 3$; vgl. §9.1, Bemerkung, (1).

(2) Es ist $\det\left(\begin{smallmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 2 \end{smallmatrix}\right) = 2 \cdot 2 - 6 \cdot 1 = -2$; vgl. §9.1, Bemerkung, (1).

(3) Formen wir um.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \overset{-1}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \overset{-2}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Also ist $\det\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (-1) \cdot (-2) = 2.$

(4) Formen wir um.

$$\begin{pmatrix} 12 & 13 & 14 \\ 4 & 5 & 6 \\ 8 & 9 & 10 \end{pmatrix} \overset{-4}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 5/4 & 3/2 \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \overset{1}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Also ist $\det\begin{pmatrix} 12 & 13 & 14 \\ 4 & 5 & 6 \\ 8 & 9 & 10 \end{pmatrix} = 0.$

Mit Sarrus wäre das vergleichsweise mühevoll und fehleranfällig.

(5) Formen wir um.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \overset{-1}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Also wird $\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = -1.$

(6) Formen wir um.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \overset{-1}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \overset{-1}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & -6 \end{pmatrix} \overset{-1}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \overset{-3}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \overset{-4}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Also wird $\det\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-3) \cdot (-4) = -12.$

Aufgabe 120

Es wird $\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 8 & 8 \\ 0 & 5 & 9 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 2 & 8 \end{pmatrix} = \det\left(\,1\,\right) \cdot \det\left(\,5\,\right) \cdot \det\left(\begin{smallmatrix} 1 & 8 \\ 2 & 8 \end{smallmatrix}\right) = 1 \cdot 5 \cdot (1 \cdot 8 - 8 \cdot 2) = -40.$

Es wird $\det(\left(\begin{smallmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{smallmatrix}\right)^4) = \det(\left(\begin{smallmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{smallmatrix}\right))^4 = (3 \cdot 1 - 2 \cdot 2)^4 = (-1)^4 = 1.$

Aufgabe 121

Wir wollen §9.1, Bemerkung, (2, 3.a) anwenden.

(1) Es wird

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 8 & 7 \\ 2 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \;=\; \det\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{smallmatrix}\right) \cdot \left(\begin{smallmatrix} 6 & 5 \\ 2 & 4 \end{smallmatrix}\right) \;=\; (1 \cdot 1 - 2 \cdot 2) \cdot (6 \cdot 4 - 5 \cdot 2) \;=\; -42\,.$$

(2) Es wird

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 7 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \;=\; \det\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{smallmatrix}\right) \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 \;=\; (1 \cdot 1 - 1 \cdot 2) \cdot 4 \;=\; -4\,.$$

Aufgabe 122

(1) *Mit Sarrus.* Da $A = -A^{\mathrm{t}}$, können wir $A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ -\alpha & 0 & \gamma \\ -\beta & -\gamma & 0 \end{smallmatrix}\right)$ schreiben. Sarrus gibt als Determinante

$$\det A \;=\; \det\left(\begin{smallmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ -\alpha & 0 & \gamma \\ -\beta & -\gamma & 0 \end{smallmatrix}\right) \;=\; 0 + \alpha\gamma(-\beta) + \beta(-\alpha)(-\gamma) - 0 - 0 - 0 \;=\; 0\,;$$

vgl. §9.1, Bemerkung, (1).

Ohne Sarrus. Es wird $\det A = \det(-A^{\mathrm{t}}) = (-1)^3 \det(A^{\mathrm{t}}) = (-1)^3 \det A = -\det A$, da im zweiten Schritt dreimal der Faktor -1 aus einer Zeile herausgezogen wurde; vgl. §9.1, Bemerkung, (4, 3.a). Also ist $2 \det A = 0$, und folglich $\det A = 0$.

(2) Da $\mathrm{E}_n = A \cdot A^{-1}$ ist, wird $1 = \det(\mathrm{E}_n) = \det(A \cdot A^{-1}) = \det(A) \cdot \det(A^{-1})$; vgl. §9.1, Bemerkung, (3.b, 3.c). Es folgt $\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}$.

Aufgabe 123

(1) Ist eine Matrix positiv definit, so sind alle Hauptdiagonaleinträge positiv. Ist eine Matrix negativ definit, so sind alle Hauptdiagonaleinträge negativ. Vgl. §9.2, Bemerkung, (2).

Da $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{smallmatrix}\right)$ über einen positiven und einen negativen Hauptdiagonaleintrag verfügt, ist A weder positiv noch negativ definit.

Dies kann man durch Berechnung der Hauptminoren nochmals bestätigen. In der Tat ist $\mathrm{M}_1(A) = \det\left(\,1\,\right) = 1$ und $\mathrm{M}_2(A) = \det\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{smallmatrix}\right) = -5$.

(2) Es wird $\mathrm{M}_1(A) = \det\left(\,3\,\right) = 3$, $\mathrm{M}_2(A) = \det\left(\begin{smallmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{smallmatrix}\right) = 3 \cdot 3 = 9$ und $\mathrm{M}_3(A) = \det\left(\begin{smallmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{smallmatrix}\right) = 24$. Also ist A positiv definit.

(3) Da es sich bei A um die Negative der in (2) als positiv definit erkannten Matrix handelt, ist A negativ definit. Vgl. §9.2, Bemerkung, (1).

Dies kann man durch Berechnung der Hauptminoren nochmals bestätigen. In der Tat ist $\mathrm{M}_1(A) = \det\left(\,-3\,\right) = -3$, $\mathrm{M}_2(A) = \det\left(\begin{smallmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -3 \end{smallmatrix}\right) = (-3) \cdot (-3) = 9$ und $\mathrm{M}_3(A) = \det\left(\begin{smallmatrix} -3 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & 0 \\ -1 & 0 & -3 \end{smallmatrix}\right) = -24$.

Aufgabe 124

Wir wenden das Hauptminorenkriterium an; vgl. Satz aus 9.2.

(1) Es wird $\mathrm{M}_1(A) = \det\left(\,1\,\right) = 1$ und $\mathrm{M}_2(A) = \det\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right) = 0$. Also ist A weder positiv noch negativ definit.

(2) Es wird $\mathrm{M}_1(A) = \det\left(\,-3\,\right) = -3$, $\mathrm{M}_2(A) = \det\left(\begin{smallmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{smallmatrix}\right) = 8$ und $\mathrm{M}_3(A) = \det\left(\begin{smallmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{smallmatrix}\right) = -16$. Also ist A negativ definit.

(3) Es wird $\mathrm{M}_1(A) = \det\left(\,-3\,\right) = -3$, $\mathrm{M}_2(A) = \det\left(\begin{smallmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -3 \end{smallmatrix}\right) = 5$ und $\mathrm{M}_3(A) = \det\left(\begin{smallmatrix} -3 & 2 & 2 \\ 2 & -3 & 2 \\ 2 & 2 & -3 \end{smallmatrix}\right) = 25$. Also ist A weder positiv noch negativ definit.

(4) Da der dritte Hauptdiagonaleintrag von $A = \left(\begin{smallmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ gleich 0 ist, ist A weder positiv noch negativ definit; vgl. §9.2, Bemerkung, (2).

Die Hauptminoren müssen nicht ausgerechnet werden. Nur zur Information, sie betragen $\mathrm{M}_1(A) = -3$, $\mathrm{M}_2(A) = 8$ und $\mathrm{M}_3(A) = 8$; was nochmals bestätigt, daß A weder positiv noch negativ definit ist.

(5) Es wird $\mathrm{M}_1(A) = \det\left(\,1\,\right) = 1$, $\mathrm{M}_2(A) = \det\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{smallmatrix}\right) = 2$, $\mathrm{M}_3(A) = \det\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{smallmatrix}\right) = 2$ und $\mathrm{M}_4(A) = \det\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{smallmatrix}\right) = 1$. Also ist A positiv definit.

(6) Es wird $\mathrm{M}_1(A) = \det\left(1\right) = 1$, $\mathrm{M}_2(A) = \det\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right) = 1$, $\mathrm{M}_3(A) = \det\left(\begin{smallmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&1&2\end{smallmatrix}\right) = 1$ und $\mathrm{M}_4(A) = \det\left(\begin{smallmatrix}1&0&0&1\\0&1&1&1\\0&1&2&0\\1&1&0&\alpha\end{smallmatrix}\right) = \alpha - 3$.

Falls $\alpha > 3$ ist, ist A positiv definit.

Falls $\alpha \leqslant 3$ ist, ist A weder positiv noch negativ definit.

Aufgabe 125

(1) Ja. Denn für $x \in \mathbf{R}^{n\times 1} \smallsetminus \{0\}$ folgt aus $x^{\mathrm{t}}Ax > 0$ und $x^{\mathrm{t}}Bx > 0$, daß $x^{\mathrm{t}}(A+B)x = x^{\mathrm{t}}Ax + x^{\mathrm{t}}Bx > 0$.

(2) Nein. Denn z.B. für $A = \left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&0\end{smallmatrix}\right)$ und $B = \left(\begin{smallmatrix}0&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)$ ist $\det(A+B) = \det\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right) = 1$, aber $\det(A)+\det(B) = \det\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&0\end{smallmatrix}\right) + \det\left(\begin{smallmatrix}0&0\\0&1\end{smallmatrix}\right) = 0 + 0 = 0$.

(3) Ja. Denn schreiben wir $A = (\alpha_{i,j})_{i,j} \in \mathbf{R}^{3\times 3}$, so wird

$$\begin{array}{rl} & x_1^{\mathrm{t}}(x_2 \times x_3) \\ = & \left(\begin{smallmatrix}\alpha_{1,1} & \alpha_{2,1} & \alpha_{3,1}\end{smallmatrix}\right) \left(\begin{smallmatrix}\alpha_{2,2}\alpha_{3,3}-\alpha_{3,2}\alpha_{2,3}\\ \alpha_{3,2}\alpha_{1,3}-\alpha_{1,2}\alpha_{3,3}\\ \alpha_{1,2}\alpha_{2,3}-\alpha_{2,2}\alpha_{1,3}\end{smallmatrix}\right) \\ = & \alpha_{1,1}\alpha_{2,2}\alpha_{3,3} - \alpha_{1,1}\alpha_{3,2}\alpha_{2,3} + \alpha_{2,1}\alpha_{3,2}\alpha_{1,3} - \alpha_{2,1}\alpha_{1,2}\alpha_{3,3} + \alpha_{3,1}\alpha_{1,2}\alpha_{2,3} - \alpha_{3,1}\alpha_{2,2}\alpha_{1,3}\,; \end{array}$$

vgl. §5.2.3. Dies ist aber gerade die Formel von Sarrus für $\det(A)$; vgl. §9.1, Bemerkung, (1).

Vgl. auch §5.2.3, zweite Bemerkung, (4). Es ist mithin $|\det(A)|$ der Rauminhalt des von den Spalten von A aufgespannten Parallelepipeds.

(4) Ja. Denn es ist insbesondere $(-1)^n\mathrm{M}_n(A) = (-1)^n \det(A) > 0$, und also $\det(A) \neq 0$. Das aber liefert mit Bemerkung, (5), aus §9.1, daß die Spalten von A ein linear unabhängiges Tupel bilden. Nach der letzten Bemerkung in §5.4.2 bedeutet dies gerade, daß die Zeilenstufenform von A genau n Nichtnullzeilen enthält. Die einzige Matrix in $\mathbf{R}^{n\times n}$ in Zeilenstufenform mit n Nichtnullzeilen ist aber die Einheitsmatrix. Gemäß Algorithmus ist A daher invertierbar; vgl. Bemerkung in §5.3.

Aufgabe 126

(1) Es ist

$$\begin{array}{rclcl} f_x &=& 4x^3 - 4xy + 4x &=& 4x(x^2 - y + 1) \\ f_y &=& -2x^2 + 2y &=& -2(x^2 - y) \\ f_{xx} &=& 12x^2 - 4y + 4 && \\ f_{xy} &=& -4x && \\ f_{yy} &=& 2 && \end{array}$$

Es ist $(x_0\,, y_0)$ eine Flachstelle von f genau dann, wenn $f_x(x_0\,, y_0) = 4x_0(x_0^2 - y_0) = 0$ und $f_y(x_0\,, y_0) = -2(x_0^2 - y_0) = 0$.

Zweiteres liefert notwendig $y_0 = x_0^2$. Dies eingesetzt in ersteres gibt $0 = 4x_0(x_0^2 - y_0 - 1) = 4x_0$. Es folgt $x_0 = 0$. Zweiteres gibt $y_0 = 0$.

Umgekehrt ist in der Tat $f_x(0,0) = 0$ und $f_y(0,0)$.

Also ist $(0,0)$ die einzige Flachstelle von f.

An dieser Stelle $(0,0)$ ist $f_{xx} = 4 > 0$ und $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = 8 > 0$. Also ist $(0,0)$ eine lokale Minimalstelle.

(2) Die Rechnungen aus (1) können wir auch hier verwenden.

Der alte und der neue Flachstellenbegriff stimmen überein – es ist $(x_0\,, y_0)$ genau dann eine Flachstelle, wenn dort $\nabla_f = \left(\begin{smallmatrix}f_x\\f_y\end{smallmatrix}\right)$ verschwindet.

Somit ist weiterhin $(0,0)$ die einzige Flachstelle von f.

Um $(0,0)$ auf Extremstelle zu untersuchen, müssen wir die dortige Hessematrix

$$\mathrm{H}_f(0,0) \;=\; \left(\begin{smallmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{smallmatrix}\right) \;=\; \left(\begin{smallmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{smallmatrix}\right)$$

auf Definitheit untersuchen.

Das Hauptminorenkriterium liefert wegen $\mathrm{M}_1(\left(\begin{smallmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{smallmatrix}\right)) = \det\left(\begin{smallmatrix} 4 \end{smallmatrix}\right) = 4 > 0$ und wegen $\mathrm{M}_2(\left(\begin{smallmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{smallmatrix}\right)) = \det\left(\begin{smallmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{smallmatrix}\right) = 4 \cdot 2 = 8 > 0$, daß die Hessematrix bei $(0,0)$ positiv definit ist, dort also eine lokale Minimalstelle vorliegt. Dies bestätigt das Resultat aus (1).

Aber was wurde dazu eigentlich gerechnet?

Allgemein ist $\mathrm{M}_1(\left(\begin{smallmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{smallmatrix}\right)) = f_{xx}$ und $\mathrm{M}_2(\left(\begin{smallmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{smallmatrix}\right)) = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2$.

Das alte Kriterium aus §3.4 kann also an einer Flachstelle $(x_0\,,y_0)$ wie folgt gelesen werden.

Ist bei $(x_0\,,y_0)$ sowohl $\mathrm{M}_1(\left(\begin{smallmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{smallmatrix}\right)) = f_{xx} > 0$ als auch $\mathrm{M}_2(\left(\begin{smallmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{smallmatrix}\right)) = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 > 0$, dann liegt bei $(x_0\,,y_0)$ eine lokale Minimalstelle vor. In anderen Worten, ist bei $(x_0\,,y_0)$ die Hessematrix positiv definit, dann liegt dort eine lokale Minimalstelle vor.

Ist bei $(x_0\,,y_0)$ zum einen $\mathrm{M}_1(\left(\begin{smallmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{smallmatrix}\right)) = f_{xx} < 0$, zum anderen aber $\mathrm{M}_2(\left(\begin{smallmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{smallmatrix}\right)) = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 > 0$, dann liegt bei $(x_0\,,y_0)$ eine lokale Maximalstelle vor. In anderen Worten, ist bei $(x_0\,,y_0)$ die Hessematrix negativ definit, dann liegt dort eine lokale Minimalstelle vor.

Somit stimmen das alte und neue Kriterium für lokale Minimalstelle resp. lokale Maximalstelle (das neue noch gekoppelt mit dem Hauptminorenkriterium) genau überein.

Ist bei $(x_0\,,y_0)$ ferner $\det\left(\begin{smallmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{smallmatrix}\right) = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 \neq 0$, aber $\left(\begin{smallmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{smallmatrix}\right)$ dort weder positiv noch negativ definit, so liegt nach neuem Kriterium eine Sattelstelle vor. Dies schließt den im alten Kriterium behandelten Fall, daß $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 < 0$ ist, ein. Diesenfalls ist das neue Kriterium also etwas besser als das alte.

Aufgabe 127

Es ist $\nabla_f(x,y,z) = \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{pmatrix} = \left(\begin{smallmatrix} 2x+y+z \\ x+2y+z \\ x+y+2z \end{smallmatrix}\right)$. Die Einträge im Gradienten sind zufällig linear in x, y und z, was wir uns zunutze machen können.

Es ist $(x_0\,,y_0\,,z_0)$ nämlich genau dann eine Flachstelle, wenn $\left(\begin{smallmatrix} 2&1&1 \\ 1&2&1 \\ 1&1&2 \end{smallmatrix}\right) \left(\begin{smallmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{smallmatrix}\right) = 0$ ist.

Die Zeilenstufenform dieser Matrix ergibt sich zu

$$\left(\begin{smallmatrix} 2&1&1 \\ 1&2&1 \\ 1&1&2 \end{smallmatrix}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{smallmatrix} 1&1&2 \\ 0&-1&-3 \\ 0&1&-1 \end{smallmatrix}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{smallmatrix} 1&0&3 \\ 0&1&-1 \\ 0&0&-4 \end{smallmatrix}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{smallmatrix} 1&0&0 \\ 0&1&0 \\ 0&0&1 \end{smallmatrix}\right)$$

Also ist $(x_0\,,y_0\,,z_0) = (0,0,0)$ die einzige Flachstelle von f.

Untersuchen wir diese auf Extremstelle.

Die Hessematrix ergibt sich zu $\mathrm{H}_f(x,y,z) = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{pmatrix} = \left(\begin{smallmatrix} 2&1&1 \\ 1&2&1 \\ 1&1&2 \end{smallmatrix}\right)$, zufällig konstant in x, y und z.

Es ist $\mathrm{M}_1(\mathrm{H}_f(0,0,0)) = \det\left(\begin{smallmatrix} 2 \end{smallmatrix}\right) = 2 > 0$.

Es ist $\mathrm{M}_2(\mathrm{H}_f(0,0,0)) = \det\left(\begin{smallmatrix} 2&1 \\ 1&2 \end{smallmatrix}\right) = 2 \cdot 2 - 1 \cdot 1 = 3 > 0$.

Es ist $\mathrm{M}_3(\mathrm{H}_f(0,0,0)) = \det\left(\begin{smallmatrix} 2&1&1 \\ 1&2&1 \\ 1&1&2 \end{smallmatrix}\right) = \det\left(\begin{smallmatrix} 1&1&2 \\ 0&-1&-3 \\ 0&1&-1 \end{smallmatrix}\right) = 1 \cdot ((-1)\cdot(-1) - (-3)\cdot 1) = 4 > 0$.

Also ist $\mathrm{H}_f(0,0,0)$ positiv definit. Somit ist $(0,0,0)$ eine lokale Minimalstelle.

Aufgabe 128

Der Gradient von f ergibt sich allgemein zu

$$\nabla_f(x,y,z) \;=\; \begin{pmatrix} \cos(x)\sin(y)\sin(z) \\ \sin(x)\cos(y)\sin(z) \\ \sin(x)\sin(y)\cos(z) \end{pmatrix} .$$

Die Hessematrix von f ergibt sich allgemein zu

$$\mathrm{H}_f(x,y,z) \;=\; \begin{pmatrix} -\sin(x)\sin(y)\sin(z) & \cos(x)\cos(y)\sin(z) & \cos(x)\sin(y)\cos(z) \\ \cos(x)\cos(y)\sin(z) & -\sin(x)\sin(y)\sin(z) & \sin(x)\cos(y)\cos(z) \\ \cos(x)\sin(y)\cos(z) & \sin(x)\cos(y)\cos(z) & -\sin(x)\sin(y)\sin(z) \end{pmatrix} .$$

(1) Es ist

$$\nabla_f(\pi/4,\pi/4,\pi/4) \;=\; \begin{pmatrix} \cos(\pi/4)\sin(\pi/4)\sin(\pi/4) \\ \sin(\pi/4)\cos(\pi/4)\sin(\pi/4) \\ \sin(\pi/4)\sin(\pi/4)\cos(\pi/4) \end{pmatrix} \;=\; \frac{1}{4}\sqrt{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \;\neq\; 0 .$$

Also ist $(\pi/4,\pi/4,\pi/4)$ keine Flachstelle von f. Somit ist $(\pi/4,\pi/4,\pi/4)$ auch keine lokale Extremstelle von f.

(2) Es ist

$$\nabla_f(\pi/2,\pi/2,\pi/2) \;=\; \begin{pmatrix} \cos(\pi/2)\sin(\pi/2)\sin(\pi/2) \\ \sin(\pi/2)\cos(\pi/2)\sin(\pi/2) \\ \sin(\pi/2)\sin(\pi/2)\cos(\pi/2) \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \;=\; 0 .$$

Also ist $(\pi/2,\pi/2,\pi/2)$ eine Flachstelle von f.

Es ist

$$\begin{aligned} \mathrm{H}_f(\pi/2,\pi/2,\pi/2) \;&=\; \begin{pmatrix} -\sin(\pi/2)\sin(\pi/2)\sin(\pi/2) & \cos(\pi/2)\cos(\pi/2)\sin(\pi/2) & \cos(\pi/2)\sin(\pi/2)\cos(\pi/2) \\ \cos(\pi/2)\cos(\pi/2)\sin(\pi/2) & -\sin(\pi/2)\sin(\pi/2)\sin(\pi/2) & \sin(\pi/2)\cos(\pi/2)\cos(\pi/2) \\ \cos(\pi/2)\sin(\pi/2)\cos(\pi/2) & \sin(\pi/2)\cos(\pi/2)\cos(\pi/2) & -\sin(\pi/2)\sin(\pi/2)\sin(\pi/2) \end{pmatrix} \\ &=\; \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

Es ist $\mathrm{M}_1(\mathrm{H}_f(\pi/2,\pi/2,\pi/2)) = -1 < 0$. Es ist $\mathrm{M}_2(\mathrm{H}_f(\pi/2,\pi/2,\pi/2)) = 1 > 0$. Es ist $\mathrm{M}_3(\mathrm{H}_f(\pi/2,\pi/2,\pi/2)) = -1 < 0$. Also ist $\mathrm{H}_f(\pi/2,\pi/2,\pi/2))$ negativ definit. Somit ist $(\pi/2,\pi/2,\pi/2)$ eine lokale Maximalstelle von f.

(3) Es ist

$$\nabla_f(\pi/2,-\pi/2,\pi/2) \;=\; \begin{pmatrix} \cos(\pi/2)\sin(-\pi/2)\sin(\pi/2) \\ \sin(\pi/2)\cos(-\pi/2)\sin(\pi/2) \\ \sin(\pi/2)\sin(-\pi/2)\cos(\pi/2) \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \;=\; 0 .$$

Also ist $(\pi/2,-\pi/2,\pi/2)$ eine Flachstelle von f.

Es ist

$$\begin{aligned} \mathrm{H}_f(\pi/2,-\pi/2,\pi/2) \;&=\; \begin{pmatrix} -\sin(\pi/2)\sin(-\pi/2)\sin(\pi/2) & \cos(\pi/2)\cos(-\pi/2)\sin(\pi/2) & \cos(\pi/2)\sin(-\pi/2)\cos(\pi/2) \\ \cos(\pi/2)\cos(-\pi/2)\sin(\pi/2) & -\sin(\pi/2)\sin(-\pi/2)\sin(\pi/2) & \sin(\pi/2)\cos(-\pi/2)\cos(\pi/2) \\ \cos(\pi/2)\sin(-\pi/2)\cos(\pi/2) & \sin(\pi/2)\cos(-\pi/2)\cos(\pi/2) & -\sin(\pi/2)\sin(-\pi/2)\sin(\pi/2) \end{pmatrix} \\ &=\; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

Es ist $\mathrm{M}_1(\mathrm{H}_f(\pi/2,-\pi/2,\pi/2)) = 1 > 0$. Es ist $\mathrm{M}_2(\mathrm{H}_f(\pi/2,-\pi/2,\pi/2)) = 1 > 0$. Es ist $\mathrm{M}_3(\mathrm{H}_f(\pi/2,-\pi/2,\pi/2)) = 1 > 0$. Also ist $\mathrm{H}_f(\pi/2,\pi/2,\pi/2))$ positiv definit. Somit ist $(\pi/2,-\pi/2,\pi/2)$ eine lokale Minimalstelle von f.

Aufgabe 129

Der Gradient von f ergibt sich allgemein zu

$$\nabla_f(x,y,z) \;=\; \cos(xyz)\begin{pmatrix} yz \\ xz \\ xy \end{pmatrix} - \cos(z)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Die Hessematrix von f ergibt sich allgemein zu

$$\mathrm{H}_f(x,y,z) \;=\; \cos(xyz)\begin{pmatrix} 0 & z & y \\ z & 0 & x \\ y & x & 0 \end{pmatrix} - \sin(xyz)\begin{pmatrix} y^2z^2 & xyz^2 & xy^2z \\ xyz^2 & x^2z^2 & x^2yz \\ xy^2z & x^2yz & x^2y^2 \end{pmatrix} + \sin(z)\begin{pmatrix} 0&0&0 \\ 0&0&0 \\ 0&0&1 \end{pmatrix} .$$

Im folgenden schreiben wir $*$ für Einträge, die uns nicht zu interessieren brauchen.

(1) Es ist

$$\nabla_f(0,0,\pi/2) \;=\; \cos(0\cdot 0\cdot(\pi/2))\begin{pmatrix} 0\cdot(\pi/2) \\ 0\cdot(\pi/2) \\ 0\cdot 0 \end{pmatrix} - \cos(\pi/2)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \;=\; 0\,.$$

Also ist $(0,0,\pi/2)$ eine Flachstelle von f.
Es ist

$$\begin{aligned} & \mathrm{H}_f(0,0,\pi/2) \\ = \;& \cos(0\cdot 0\cdot(\pi/2))\begin{pmatrix} 0 & \pi/2 & 0 \\ \pi/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \sin(0\cdot 0\cdot(\pi/2))\begin{pmatrix} *&*&* \\ *&*&* \\ *&*&* \end{pmatrix} + \sin(\pi/2)\begin{pmatrix} 0&0&0 \\ 0&0&0 \\ 0&0&1 \end{pmatrix} \\ = \;& \begin{pmatrix} 0 & \pi/2 & 0 \\ \pi/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

Wegen der Nulleinträge auf der Hauptdiagonalen ist $\mathrm{H}_f(0,0,\pi/2)$ weder positiv noch negativ definit. Da ferner

$$\det\begin{pmatrix} 0 & \pi/2 & 0 \\ \pi/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \;=\; -\pi^2/4 \;\neq\; 0$$

ist, liegt bei $(0,0,\pi/2)$ keine lokale Extremstelle, sondern eine Sattelstelle vor.

(2) Es ist

$$\nabla_f(1,1,0) \;=\; \cos(1\cdot 1\cdot 0)\begin{pmatrix} 1\cdot 0 \\ 1\cdot 0 \\ 1\cdot 1 \end{pmatrix} - \cos(0)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0\,.$$

Also ist $(1,1,0)$ eine Flachstelle von f.
Es wird

$$\mathrm{H}_f(1,1,0) \;=\; \cos(1\cdot 1\cdot 0)\begin{pmatrix} 0&0&1 \\ 0&0&1 \\ 1&1&0 \end{pmatrix} - \sin(1\cdot 1\cdot 0)\begin{pmatrix} *&*&* \\ *&*&* \\ *&*&* \end{pmatrix} + \sin(0)\begin{pmatrix} 0&0&0 \\ 0&0&0 \\ 0&0&1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0&0&1 \\ 0&0&1 \\ 1&1&0 \end{pmatrix} .$$

Wegen der Nulleinträge auf der Hauptdiagonalen ist $\mathrm{H}_f(0,0,\pi/2)$ weder positiv noch negativ definit. Da ferner

$$\det\begin{pmatrix} 0&0&1 \\ 0&0&1 \\ 1&1&0 \end{pmatrix} \;=\; 0\,,$$

ist uns keine Entscheidung über das Vorliegen einer Extremstelle möglich.

Aufgabe 130

(1) *Bestimmung aller Flachstellen.*
Der Gradient von f ist

$$\nabla_f(x,y,z) \;=\; \begin{pmatrix} 4x-2y-z^2 \\ -2x+2y-2 \\ -2xz+4z \end{pmatrix} .$$

Aus der Flachstellenbedingung $\nabla_f(x_0\,,y_0\,,z_0) = 0$ erhalten wir aus dem dritten Eintrag, daß $z_0 = 0$ oder $x_0 = 2$ ist.

Fall $z_0 = 0$. Das verbleibende lineare Gleichungssystem $\left(\begin{smallmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 2 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} x_0 \\ y_0 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$ hat die eindeutige Lösung $\left(\begin{smallmatrix} x_0 \\ y_0 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$. Dies gibt die Flachstelle $(1,2,0)$.

Fall $x_0 = 2$. Es verbleiben die Gleichungen $8 - 2y_0 - z_0^2 = 0$ und $2y_0 - 6 = 0$. Dies gibt $y_0 = 3$ und $z_0 = \pm\sqrt{2}$. Wir erhalten die Flachstellen $(2,3,-\sqrt{2})$ und $(2,3,+\sqrt{2})$.

Insgesamt erhalten wir also die Menge

$$\{(1,2,0),\ (2,3,-\sqrt{2}),\ (2,3,+\sqrt{2})\}$$

der Flachstellen von f.

Untersuchung der Flachstellen auf Extremstellen.

Wir wenden das Lemma aus §10.1 zusammen mit dem Hauptminorenkriterium aus §9.2 an.

Die Hessematrix von f ist allgemein

$$\mathrm{H}_f(x,y,z) \;=\; \begin{pmatrix} 4 & -2 & -2z \\ -2 & 2 & 0 \\ -2z & 0 & 4-2x \end{pmatrix} .$$

Flachstelle $(1,2,0)$. Es ist $\mathrm{H}_f(1,2,0) = \left(\begin{smallmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{smallmatrix}\right)$. Es ist $\mathrm{M}_1(\mathrm{H}_f(1,2,0)) = \det\left(\,4\,\right) = 4 > 0$. Es ist $\mathrm{M}_2(\mathrm{H}_f(1,2,0)) = \det\left(\begin{smallmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 2 \end{smallmatrix}\right) = 4 \cdot 2 - (-2)\cdot(-2) = 4 > 0$. Es ist $\mathrm{M}_3(\mathrm{H}_f(1,2,0)) = \det\left(\begin{smallmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{smallmatrix}\right) = \det\left(\begin{smallmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 2 \end{smallmatrix}\right) \cdot \det\left(\,2\,\right) = 4 \cdot 2 = 8 > 0$.

Also ist $\mathrm{H}_f(1,2,0)$ positiv definit und mithin die Flachstelle $(1,2,0)$ eine lokale Minimalstelle.

Flachstellen $(2,3,\pm\sqrt{2})$. Es ist $\mathrm{H}_f(2,3,\pm\sqrt{2}) = \begin{pmatrix} 4 & -2 & \mp2\sqrt{2} \\ -2 & 2 & 0 \\ \mp2\sqrt{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Da der dritte Hauptdiagonaleintrag gleich 0 ist, ist $\mathrm{H}_f(2,3,\pm\sqrt{2})$ weder positiv noch negativ definit. Da $\det\begin{pmatrix} 4 & -2 & \mp2\sqrt{2} \\ -2 & 2 & 0 \\ \mp2\sqrt{2} & 0 & 0 \end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix} \mp2\sqrt{2} & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 4 & -2 & \mp2\sqrt{2} \end{pmatrix} = -(\mp2\sqrt{2})\cdot 2\cdot(\mp2\sqrt{2}) = -16 \neq 0$, folgt, daß $(2,3,\pm\sqrt{2})$ beides keine lokale Extremstellen, sondern Sattelstellen von f sind; cf. Lemma aus §10.1.

(2) *Bestimmung aller Flachstellen.*

Der Gradient von f ist

$$\nabla_f(x,y,z) \;=\; \mathrm{e}^{-(x^2+y^2+z^2)} \begin{pmatrix} 1-(x+y)\cdot 2x \\ 1-(x+y)\cdot 2y \\ -(x+y)\cdot 2z \end{pmatrix} \;=\; \mathrm{e}^{-(x^2+y^2+z^2)} \begin{pmatrix} 1-2x^2-2xy \\ 1-2y^2-2xy \\ -2xz-2yz \end{pmatrix} .$$

Aus der Flachstellenbedingung $\nabla_f(x_0\,,y_0\,,z_0) = 0$ erhalten wir aus einem der ersten beiden Einträge, daß $x_0 + y_0 \neq 0$ ist, aus dem dritten Eintrag also, daß $z_0 = 0$ ist.

Die Differenz der ersten beiden Einträge beträgt $2(x_0^2 - y_0^2) = 0$, woraus unter Beachtung von $x_0 + y_0 \neq 0$ nun $x_0 = y_0$ folgt. Setzt man dies in den ersten (oder zweiten) Eintrag ein, so erhält man $1 - 4x_0^2 = 0$, also $x_0 = \pm 1/2$.

Insgesamt erhalten wir also die Menge

$$\{(1/2, 1/2, 0),\ (-1/2, -1/2, 0)\}$$

der Flachstellen von f.

Untersuchung der Flachstellen auf Extremstellen.

Wir wenden das Lemma aus §10.1 zusammen mit dem Hauptminorenkriterium aus §9.2 an.

Die Hessematrix von f ist allgemein

$$\begin{aligned} \mathrm{H}_f(x,y,z) &= \mathrm{e}^{-(x^2+y^2+z^2)} \begin{pmatrix} (-4x-2y)-(1-2x^2-2xy)\cdot 2x & -2x-(1-2x^2-2xy)\cdot 2y & -(1-2x^2-2xy)\cdot 2z \\ -2y-(1-2y^2-2xy)\cdot 2x & (-4y-2x)-(1-2y^2-2xy)\cdot 2y & -(1-2y^2-2xy)\cdot 2z \\ -2z-(-2xz-2yz)\cdot 2x & -2z-(-2xz-2yz)\cdot 2y & (-2x-2y)-(-2xz-2yz)\cdot 2z \end{pmatrix} \\ &= \mathrm{e}^{-(x^2+y^2+z^2)} \begin{pmatrix} -6x-2y+4x^3+4x^2y & -2x-2y+4x^2y+4xy^2 & -2z+4x^2z+4xyz \\ -2x-2y+4x^2y+4xy^2 & -2x-6y+4xy^2+4y^3 & -2z+4y^2z+4xyz \\ -2z+4x^2z+4xyz & -2z+4y^2z+4xyz & -2x-2y+4xz^2+4yz^2 \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

Flachstelle $(1/2, 1/2, 0)$. Wir erhalten

$$\mathrm{H}_f(1/2,1/2,0) \;=\; \mathrm{e}^{-1/2} \begin{pmatrix} -3 & -1 & 0 \\ -1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} .$$

Es ist $\mathrm{M}_1(\mathrm{H}_f(1/2,1/2,0)) = \det(\mathrm{e}^{-1/2}\,(-3)) = -3\,\mathrm{e}^{-1/2} < 0$. Es ist $\mathrm{M}_2(\mathrm{H}_f(1/2,1/2,0)) = \det(\mathrm{e}^{-1/2}\left(\begin{smallmatrix} -3 & -1 \\ -1 & -3 \end{smallmatrix}\right)) = 8\,\mathrm{e}^{-1} > 0$. Es ist $\mathrm{M}_3(\mathrm{H}_f(1/2,1/2,0)) = \det(\mathrm{e}^{-1/2}\left(\begin{smallmatrix} -3 & -1 & 0 \\ -1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{smallmatrix}\right)) = -16\,\mathrm{e}^{-3/2} < 0$.

Also ist $\mathrm{H}_f(1/2,1/2,0)$ negativ definit und mithin die Flachstelle $(1/2,1/2,0)$ eine lokale Maximalstelle.

Flachstelle $(-1/2, -1/2, 0)$. Wir erhalten

$$\mathrm{H}_f(-1/2,-1/2,0) \;=\; \mathrm{e}^{-1/2} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} .$$

Wir haben nun zwei Möglichkeiten.

Erstens. Es ist $\mathrm{M}_1(\mathrm{H}_f(-1/2,-1/2,0)) = \det(\mathrm{e}^{-1/2}\,(3)) = 3\,\mathrm{e}^{-1/2} > 0$. Es ist $\mathrm{M}_2(\mathrm{H}_f(-1/2,-1/2,0)) = \det(\mathrm{e}^{-1/2}\left(\begin{smallmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{smallmatrix}\right)) = 8\,\mathrm{e}^{-1} > 0$. Es ist $\mathrm{M}_3(\mathrm{H}_f(-1/2,-1/2,0)) = \det(\mathrm{e}^{-1/2}\left(\begin{smallmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{smallmatrix}\right)) = 16\,\mathrm{e}^{-3/2} > 0$. Also ist $\mathrm{H}_f(-1/2,-1/2,0)$ positiv definit.

Zweitens. Zufällig ist $\mathrm{H}_f(-1/2,-1/2,0) = -\mathrm{H}_f(1/2,1/2,0)$. Da $\mathrm{H}_f(1/2,1/2,0)$ als negativ definit erkannt wurde, folgt, daß $\mathrm{H}_f(-1/2,-1/2,0)$ positiv definit ist; cf. §9.2, Bemerkung, (1).

Jedenfalls ist die Flachstelle $(-1/2,-1/2,0)$ eine lokale Minimalstelle.

(3) *Bestimmung aller Flachstellen.*

Der Gradient von f ist

$$\nabla_f(x,y,z,w) \;=\; \begin{pmatrix} 6x^2-4x-2w \\ 2y \\ 2z \\ 2w-2x \end{pmatrix} .$$

Aus der Flachstellenbedingung $\nabla_f(x_0\,, y_0\,, z_0\,, w_0) = 0$ erhalten wir aus dem vierten Eintrag, daß $w_0 = x_0$ ist. Einsetzen in den ersten Eintrag gibt, daß $6x_0^2 - 6x_0 = 0$, d.h. $(x_0 - 1)x_0 = 0$, d.h. $x_0 = 0$ oder $x_0 = 1$. Der zweite und der dritte Eintrag liefert $y_0 = 0$ und $z_0 = 0$.

Insgesamt erhalten wir also die Menge

$$\{(0,0,0,0),\; (1,0,0,1)\}$$

der Flachstellen von f.

Untersuchung der Flachstellen auf Extremstellen.

Wir wenden das Lemma aus §10.1 zusammen mit dem Hauptminorenkriterium aus §9.2 an.

Die Hessematrix von f ist allgemein

$$\mathrm{H}_f(x,y,z,w) \;=\; \begin{pmatrix} 12x-4 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Flachstelle $(0,0,0,0)$. Wir erhalten

$$\mathrm{H}_f(0,0,0,0) \;=\; \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Wegen Diagonaleinträgen mit unterschiedlichem Vorzeichen ist $\mathrm{H}_f(0,0,0,0)$ weder positiv noch negativ definit; cf. §9.2, Bemerkung, (2).

Ferner ist

$$\begin{aligned}\det(\mathrm{H}_f(0,0,0,0)) \;&=\; \det\begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \;=\; -\det\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \;=\; -\det\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{pmatrix} \\ &=\; -(-2)\cdot 2\cdot 2\cdot(-6) \;=\; -48 \;\neq\; 0\,.\end{aligned}$$

Somit ist $(0,0,0,0)$ eine Sattelstelle.

Flachstelle $(1,0,0,1)$. Wir erhalten

$$\mathrm{H}_f(1,0,0,1) \;=\; \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Es wird $\mathrm{M}_1(\mathrm{H}_f(1,0,0,1)) = \det\begin{pmatrix} 8 \end{pmatrix} = 8 > 0$. Es wird $\mathrm{M}_2(\mathrm{H}_f(1,0,0,1)) = \det\begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 16 > 0$. Es wird $\mathrm{M}_3(\mathrm{H}_f(1,0,0,1)) = \det\begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 32 > 0$. Es wird

$$\begin{aligned}\mathrm{M}_4(\mathrm{H}_f(1,0,0,1)) \;&=\; \det\begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \;=\; -\det\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 8 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \;=\; -\det\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \\ &=\; -(-2)\cdot 2\cdot 2\cdot 6 \;=\; 48 \;>\; 0\,.\end{aligned}$$

Somit ist die Hessematrix bei $(1,0,0,1)$ positiv definit. Also ist die Flachstelle $(1,0,0,1)$ eine lokale Minimalstelle.

Aufgabe 131

Auffinden der Flachstellen.

Es ist $\nabla_f(x,y) = \binom{y}{x}$.

Es ist $N(x,y) = \begin{pmatrix} (g_1)_x \\ (g_1)_y \end{pmatrix} = \binom{2}{2}$.

Es ist das Gleichungssytem

$$\begin{aligned} \tbinom{y}{x} \;&=\; \tbinom{2}{2}\,\rho_1 \\ 2x+2y-4 \;&=\; 0 \end{aligned}$$

genau dann lösbar, wenn $x = y = 1$.

Diesenfalls ist $\rho_1 = \frac{1}{2}$ die eindeutige Lösung.

Somit ist $(1,1)$ eine Flachstelle von f unter der Nebenbedingung $g = 0$.

Untersuchung auf lokale Extremstelle.

Wir lösen $N(1,1)^{\mathrm{t}}u = 0$ mit $u \in \mathbf{R}^{2\times 1}$.

In Standardnotation haben wir also das homogene lineare Gleichungssystem

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

zu lösen. Die vom Algorithmus gelieferte Basis von $\{\, u \in \mathbf{R}^{2\times 1} \;:\; N(2,2)^{\mathrm{t}}u = 0 \,\}$ schreiben wir als Spalten in die Matrix U.

Der Algorithmus liefert den Vektor $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$, und somit wird eben $U = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$.

Ferner sollen wir

$$F(x,y) \;:=\; f(x,y) - \rho_1\, g_1(x,y) \;=\; xy - \tfrac{1}{2}(2x + 2y - 4)$$

und

$$\mathrm{H}_F(x,y) \;=\; \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$$

bilden.

Zu betrachten ist nun $U^{\mathrm{t}}\, \mathrm{H}_F(1,1)\, U = \left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 \end{smallmatrix}\right) \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} -2 \end{smallmatrix}\right)$.

Diese 1×1-Matrix ist negativ definit, wie etwa das Hauptminorenkriterium sofort ergibt.

Also ist $(1,1)$ eine lokale Maximalstelle von f unter der Nebenbedingung $g = 0$.

In anderen Worten, das Quadrat mit der Seitenlänge 1 stellt eine lokale Maximalstelle dar.

Einsetzverfahren.

Rechnen wir nun direkt nach, daß dieses Quadrat in der Tat den maximalen Flächeninhalt aller betrachteten Rechtecke hat.

Wegen $2x + 2y = 4$ ist der Flächeninhalt unseres Rechtecks gleich $xy = x(2-x) = 2x - x^2$. Bei $x = 1$ ist dieser gleich 1.

Für $x \neq 1$ ist aber $2x - x^2 = 1 - (x-1)^2 < 1$.

Alternativ kann man auch $2x - x^2$ mit der alten Methode von §3.2.3.2 auf lokale Extremstellen testen, oder Wissen über Extremstellen quadratische Polynome heranziehen.

In diesem einfachen Beispiel war es also möglich, die Nebenbedingung einzusetzen und dann nach Extremwerten zu suchen. Das ist aber nur in besonders einfachen Fällen so.

Aufgabe 132

(1) *Nachweis, daß* $(x_0\,, y_0\,, z_0) = (1,1,1)$ *eine Flachstelle von* f *unter Nebenbedingung* $g = 0$ *ist.*

Es ist $\nabla_f(x,y,z) = \left(\begin{smallmatrix} yz \\ xz \\ xy \end{smallmatrix}\right)$, also $\nabla_f(1,1,1) = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$.

Es ist $N(x,y,z) = \left(\begin{smallmatrix} (g_1)_x \\ (g_1)_y \\ (g_1)_z \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 2y+2z \\ 2x+2z \\ 2x+2y \end{smallmatrix}\right)$, also $N(1,1,1) = \left(\begin{smallmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{smallmatrix}\right)$.

Zum einen ist in der Tat $g_1(1,1,1) = 0$. Zum andern hat das lineare Gleichungssystem $\nabla_f(1,1,1) = N(1,1,1)\ \left(\begin{smallmatrix} \rho_1 \end{smallmatrix}\right)$, d.h. das lineare Gleichungssystem

$$\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \;=\; \left(\begin{smallmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{smallmatrix}\right) \rho_1$$

die eindeutige Lösung $\rho_1 = \frac{1}{4}$.

Also ist $(1,1,1)$ eine Flachstelle von f unter der Nebenbedingung $g = 0$; vgl. Lemma aus §10.2.2.

Nachweis, daß $(x_0\,, y_0\,, z_0) = (1,1,1)$ *eine lokale Maximalstelle von* f *unter Nebenbedingung* $g = 0$ *ist.*

Der Algorithmus zum Lösen von $N(1,1,1)^{\mathrm{t}}\, u \;=\; 0$, d.h., in Standardnotation, zum Lösen des homogenen linearen Gleichungssystems

$$\left(\begin{smallmatrix} 4 & 4 & 4 & | & 0 \end{smallmatrix}\right) ,$$

gibt die Spalten von $U = \left(\begin{smallmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ als Basis des Lösungsraums $\{\, u \in \mathbf{R}^{3\times 1} \;:\; N(1,1,1)^{\mathrm{t}}\, u = 0 \,\}$.

Wir bilden

$$F(x,y,z) \;:=\; f(x,y,z) - \rho_1\, g_1(x,y,z) \;=\; xyz - \tfrac{1}{2}(yz + xz + xy - 3) \;.$$

Es ist
$$\mathrm{H}_F(x,y,z) \;=\; \begin{pmatrix} 0 & z-1/2 & y-1/2 \\ z-1/2 & 0 & x-1/2 \\ y-1/2 & x-1/2 & 0 \end{pmatrix} .$$
Also ist
$$\mathrm{H}_F(1,1,1) \;=\; \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 0&1&1\\1&0&1\\1&1&0 \end{pmatrix} .$$
Es wird
$$U^{\mathrm{t}}\,\mathrm{H}_F(1,1,1)\,U \;=\; \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} -1&1&0\\-1&0&1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0&1&1\\1&0&1\\1&1&0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1&-1\\1&0\\0&1 \end{pmatrix} \;=\; \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} -1&1&0\\-1&0&1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1&1\\-1&0\\0&-1 \end{pmatrix} \;=\; \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} -2&-1\\-1&-2 \end{pmatrix} .$$
Diese Matrix ist negativ definit nach dem Hauptminorenkriterium, denn es ist $\mathrm{M}_1(\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2&-1\\-1&-2 \end{pmatrix}) = \det(-1) = -2 < 0$ und $\mathrm{M}_2(\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2&-1\\-1&-2 \end{pmatrix}) = \det(\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2&-1\\-1&-2 \end{pmatrix}) = 3/4 > 0$.
Also ist $(1,1,1)$ eine lokale Maximalstelle von f unter der Nebenbedingung $g = 0$; vgl. Lemma aus §10.2.3.

Vgl. Aufgabe 51.

(2) *Nachweis, daß* $(x_0\,,y_0\,,z_0) = (\frac{11}{4}\,,\frac{1}{2}\,,\frac{1}{2})$ *eine Flachstelle von* f *unter Nebenbedingung* $g = 0$ *ist.*

Es ist $\nabla_f(x,y,z) = \begin{pmatrix} yz\\xz\\xy \end{pmatrix}$, also $\nabla_f(\frac{11}{4}\,,\frac{1}{2}\,,\frac{1}{2}) = \begin{pmatrix} 1/4\\11/8\\11/8 \end{pmatrix}$.

Es ist $N(x,y,z) = \begin{pmatrix} (g_1)_x & (g_2)_x\\(g_1)_y & (g_2)_y\\(g_1)_z & (g_2)_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y+2z & 4\\2x+2z & 4\\2x+2y & 4 \end{pmatrix}$, also $N(\frac{11}{4}\,,\frac{1}{2}\,,\frac{1}{2}) = \begin{pmatrix} 2&4\\13/2&4\\13/2&4 \end{pmatrix}$.

Es ist in der Tat $g_1(\frac{11}{4}\,,\frac{1}{2}\,,\frac{1}{2}) = 2\cdot(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{11}{4}\cdot\frac{1}{2}+\frac{11}{4}\cdot\frac{1}{2}) - 6 = 0$.

Es ist in der Tat $g_2(\frac{11}{4}\,,\frac{1}{2}\,,\frac{1}{2}) = 4(\frac{11}{4}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}) - 15 = 0$.

Das Spaltentupel von $N(\frac{11}{4}\,,\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ ist linear unabhängig. Also ist die Lösung $r = \begin{pmatrix} \rho_1\\\rho_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 4\\-1 \end{pmatrix}$ des linearen Gleichungssystems
$$\nabla_f(\tfrac{11}{4}\,,\tfrac{1}{2}\,,\tfrac{1}{2}) \;=\; N(\tfrac{11}{4}\,,\tfrac{1}{2}\,,\tfrac{1}{2})\,r\,,$$
d.h. des linearen Gleichungssystems
$$\begin{pmatrix} 1/4\\11/8\\11/8 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} 2&4\\13/2&4\\13/2&4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \rho_1\\\rho_2 \end{pmatrix} ,$$
eindeutig.

Nachweis, daß $(x_0\,,y_0\,,z_0) = (\frac{11}{4}\,,\frac{1}{2}\,,\frac{1}{2})$ *eine lokale Maximalstelle von* f *unter Nebenbedingung* $g = 0$ *ist.*

Der Algorithmus zum Lösen von $N(\frac{11}{4}\,,\frac{1}{2}\,,\frac{1}{2})^{\mathrm{t}}\,u = 0$, d.h., in Standardnotation, zum Lösen des homogenen linearen Gleichungssystems
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 13/2 & 13/2 & 0\\ 4 & 4 & 4 & 0 \end{array}\right) ,$$
gibt nach den Umformungen
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 13/2 & 13/2 & 0\\ 4 & 4 & 4 & 0 \end{array}\right) \;\rightsquigarrow\; \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 9/2 & 9/2 & 0 \end{array}\right) \;\rightsquigarrow\; \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$
die Spalte von $U = \begin{pmatrix} 0\\-1\\1 \end{pmatrix}$ als Basis des Lösungsraums $\{\,u \in \mathbf{R}^{3\times 1}\;:\;N(\frac{11}{4}\,,\frac{1}{2}\,,\frac{1}{2})^{\mathrm{t}}\,u = 0\,\}$.

Wir bilden
$$\begin{array}{rcl} F(x,y,z) & := & f(x,y,z) - \rho_1\,g_1(x,y,z) - \rho_2\,g_2(x,y,z)\\ & = & xyz - \frac{1}{2}(yz+xz+xy-3) - \frac{1}{16}(4x+4y+4z-15)\,. \end{array}$$

Es ist

$$\mathrm{H}_F(x,y,z) \;=\; \begin{pmatrix} 0 & z-1/2 & y-1/2 \\ z-1/2 & 0 & x-1/2 \\ y-1/2 & x-1/2 & 0 \end{pmatrix} \;.$$

Also ist

$$\mathrm{H}_F(\tfrac{11}{4}\,,\tfrac{1}{2}\,,\tfrac{1}{2}) \;=\; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9/4 \\ 0 & 9/4 & 0 \end{pmatrix} \;.$$

Es wird

$$U^{\mathrm{t}}\,\mathrm{H}_F(\tfrac{11}{4}\,,\tfrac{1}{2}\,,\tfrac{1}{2})\,U \;=\; \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9/4 \\ 0 & 9/4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} -9/2 \end{pmatrix} \;.$$

Diese Matrix ist negativ definit z.B. nach dem Hauptminorenkriterium.

Also ist $(\frac{11}{4}\,,\frac{1}{2}\,,\frac{1}{2})$ eine lokale Maximalstelle von f unter der Nebenbedingung $g=0$; vgl. Lemma aus §10.2.3.

Aufgabe 133

Auffinden der Flachstellen.

Es ist $\nabla_f(x,y) = \begin{pmatrix} 4x \\ -2y \end{pmatrix}$.

Es ist $N(x,y) = \begin{pmatrix} (g_1)_x \\ (g_1)_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x \\ 1 \end{pmatrix}$.

Es ist das Gleichungssytem

$$\begin{array}{rcl} \begin{pmatrix} 4x_0 \\ -2y_0 \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} -2x_0 \\ 1 \end{pmatrix} \rho_1 \\ y_0 - x_0^2 & = & 0 \end{array}$$

zu lösen.

Notwendig wird $\rho_1 = -2y_0$, und dann also $4x_0 = -2x_0\rho_1 = 4x_0y_0$.

Ist $x_0 = 0$, so folgt schon aus $y_0 - x_0^2 = 0$, daß $y_0 = 0$ ist.

Ist $x_0 \neq 0$, so folgt aus $4x_0 = 4x_0y_0$, daß $y_0 = 1$, woraus sich dann wiederum aus $y_0 - x_0^2 = 0$ ergibt, daß $x_0 = \pm 1$.

Da ρ_1 jeweils eindeutig festliegt, haben wir also drei Flachstellen von f unter der Nebenbedingung $g=0$ gefunden, namentlich

$$(0,0) \quad (\text{wobei } \rho_1 = 0)\;, \quad (1,1) \quad (\text{wobei } \rho_1 = -2)\;, \quad (-1,1) \quad (\text{wobei } \rho_1 = -2)\;.$$

Untersuchung auf lokale Extremstellen.

Fall $(x_0\,,y_0) = (0,0)$. Für $N(0,0)^{\mathrm{t}}\,u = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} u \overset{!}{=} 0$ liefert der Algorithmus $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Es ist $F(x,y) = f(x,y) - \rho_1\, g_1(x,y) = 2x^2 - y^2$, somit $\mathrm{H}_F(x,y) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$, also auch $\mathrm{H}_F(0,0) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$.

Es wird $U^{\mathrm{t}}\,\mathrm{H}_F(0,0)\,U \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}$ positiv definit. Also ist $(0,0)$ eine lokale Minimalstelle unter Nebenbedingung $g=0$.

Fall $(x_0\,,y_0) = (1,1)$. Für $N(1,1)^{\mathrm{t}}\,u = \begin{pmatrix} -2 & 1 \end{pmatrix} u \overset{!}{=} 0$ liefert der Algorithmus $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Es ist $F(x,y) = f(x,y) - \rho_1\, g_1(x,y) = 2x^2 - y^2 + 2(y - x^2)$, somit $\mathrm{H}_F(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$, also auch $\mathrm{H}_F(1,1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$.

Es wird $U^{\mathrm{t}}\,\mathrm{H}_F(1,1)\,U = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \end{pmatrix}$ negativ definit. Also ist $(1,1)$ eine lokale Maximalstelle unter Nebenbedingung $g=0$.

Fall $(x_0\,,y_0) = (-1,1)$. Für $N(-1,1)^{\mathrm{t}}\,u = \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix} u \overset{!}{=} 0$ liefert der Algorithmus $U = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Es ist $F(x,y) = f(x,y) - \rho_1\, g_1(x,y) = 2x^2 - y^2 + 2(y - x^2)$, somit $\mathrm{H}_F(x,y) = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{smallmatrix}\right)$, also auch $\mathrm{H}_F(-1,1) = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{smallmatrix}\right)$.

Es wird $U^{\mathrm{t}}\, \mathrm{H}_F(-1,1)\, U = \left(\begin{smallmatrix} 1 & -2 \end{smallmatrix}\right) \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{smallmatrix}\right) \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -2 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} -8 \end{smallmatrix}\right)$ negativ definit. Also ist $(-1,1)$ eine lokale Maximalstelle unter Nebenbedingung $g = 0$.

Alternativ dazu: Einsetzverfahren.

Einsetzen von $y = x^2$ in $2x^2 - y^2$ gibt $h(x) := 2x^2 - x^4$. Es ist $h'(x) = 4x - 4x^3 = 4x(1-x)(1+x)$. Also haben wir die Flachstellen 0, 1, -1.

Es ist $h''(x) = 4 - 12x^2$.

Es ist $h''(0) = 4 > 0$. Also liegt bei 0 ein lokales Minimum vor. Dies entspricht der oben gefundenen lokalen Minimalstelle $(0,0)$ von f unter Nebenbedingung $g = 0$.

Es ist $h''(1) = -8 < 0$. Also liegt bei 0 ein lokales Maximum vor. Dies entspricht der oben gefundenen lokalen Maximalstelle $(-1,1)$ von f unter Nebenbedingung $g = 0$.

Es ist $h''(-1) = -8 < 0$. Also liegt bei -1 ein lokales Maximum vor. Dies entspricht der oben gefundenen lokalen Maximalstelle $(1,1)$ von f unter Nebenbedingung $g = 0$.

In diesem Beispiel war es also möglich, die Nebenbedingung einzusetzen und dann nach Extremwerten zu suchen. Das ist aber nur in besonders einfachen Fällen so.

Aufgabe 134

(1) *Nachweis, daß* $(x_0\,, y_0\,, z_0) = (0,0,0)$ *eine Flachstelle von* f *unter Nebenbedingung* $g = 0$ *ist.*

Es ist $\nabla_f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 3x^2+yz \\ 2y+xz+2 \\ xy \end{pmatrix}$, also $\nabla_f(0,0,0) = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$.

Es ist $N(x,y,z) = \begin{pmatrix} (g_1)_x \\ (g_1)_y \\ (g_1)_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y+1 \\ 2z \end{pmatrix}$, also $N(0,0,0) = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$.

Zum einen ist in der Tat $g_1(0,0,0) = 0^2 + 0^2 + 0^2 + 0 = 0$.

Zum andern hat das lineare Gleichungssystem $\nabla_f(0,0,0) = N(0,0,0)\,(\,\rho_1\,)$, d.h. das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rho_1$$

die eindeutige Lösung $\rho_1 = 2$.

Also ist $(0,0,0)$ eine Flachstelle von f unter der Nebenbedingung $g = 0$; vgl. Lemma aus §10.2.2.

Untersuchung von $(x_0\,, y_0\,, z_0) = (0,0,0)$ *auf lokale Extremstelle von* f *unter Nebenbedingung* $g = 0$.

Der Algorithmus zum Lösen von $N(0,0,0)^{\mathrm{t}}\, u = 0$, d.h., in Standardnotation, zum Lösen des homogenen linearen Gleichungssystems

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

gibt die Spalten von $U = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ als Basis des Lösungsraums $\{\, u \in \mathbf{R}^{3\times 1} \,:\, N(0,0,0)^{\mathrm{t}}\, u = 0 \,\}$.

Wir bilden

$$\begin{aligned} F(x,y,z) &= f(x,y,z) - \rho_1\, g_1(x,y,z) \\ &= x^3 + y^2 + xyz + 2y - 2(x^2 + y^2 + z^2 + y) \\ &= x^3 - y^2 + xyz - 2x^2 - 2z^2\,. \end{aligned}$$

Es ist

$$\mathrm{H}_F(x,y,z) \;=\; \begin{pmatrix} 6x-4 & z & y \\ z & -2 & x \\ y & x & -4 \end{pmatrix}.$$

Also ist

$$\mathrm{H}_F(0,0,0) \;=\; \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

Es wird
$$U^{\mathrm{t}}\,\mathrm{H}_F(0,0,0)\,U \;=\; \left(\begin{smallmatrix}1&0&0\\0&0&1\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}-4&0&0\\0&-2&0\\0&0&-4\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&0\\0&1\end{smallmatrix}\right) \;=\; \left(\begin{smallmatrix}-4&0\\0&-4\end{smallmatrix}\right)\;.$$

Diese Matrix ist negativ definit nach dem Hauptminorenkriterium, denn es ist $\mathrm{M}_1(\left(\begin{smallmatrix}-4&0\\0&-4\end{smallmatrix}\right)) = \det\,(-4) = -4 < 0$ und $\mathrm{M}_2(\left(\begin{smallmatrix}-4&0\\0&-4\end{smallmatrix}\right)) = \det\left(\begin{smallmatrix}-4&0\\0&-4\end{smallmatrix}\right) = 16 > 0$.

Also ist $(0,0,0)$ eine lokale Maximalstelle von f unter der Nebenbedingung $g = 0$; vgl. Lemma aus §10.2.3.

(2) *Nachweis, daß* $(x_0\,, y_0\,, z_0\,, w_0) = (1,-1,-1,1)$ *eine Flachstelle von* f *unter Nebenbedingung* $g = 0$ *ist.*

Es ist $\nabla_f(x,y,z,w) = \begin{pmatrix}3x^2\\3y^2\\3z^2\\3w^2\end{pmatrix}$, also $\nabla_f(1,-1,-1,1) = \left(\begin{smallmatrix}3\\3\\3\\3\end{smallmatrix}\right)$.

Es ist $N(x,y,z,w) = \begin{pmatrix}(g_1)_x & (g_2)_x\\(g_1)_y & (g_2)_y\\(g_1)_z & (g_2)_z\\(g_1)_w & (g_2)_w\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2x & yz\\2y & (x{+}w)z\\2z & (x{+}w)y\\2w & yz\end{pmatrix}$, also $N(1,-1,-1,1) = \left(\begin{smallmatrix}2&1\\-2&-2\\-2&-2\\2&1\end{smallmatrix}\right)$.

Zum einen ist in der Tat $g_1(1,-1,-1,1) = 1^2+(-1)^2+(-1)^2+1^2-4 = 0$ und $g_2(1,-1,-1,1) = 1\cdot(-1)\cdot(-1)+(-1)\cdot(-1)\cdot 1 - 2 = 0$.

Zum andern hat das lineare Gleichungssystem $\nabla_f(1,-1,-1,1) = N(1,-1,-1,1)\,\left(\begin{smallmatrix}\rho_1\\\rho_2\end{smallmatrix}\right)$, d.h. das lineare Gleichungssystem
$$\left(\begin{smallmatrix}3\\3\\3\\3\end{smallmatrix}\right) \;=\; \left(\begin{smallmatrix}2&1\\-2&-2\\-2&-2\\2&1\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}\rho_1\\\rho_2\end{smallmatrix}\right)$$
die eindeutige Lösung $\left(\begin{smallmatrix}\rho_1\\\rho_2\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}9/2\\-6\end{smallmatrix}\right)$, wie die Umformung
$$\left(\begin{array}{cc|c}2&1&3\\-2&-2&3\\-2&-2&3\\2&1&3\end{array}\right) \;\rightsquigarrow\; \left(\begin{array}{cc|c}1&1&-3/2\\0&-1&6\\0&0&0\\0&-1&6\end{array}\right) \;\rightsquigarrow\; \left(\begin{array}{cc|c}1&0&9/2\\0&1&-6\\0&0&0\\0&0&0\end{array}\right)$$
ergibt.

Also ist $(1,-1,-1,1)$ eine Flachstelle von f unter der Nebenbedingung $g = 0$; vgl. Lemma aus §10.2.2.

Untersuchung von $(x_0\,, y_0\,, z_0\,, w_0) = (1,-1,-1,1)$ *auf lokale Extremstelle von* f *unter Nebenbedingung* $g = 0$.

Der Algorithmus zum Lösen von $N(1,2,2,1)^{\mathrm{t}}\,u = 0$, d.h., in Standardnotation, zum Lösen des homogenen linearen Gleichungssystems
$$\left(\begin{array}{cccc|c}2&-2&-2&2&0\\1&-2&-2&1&0\end{array}\right)\,,$$
gibt nach den Umformungen
$$\left(\begin{array}{cccc|c}2&-2&-2&2&0\\1&-2&-2&1&0\end{array}\right) \;\rightsquigarrow\; \left(\begin{array}{cccc|c}1&-1&-1&1&0\\0&-1&-1&0&0\end{array}\right) \;\rightsquigarrow\; \left(\begin{array}{cccc|c}1&0&0&1&0\\0&1&1&0&0\end{array}\right)$$
die Spalten von $U = \left(\begin{smallmatrix}0&-1\\-1&0\\1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)$ als Basis des Lösungsraums $\{\,u\in\mathbf{R}^{4\times 1}\;:\;N(1,-1,-1,1)^{\mathrm{t}}\,u = 0\,\}$.

Wir bilden
$$\begin{aligned}F(x,y,z,w) &= f(x,y,z,w) - \rho_1\,g_1(x,y,z,w) - \rho_2\,g_2(x,y,z,w)\\ &= x^3+y^3+z^3+w^3-\tfrac{9}{2}(x^2+y^2+z^2+w^2-4)+6(xyz+yzw-2)\;.\end{aligned}$$

Es ist
$$\mathrm{H}_F(x,y,z,w) \;=\; \begin{pmatrix}6x{-}9 & 6z & 6y & 0\\6z & 6y{-}9 & 6(x{+}w) & 6z\\6y & 6(x{+}w) & 6z{-}9 & 6y\\0 & 6z & 6y & 6w{-}9\end{pmatrix}\;.$$

Also ist

$$\mathrm{H}_F(1,-1,-1,1) \;=\; \begin{pmatrix} -3 & -6 & -6 & 0 \\ -6 & -15 & 12 & -6 \\ -6 & 12 & -15 & -6 \\ 0 & -6 & -6 & -3 \end{pmatrix}.$$

Es wird

$$\begin{aligned} U^{\mathrm{t}}\,\mathrm{H}_F(1,-1,-1,1)\,U &= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & -6 & -6 & 0 \\ -6 & -15 & 12 & -6 \\ -6 & 12 & -15 & -6 \\ 0 & -6 & -6 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 27 & 0 \\ -27 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -54 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Diese Matrix ist negativ definit nach dem Hauptminorenkriterium, denn es ist $\mathrm{M}_1(\left(\begin{smallmatrix} -54 & 0 \\ 0 & -6 \end{smallmatrix}\right)) = \det\left(-54\right) = -54 < 0$ und $\mathrm{M}_2(\left(\begin{smallmatrix} -54 & 0 \\ 0 & -6 \end{smallmatrix}\right)) = \det\left(\begin{smallmatrix} -54 & 0 \\ 0 & -6 \end{smallmatrix}\right) = 324 > 0$.

Also ist $(1,-1,-1,1)$ eine lokale Maximalstelle von f unter der Nebenbedingung $g = 0$; vgl. Lemma aus §10.2.3.

(3) Beachte, daß vorausgesetzt wurde, daß alle Variablen positiv sind, i.e. $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$, $w > 0$, $v > 0$.

Suche nach Flachstellen von f unter der Nebenbedingung $g = 0$.

Es ist $\nabla_f(x,y,z,w,v) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2 \\ -2w \\ -2v \end{pmatrix}$.

Es ist $N(x,y,z,w,v) = \begin{pmatrix} yz & 0 \\ xz & 0 \\ xy & vw \\ 0 & zv \\ 0 & zw \end{pmatrix}$.

Das Spaltentupel von $N(x,y,z,w,v)$ ist schonmal stets linear unabhängig.

Wir haben das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \nabla_f(x_0\,,y_0\,,z_0\,,w_0\,,v_0) &= N(x_0\,,y_0\,,z_0\,,w_0\,,v_0)\,r \\ g_1(x_0\,,y_0\,,z_0\,,w_0\,,v_0) &= 0 \\ g_2(x_0\,,y_0\,,z_0\,,w_0\,,v_0) &= 0 \end{aligned}$$

zu lösen, d.h., mit $r = \left(\begin{smallmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbf{R}^{2\times 1}$, das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 2x_0 \\ 2y_0 \\ 2 \\ -2w_0 \\ -2v_0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} y_0z_0 & 0 \\ x_0z_0 & 0 \\ x_0y_0 & v_0w_0 \\ 0 & z_0v_0 \\ 0 & z_0w_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \end{pmatrix} \\ x_0y_0z_0 &= 4 \\ z_0w_0v_0 &= 1\,. \end{aligned}$$

Der erste Vektoreintrag gibt $\rho_1 = 2x_0y_0^{-1}z_0^{-1}$.

Der zweite Eintrag gibt dann $2y_0 = \rho_1x_0z_0 = 2x_0^2y_0^{-1}$, also $x_0^2 = y_0^2$, also, da $x_0\,,\,y_0 > 0$, mithin $x_0 = y_0$.

Der fünfte Eintrag gibt $\rho_2 = -2z_0^{-1}v_0w_0^{-1}$.

Der vierte Eintrag gibt dann $-2w_0 = \rho_2z_0v_0 = -2v_0^2w_0^{-1}$, also $w_0^2 = v_0^2$, also, da $v_0\,,\,w_0 > 0$, mithin $v_0 = w_0$.

Der dritte Eintrag gibt dann $2 = \rho_1x_0y_0 + \rho_2v_0w_0 = 2x_0^2z_0^{-1} - 2v_0^2z_0^{-1}$, also $z_0 = x_0^2 - v_0^2$.

Nun gibt $g_1 = 0$, daß $4 = x_0y_0z_0 = x_0^2(x_0^2 - v_0^2)$.

Ferner gibt $g_2 = 0$, daß $1 = z_0w_0v_0 = v_0^2(x_0^2 - v_0^2)$.

Es folgt, daß $4x_0^{-2} = (x_0^2 - v_0^2) = v_0^{-2}$, also, da $x_0\,,\,v_0\,>\,0$, mithin $x_0 = 2v_0$.
Dies eingesetzt in $g_1 = 0$ gibt dann wiederum $4 = x_0^2(x_0^2 - v_0^2) = 12v_0^4$, also, da $v_0 > 0$, mithin $v_0 = 3^{-1/4}$.
Wir schreiben kurz $\alpha := 3^{-1/4}$.
Insgesamt ist somit notwendigerweise

$$(x_0\,,y_0\,,z_0\,,w_0\,,v_0) \;=\; (2\alpha, 2\alpha, 3\alpha^2, \alpha, \alpha)$$

mit Lagrangemultiplikator

$$\begin{pmatrix}\rho_1\\ \rho_2\end{pmatrix} \;=\; \tfrac{2}{3}\,\alpha^{-2}\left(\begin{smallmatrix}1\\ -1\end{smallmatrix}\right)\;.$$

Man bestätigt duch Einsetzen in unser Gleichungssystem, daß dies in der Tat ein Flachpunkt von g unter der Nebenbedingung $g = 0$ ist.

Untersuchung der Flachstelle auf Extremstellen unter der Nebenbedingung $g = 0$.

Der Algorithmus zum Lösen von $N(2\alpha, 2\alpha, 3\alpha^2, \alpha, \alpha)^{\mathrm{t}}\,u = 0$, d.h., in Standardnotation, zum Lösen des homogenen linearen Gleichungssystems

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 6\alpha^3 & 6\alpha^3 & 4\alpha^2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \alpha^2 & 3\alpha^3 & 3\alpha^3 & 0\end{array}\right)\;,$$

gibt nach den Umformungen

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 6\alpha^3 & 6\alpha^3 & 4\alpha^2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \alpha^2 & 3\alpha^3 & 3\alpha^3 & 0\end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & \frac{2}{3}\alpha^{-1} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \alpha^2 & 3\alpha^3 & 3\alpha^3 & 0\end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & \frac{2}{3}\alpha^{-1} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2}\alpha & \frac{3}{2}\alpha & 0\end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2}\alpha & \frac{3}{2}\alpha & 0\end{array}\right)$$

die Spalten von

$$U \;=\; \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & -\frac{3}{2}\alpha & -\frac{3}{2}\alpha\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

als Basis des Lösungsraums $\{\,u \in \mathbf{R}^{5\times 1}\;:\;N(2\alpha, 2\alpha, 3\alpha^2, \alpha, \alpha)^{\mathrm{t}}\,u = 0\,\}$.
Wir bilden

$$\begin{array}{rcl} F(x,y,z,w,v) & := & f(x,y,z,w,v) - \rho_1\,g_1(x,y,z,w,v) - \rho_2\,g_2(x,y,z,w,v)\\ & = & x^2 + y^2 + 2z - w^2 - v^2 - \frac{2}{3}\,\alpha^{-2}(xyz-4) + \frac{2}{3}\,\alpha^{-2}(zvw-1)\;. \end{array}$$

Schreiben wir $\beta := \frac{2}{3}\,\alpha^{-2} = 2\cdot 3^{-1/2}$.
Es ist

$$\mathrm{H}_F(x,y,z,w,v) \;=\; \begin{pmatrix} 2 & -\beta z & -\beta y & 0 & 0\\ -\beta z & 2 & -\beta x & 0 & 0\\ -\beta y & -\beta x & 0 & \beta w & \beta v\\ 0 & 0 & \beta w & -2 & \beta z\\ 0 & 0 & \beta v & \beta z & -2\end{pmatrix}\;.$$

Also ist

$$\mathrm{H}_F(2\alpha, 2\alpha, 3\alpha^2, \alpha, \alpha) \;=\; \begin{pmatrix} 2 & -2 & -2\alpha\beta & 0 & 0\\ -2 & 2 & -2\alpha\beta & 0 & 0\\ -2\alpha\beta & -2\alpha\beta & 0 & \alpha\beta & \alpha\beta\\ 0 & 0 & \alpha\beta & -2 & 2\\ 0 & 0 & \alpha\beta & 2 & -2\end{pmatrix}\;.$$

Es wird

$$\begin{array}{rcl} U^{\mathrm{t}}\,\mathrm{H}_F(2\alpha, 2\alpha, 3\alpha^2, \alpha, \alpha)\,U & = & \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & -\frac{3}{2}\alpha & 1 & 0\\ 1 & 0 & -\frac{3}{2}\alpha & 0 & 1\end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -2 & -2\alpha\beta & 0 & 0\\ -2 & 2 & -2\alpha\beta & 0 & 0\\ -2\alpha\beta & -2\alpha\beta & 0 & \alpha\beta & \alpha\beta\\ 0 & 0 & \alpha\beta & -2 & 2\\ 0 & 0 & \alpha\beta & 2 & -2\end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & -\frac{3}{2}\alpha & -\frac{3}{2}\alpha\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\\ & = & \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & -\frac{3}{2}\alpha & 1 & 0\\ 1 & 0 & -\frac{3}{2}\alpha & 0 & 1\end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & 4 & 4\\ 4 & 0 & 0\\ 0 & -\alpha\beta & -\alpha\beta\\ 0 & -3 & 1\\ 0 & 1 & -3\end{pmatrix}\\ & = & \begin{pmatrix} 8 & -4 & -4\\ -4 & 2 & 6\\ -4 & 6 & 2\end{pmatrix}\;. \end{array}$$

Diese Matrix ist nicht positiv definit, da sie einen nichtnegative Hauptdiagonaleintrag hat. (In der Tat sogar drei.)

Diese Matrix ist nach dem Hauptminorenkriterium weder positiv noch negativ definit, da $\mathrm{M}_2\left(\begin{pmatrix} 8 & -4 & -4 \\ -4 & 2 & 6 \\ -4 & 6 & 2 \end{pmatrix}\right) = \det\begin{pmatrix} 8 & -4 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} = 0$.

Es ist aber $\det\begin{pmatrix} 8 & -4 & -4 \\ -4 & 2 & 6 \\ -4 & 6 & 2 \end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix} -4 & 2 & 6 \\ 8 & -4 & -4 \\ -4 & 6 & 2 \end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix} -4 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 8 \\ 0 & 4 & -4 \end{pmatrix} = -(-4)\cdot(-32) = -128 \neq 0$.

Also ist die zu untersuchende Flachstelle $(2\alpha, 2\alpha, 3\alpha^2, \alpha, \alpha) = (2{\cdot}3^{-1/4},\ 2{\cdot}3^{-1/4},\ 3^{1/2},\ 3^{-1/4},\ 3^{-1/4})$ weder ein lokales Maximum noch ein lokales Minimum, sondern eine Sattelstelle von f unter der Nebenbedingung $g = 0$.

Aufgabe 135

Seien alle Längen in cm ausgedrückt, entsprechend Flächen in cm^2 und Volumina in cm^3.

Ferner bezeichnet hier nun r einen Radius, nicht den Lagrangemultiplikator.

(1) Es ist nach einer lokalen Minimalstelle der Oberfläche $f(r,h) := 2\pi(r^2 + rh)$ unter Nebenbedingung $g_1(r,h) := \pi r^2 h - \pi \cdot 16 = 0$ gefragt, auf dem Definitionsbereich $(\mathbf{R}_{>0})^2$.

Auffinden der Flachstellen von f unter Nebenbedingung $g = 0$.

Es wird $\nabla_f(r,h) = 2\pi \begin{pmatrix} 2r+h \\ r \end{pmatrix}$.

Es wird $N(r,h) = \pi \begin{pmatrix} 2rh \\ r^2 \end{pmatrix}$.

Die Spalte von $N(r,h)$ ist überall ungleich 0, d.h. das Spaltentupel von $N(r,h)$ ist überall linear unabhängig.

Wir haben also das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 2\pi \begin{pmatrix} 2r_0+h_0 \\ r_0 \end{pmatrix} &= \pi \begin{pmatrix} 2r_0h_0 \\ r_0^2 \end{pmatrix} \rho_1 \\ \pi r_0^2 h_0 &= \pi \cdot 16 \end{aligned}$$

zu lösen.

Der zweite Vektoreintrag gibt $\rho_1 = 2r_0^{-1}$.

Der erste Vektoreintrag gibt dann $4r_0 + 2h_0 = 2r_0h_0 \cdot 2r_0^{-1}$, d.h. $4r_0 + 2h_0 = 4h_0$, d.h. $2r_0 = h_0$.

Die untere Gleichung liefert schließlich aus $\pi r_0^2 \cdot 2r_0 = \pi \cdot 16$, daß $r_0 = 2$ und $h_0 = 4$.

Einsetzen bestätigt, daß $(r_0\,, h_0) = (2,4)$ in der Tat eine Flachstelle von f unter Nebenbedingung $g = 0$ ist. Der zugehörige Lagrangemultiplikator besteht aus $\rho_1 = 1$.

Untersuchung der Flachstelle $(r_0\,, h_0) = (2,4)$ auf Extremstelle, jeweils unter Nebenbedingung $g = 0$.

Das lineare Gleichungssystem $N(2,4)^{\mathrm{t}}\, u = 0$, d.h. $\pi\begin{pmatrix} 16 & 4 \end{pmatrix} u = 0$ liefert $U = \begin{pmatrix} -1/4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Es ist

$$F(r,h) \;:=\; f(r,h) - \rho_1 g_1(r,h) \;=\; 2\pi(r^2 + rh) - 1\cdot(\pi r^2 h - \pi\cdot 16) \;=\; \pi(2r^2 + 2rh - r^2h + 16)\,.$$

Also ist

$$\mathrm{H}_F(r,h) \;=\; \pi \begin{pmatrix} 4-2h & 2-2r \\ 2-2r & 0 \end{pmatrix}$$

und somit insbesondere

$$\mathrm{H}_F(2,4) \;=\; \pi \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}\,.$$

Nun ist

$$U^{\mathrm{t}}\,\mathrm{H}_F(2,4)\,U \;=\; \begin{pmatrix} -1/4 & 1 \end{pmatrix} \pi \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/4 \\ 1 \end{pmatrix} \;=\; \pi \begin{pmatrix} -1/4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1/2 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} 3\pi/4 \end{pmatrix}$$

positiv definit. Also ist $(r_0\,, h_0) = (2,4)$ in der Tat eine lokale Minimalstelle von f unter der Nebenbedingung $g = 0$.

(2) Es ist nach einer lokalen Minimalstelle der Oberfläche $f(r,h,k) := \pi(r^2+2rh+r(r^2+k^2)^{1/2})$ unter Nebenbedingung $g_1(r,h,k) := \frac{\pi}{3}r^2(3h+k)-45(5+3\sqrt{5})\pi = 0$ gefragt, auf dem Definitionsbereich $(\mathbf{R}_{>0})^3$.

Auffinden der Flachstellen von f unter Nebenbedingung $g = 0$.

Es wird $\nabla_f(r,h,k) = \pi \begin{pmatrix} 2r+2h+(r^2+k^2)^{1/2}+r^2(r^2+k^2)^{-1/2} \\ 2r \\ rk(r^2+k^2)^{-1/2} \end{pmatrix} = \pi \begin{pmatrix} 2r+2h+(2r^2+k^2)(r^2+k^2)^{-1/2} \\ 2r \\ rk(r^2+k^2)^{-1/2} \end{pmatrix}$.

Es wird $N(r,h,k) = \frac{\pi}{3} \begin{pmatrix} 6rh+2rk \\ 3r^2 \\ r^2 \end{pmatrix}$.

Die Spalte von $N(r,h,k)$ ist überall ungleich 0, d.h. das Spaltentupel von $N(r,h,k)$ ist überall linear unabhängig.

Wir haben also das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \pi \begin{pmatrix} 2r_0+2h_0+(2r_0^2+k_0^2)(r_0^2+k_0^2)^{-1/2} \\ 2r_0 \\ r_0k_0(r_0^2+k_0^2)^{-1/2} \end{pmatrix} &= \frac{\pi}{3} \begin{pmatrix} 6r_0h_0+2r_0k_0 \\ 3r_0^2 \\ r_0^2 \end{pmatrix} \rho_1 \\ \frac{\pi}{3}r_0^2(3h_0+k_0) &= 45(5+3\sqrt{5})\pi \end{aligned}$$

zu lösen.

Der zweite Vektoreintrag gibt $\rho_1 = 2r_0^{-1}$.

Der dritte Vektoreintrag gibt dann $r_0k_0(r_0^2+k_0^2)^{-1/2} = \frac{2}{3}r_0$, also $(r_0^2+k_0^2)^{-1/2} = \frac{2}{3}k_0^{-1}$, also $r_0^2+k_0^2 = \frac{9}{4}k_0^2$, also $r_0^2 = \frac{5}{4}k_0^2$, also $r_0 = \frac{1}{2}k_0\sqrt{5}$.

Der erste Vektoreintrag gibt dann

$$2r_0+2h_0+\tfrac{2}{3}(2r_0^2+k_0^2)k_0^{-1} \;=\; \tfrac{2}{3}(6h_0+2k_0)\ ,$$

d.h.

$$3r_0+3h_0+2r_0^2k_0^{-1}+k_0 \;=\; 6h_0+2k_0\ ,$$

d.h.

$$\tfrac{3}{2}k_0\sqrt{5}+3h_0+\tfrac{5}{2}k_0+k_0 \;=\; 6h_0+2k_0\ ,$$

d.h.

$$\tfrac{1}{2}k_0(1+\sqrt{5}) \;=\; h_0$$

Die untere Gleichung gibt schließlich

$$\tfrac{\pi}{3}(\tfrac{5}{4}k_0^2(\tfrac{3}{2}k_0(1+\sqrt{5})+k_0)) \;=\; 45(5+3\sqrt{5})\pi\ ,$$

d.h.

$$\tfrac{5}{12}k_0^3(\tfrac{5}{2}+\tfrac{3}{2}\sqrt{5}) \;=\; 45(5+3\sqrt{5})\ ,$$

d.h.

$$\tfrac{5}{24}k_0^3(5+3\sqrt{5}) \;=\; 45(5+3\sqrt{5})\ ,$$

d.h. $\frac{5}{24}k_0^3 = 45$, d.h. $k_0^3 = 216$, d.h. $k_0 = 6$.

Es folgen $r_0 = \frac{1}{2}k_0\sqrt{5} = 3\sqrt{5}$ und $h_0 = \frac{1}{2}k_0(1+\sqrt{5}) = 3+3\sqrt{5}$.

Einsetzen bestätigt, daß $(r_0\,,h_0\,,k_0) = (3\sqrt{5}, 3+3\sqrt{5}, 6)$ in der Tat eine Flachstelle von f unter Nebenbedingung $g = 0$ ist. Der zugehörige Lagrangemultiplikator besteht aus $\rho_1 = \frac{2}{15}\sqrt{5}$.

Untersuchung der Flachstelle $(r_0\,,h_0\,,k_0) = (3\sqrt{5}, 3+3\sqrt{5}, 6)$ auf Extremstelle, jeweils unter Nebenbedingung $g = 0$.

Das lineare Gleichungssystem $N(3\sqrt{5}, 3+3\sqrt{5}, 6)^{\mathrm{t}}\,u = 0$, d.h. $\frac{\pi}{3}\begin{pmatrix} 270+90\sqrt{5} & 135 & 45 \end{pmatrix} u = 0$ liefert

$$U \;=\; \begin{pmatrix} -\frac{3}{8}(3-\sqrt{5}) & -\frac{1}{8}(3-\sqrt{5}) \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Es ist

$$\begin{aligned} F(r,h,k) &:= f(r,h,k) - \rho_1 g_1(r,h,k) \\ &= \pi\big((r^2 + 2rh + r(r^2+k^2)^{1/2}\big) - \tfrac{2}{15}\sqrt{5}\big(\tfrac{1}{3}r^2(3h+k) - 45(5+3\sqrt{5})\big)\big) \; . \end{aligned}$$

Also ist

$$\begin{aligned} &\mathrm{H}_F(r,h,k) \\ = \;& \pi\Big(\begin{pmatrix} 2{+}4r(r^2{+}k^2)^{-1/2}{-}(2r^2{+}k^2)r(r^2{+}k^2)^{-3/2} & 2 & 2k(r^2{+}k^2)^{-1/2}{-}(2r^2{+}k^2)k(r^2{+}k^2)^{-3/2} \\ 2 & 0 & 0 \\ k(r^2{+}k^2)^{-1/2}{-}\,rkr(r^2{+}k^2)^{-3/2} & 0 & r(r^2{+}k^2)^{-1/2}{-}\,rk^2(r^2{+}k^2)^{-3/2} \end{pmatrix} - \tfrac{2}{45}\sqrt{5}\begin{pmatrix} 0 & 6r & 2r \\ 6r & 0 & 0 \\ 2r & 0 & 0 \end{pmatrix}\Big) \\ = \;& \pi\Big(\begin{pmatrix} 2{+}r(2r^2{+}3k^2)(r^2{+}k^2)^{-3/2} & 2 & k^3(r^2{+}k^2)^{-3/2} \\ 2 & 0 & 0 \\ k^3(r^2{+}k^2)^{-3/2} & 0 & r^3(r^2{+}k^2)^{-3/2} \end{pmatrix} - \tfrac{2}{45}\sqrt{5}\begin{pmatrix} 0 & 6r & 2r \\ 6r & 0 & 0 \\ 2r & 0 & 0 \end{pmatrix}\Big) \end{aligned}$$

und somit insbesondere

$$\begin{aligned} \mathrm{H}_F(3\sqrt{5}, 3+3\sqrt{5}, 6) &= \pi\Big(\begin{pmatrix} 2{+}22\sqrt{5}/27 & 2 & 8/27 \\ 2 & 0 & 0 \\ 8/27 & 0 & 5\sqrt{5}/27 \end{pmatrix} - \tfrac{2}{45}\sqrt{5}\begin{pmatrix} 0 & 18\sqrt{5} & 6\sqrt{5} \\ 18\sqrt{5} & 0 & 0 \\ 6\sqrt{5} & 0 & 0 \end{pmatrix}\Big) \\ &= \tfrac{\pi}{27}\begin{pmatrix} 54{+}22\sqrt{5} & -54 & -28 \\ -54 & 0 & 0 \\ -28 & 0 & 5\sqrt{5} \end{pmatrix} \; . \end{aligned}$$

Nun hat

$$\begin{aligned} U^{\mathrm{t}}\,\mathrm{H}_F(3\sqrt{5}, 3+3\sqrt{5}, 6)\,U &= \tfrac{\pi}{27}\begin{pmatrix} -\frac{3}{8}(3{-}\sqrt{5}) & 1 & 0 \\ -\frac{1}{8}(3{-}\sqrt{5}) & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 54{+}22\sqrt{5} & -54 & -28 \\ -54 & 0 & 0 \\ -28 & 0 & 5\sqrt{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\frac{3}{8}(3{-}\sqrt{5}) & -\frac{1}{8}(3{-}\sqrt{5}) \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \tfrac{\pi}{108}\begin{pmatrix} 540{-}171\sqrt{5} & 225{-}72\sqrt{5} \\ 225{-}72\sqrt{5} & 90{-}9\sqrt{5} \end{pmatrix} \; , \end{aligned}$$

den ersten Hauptminor

$$\tfrac{\pi}{108}(540 - 171\sqrt{5}) \;\approx\; 4{,}585 \;>\; 0$$

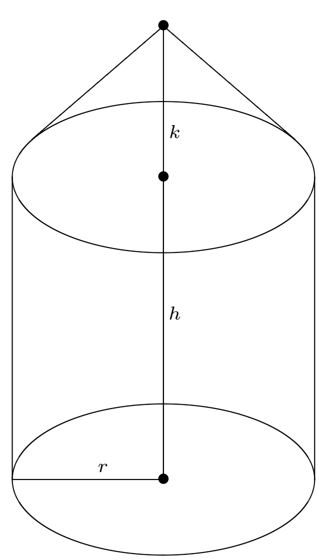
und den zweiten Hauptminor

$$\tfrac{\pi^2}{108^2}(-20250 + 12150\sqrt{5}) \;\approx\; 5{,}854 \;>\; 0 \; ,$$

ist also positiv definit. Also ist

$$(r_0\,, h_0\,, k_0) \;=\; (3\sqrt{5}, 3+3\sqrt{5}, 6) \;\approx\; (6{,}708\;,\; 9{,}708\;,\; 6)$$

in der Tat eine lokale Minimalstelle von f unter der Nebenbedingung $g = 0$.
Skizze einer Dose.

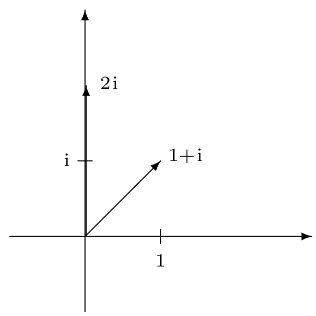


Aufgabe 136

(1) Es wird $(2+3\mathrm{i})-(5+\mathrm{i}) = 2+3\mathrm{i}-5-\mathrm{i} = -3+2\mathrm{i}$.

(2) Es wird $(2+3\mathrm{i})(5+2\mathrm{i}) = 10+15\mathrm{i}+4\mathrm{i}+6\mathrm{i}^2 = 4+19\mathrm{i}$.

(3) Es wird $(1+\mathrm{i})^2 = 1+2\mathrm{i}+\mathrm{i}^2 = 2\mathrm{i}$.
Skizze.



(4) Es wird $\dfrac{2+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}} = \dfrac{(2+\mathrm{i})(1+\mathrm{i})}{(1-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})} = \dfrac{2+2\mathrm{i}+\mathrm{i}+\mathrm{i}^2}{1^2-\mathrm{i}^2} = \dfrac{1+3\mathrm{i}}{2} = \frac{1}{2}+\frac{3}{2}\mathrm{i}$.

Aufgabe 137

(1) Es wird $\frac{2}{1+\mathrm{i}} - \frac{1}{1-\mathrm{i}} = \frac{2(1-\mathrm{i})}{(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})} - \frac{1+\mathrm{i}}{(1-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})} = (1-\mathrm{i}) - \frac{1+\mathrm{i}}{2} = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}\,\mathrm{i}$.

(2) Es wird $(2+\mathrm{i})^6 = ((2+\mathrm{i})^2)^3 = (4+4\mathrm{i}+\mathrm{i}^2)^3 = (3+4\mathrm{i})^3 = 3^3+3\cdot 3^2\cdot 4\mathrm{i}+3\cdot 3\cdot 4^2\mathrm{i}^2+4^3\mathrm{i}^3 = 27+108\mathrm{i}-144-64\mathrm{i} = -117+44\mathrm{i}$.

(3) Es wird $(1+\mathrm{i})^{18} = ((1+\mathrm{i})^2)^9 = (1+2\mathrm{i}+\mathrm{i}^2)^9 = (2\mathrm{i})^9 = 512(\mathrm{i}^4)^2\mathrm{i} = 512\mathrm{i}$.

(4) Es wird $(\frac{3+2\mathrm{i}}{2-\mathrm{i}})^2 = (\frac{(3+2\mathrm{i})(2+\mathrm{i})}{(2-\mathrm{i})(2+\mathrm{i})})^2 = (\frac{6+3\mathrm{i}+4\mathrm{i}+2\mathrm{i}^2}{5})^2 = \frac{1}{25}(4+7\mathrm{i})^2 = \frac{1}{25}(16+56\mathrm{i}+49\mathrm{i}^2) = -\frac{33}{25}+\frac{56}{25}\,\mathrm{i}$.

(5) Es wird $|(3+4\mathrm{i})^3| = |(3+4\mathrm{i})|^3 = ((3^2+4^2)^{1/2})^3 = 125$.

(6) Es wird

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}((1+2\mathrm{i})^{-2}(\overline{2-\mathrm{i}})) &= \mathrm{Re}(\tfrac{1}{25}(1-2\mathrm{i})^2(2+\mathrm{i})) \\ &= \tfrac{1}{25}\,\mathrm{Re}((-3-4\mathrm{i})(2+\mathrm{i})) \\ &= \tfrac{1}{25}\,\mathrm{Re}(-6-8\mathrm{i}-3\mathrm{i}+4) \\ &= -\tfrac{2}{25}\,. \end{aligned}$$

Aufgabe 138

Schreibe $z = a+b\mathrm{i}$ und $w = c+d\mathrm{i}$ mit $a,\,b,\,c,\,d\,\in\,\mathbf{R}$.

(1) Es wird $\overline{z+w} = \overline{a+b\mathrm{i}+c+d\mathrm{i}} = a-b\mathrm{i}+c-d\mathrm{i} = \overline{a+b\mathrm{i}}+\overline{c+d\mathrm{i}} = \bar{z}+\bar{w}$.

(2) Es wird $\bar{z}\cdot\bar{w} = (\overline{a+b\mathrm{i}})\cdot(\overline{c+d\mathrm{i}}) = (a-b\mathrm{i})\cdot(c-d\mathrm{i}) = (ac-bd)-(ad+bc)\mathrm{i} = \overline{(ac-bd)+(ad+bc)\mathrm{i}} = \overline{(a+b\mathrm{i})\cdot(c+d\mathrm{i})} = \overline{z\cdot w}$.

(3) Es wird $z\bar{z} = (a+b\mathrm{i})(a-b\mathrm{i}) = a^2-b^2\mathrm{i}^2 = a^2+b^2 = |z|^2$.

(4) Es wird $\frac{1}{2}(z+\bar{z}) = \frac{1}{2}((a+b\mathrm{i})+(a-b\mathrm{i})) = a = \mathrm{Re}(z)$ und $\frac{1}{2\mathrm{i}}(z-\bar{z}) = \frac{1}{2\mathrm{i}}((a+b\mathrm{i})-(a-b\mathrm{i})) = b = \mathrm{Im}(z)$.

(5) Mit (2) und (3) wird $|zw| = (|zw|^2)^{1/2} = (zw\overline{zw})^{1/2} = (zw\bar{z}\bar{w})^{1/2} = (z\bar{z}w\bar{w})^{1/2} = (|z|^2|w|^2)^{1/2} = |z||w|$.

(6) Es wird $1 = |1| = |zz^{-1}| = |z||z^{-1}|$, und also $|z^{-1}| = |z|^{-1}$.

Aufgabe 139

(1) Wir setzen $z = a+b\mathrm{i}$ an mit $a,\, b \in \mathbf{R}$. Es sollte $-\mathrm{i} \overset{!}{=} (a+b\mathrm{i})^2 = a^2+2ab\mathrm{i}+b^2\mathrm{i}^2 = (a^2-b^2)+2ab\mathrm{i}$ sein. In anderen Worten, wir suchen nach den Lösungen des (nichtlinearen) Gleichungssystems

$$\begin{array}{rcl} a^2 - b^2 & = & 0 \\ 2ab & = & -1 \end{array}$$

Da hilft nur Einsetzverfahren.

Aus der zweiten Gleichung folgt $a,\, b \neq 0$ und $b = -\frac{1}{2a}$. Dies eingesetzt in die erste Gleichung erhalten wir $a^2 = b^2 = \frac{1}{4a^2}$, also $a^4 = \frac{1}{4}$, also $a^2 = \pm\frac{1}{2}$. Da $a \in \mathbf{R}$ ist, folgt $a^2 = \frac{1}{2}$. Daraus wiederum ergibt sich $a = \pm\frac{1}{2}\sqrt{2}$. Somit wird $b = -\frac{1}{2a} = \mp\frac{1}{2}\sqrt{2}$. Für jede Lösung $z \in \mathbf{C}$ ist also

$$z \;\in\; \{-\tfrac{1}{2}\sqrt{2}(1-\mathrm{i}),\, +\tfrac{1}{2}\sqrt{2}(1-\mathrm{i})\}\;.$$

Umgekehrt sind dies beides auch Lösungen.

Alternative Lösung. Man rät, daß $\pm\frac{1}{2}\sqrt{2}(1-\mathrm{i})$ Lösungen sind und bringt vor, daß das Polynom $z^2+\mathrm{i}$ wegen Grad 2 maximal 2 Nullstellen haben kann.

(2) Schreibe $w := z^2$. Es muß $w^2 = -1$ sein. Wir setzen $w = c + d\mathrm{i}$ an mit $c,\, d \in \mathbf{R}$. Es sollte $-1 \overset{!}{=} (c+d\mathrm{i})^2 = (c^2-d^2) + 2cd\mathrm{i}$ sein. Wir suchen also die Lösungen des Gleichungssystems

$$\begin{array}{rcl} c^2 - d^2 & = & -1 \\ 2cd & = & 0 \end{array}$$

Wegen $c \in \mathbf{R}$ gibt die erste Gleichung, daß $d^2 = 1 + c^2 \neq 0$, mithin $d \neq 0$. Daher gibt die zweite Gleichung, daß $c = 0$. Die erste Gleichung dann wiederum gibt $d^2 = 1$, also $d = \pm 1$. Für jede Lösung $w \in \mathbf{C}$ mit $w^2 = 1$ ist also

$$w \;\in\; \{-\mathrm{i}, +\mathrm{i}\}\;.$$

Umgekehrt sind dies beides auch Lösungen.

Nun haben wir noch $z^2 = w$ in diesen beiden Fällen zu lösen.

Fall $w = -\mathrm{i}$. Aus (1) erhalten wir $z \in \{-\frac{1}{2}\sqrt{2}(1-\mathrm{i}),\, +\frac{1}{2}\sqrt{2}(1-\mathrm{i})\}$.

Fall $w = \mathrm{i}$. Wir gehen analog zu (1) vor. Wir setzen $z = a + b\mathrm{i}$ an mit $a,\, b \in \mathbf{R}$. Es sollte $\mathrm{i} \overset{!}{=} (a+b\mathrm{i})^2 = (a^2-b^2) + 2ab\mathrm{i}$ sein. In anderen Worten, wir suchen nach den Lösungen des (nichtlinearen) Gleichungssystems

$$\begin{array}{rcl} a^2 - b^2 & = & 0 \\ 2ab & = & 1 \end{array}$$

Aus der zweiten Gleichung folgt $a,\, b \neq 0$ und $b = \frac{1}{2a}$. Dies eingesetzt in die erste Gleichung erhalten wir $a^2 = b^2 = \frac{1}{4a^2}$, also $a^4 = \frac{1}{4}$, also $a^2 = \pm\frac{1}{2}$. Da $a \in \mathbf{R}$ ist, folgt $a^2 = \frac{1}{2}$. Daraus wiederum ergibt sich $a = \pm\frac{1}{2}\sqrt{2}$. Somit wird $b = \frac{1}{2a} = \pm\frac{1}{2}\sqrt{2}$. Für jede Lösung $z \in \mathbf{C}$ ist also

$$z \;\in\; \{-\tfrac{1}{2}\sqrt{2}(1+\mathrm{i}),\, +\tfrac{1}{2}\sqrt{2}(1+\mathrm{i})\}\;.$$

Umgekehrt sind dies beides auch Lösungen.

Insgesamt ist für $z \in \mathbf{C}$ also genau dann $z^4 = 1$, wenn

$$z \;\in\; \{-\tfrac{1}{2}\sqrt{2}(1-\mathrm{i}),\, +\tfrac{1}{2}\sqrt{2}(1-\mathrm{i}),\, -\tfrac{1}{2}\sqrt{2}(1+\mathrm{i}),\, +\tfrac{1}{2}\sqrt{2}(1+\mathrm{i})\}\;.$$

Alternative Lösung. Man rät diese 4 Lösungen sind und bringt vor, daß das Polynom $z^4 - 1$ in $\mathbf{C}$ wegen Grad 4 maximal 4 Nullstellen haben kann.

Aufgabe 140

(1) Schreibe $z = a + b\mathrm{i}$ mit $a,\, b \in \mathbf{R}$.

Eine Lösung ist $z = 1$. Weitere reelle Zahlen treten nicht als Lösung auf. Also können wir $b \neq 0$ voraussetzen.

Es wird $(a + b\mathrm{i})^3 = a^3 + 3a^2b\mathrm{i} + 3ab^2\mathrm{i}^2 + b^3\mathrm{i}^3 = a(a^2 - 3b^2) + (3a^2 - b^2)b\mathrm{i}$.

Somit haben wir das Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcl} a(a^2 - 3b^2) & = & 1 \\ (3a^2 - b^2)b & = & 0 \end{array}$$

Aus der zweiten Gleichung und aus $b \neq 0$ folgt $b^2 = 3a^2$. Dies in die erste Gleichung eingesetzt gibt $a(a^2 - 9a^2) = 1$, d.h. $-8a^3 = 1$, d.h. $a = -\frac{1}{2}$. Daraus dann wiederum ergibt sich $b^2 = \frac{3}{4}$, d.h. $b = \pm\frac{1}{2}\sqrt{3}$.

Jede Lösung erfüllt also

$$z \;=\; a + b\mathrm{i} \;\in\; \{1,\ -\tfrac{1}{2} + \tfrac{\mathrm{i}}{2}\sqrt{3},\ -\tfrac{1}{2} - \tfrac{\mathrm{i}}{2}\sqrt{3}\}\ .$$

Dies sind alle drei in der Tat Lösungen von $z^3 = 1$, wie man durch Einsetzen bestätigt.

(2) Finden wir zunächst alle Lösungen von $w^2 = 1$ mit $w \in \mathbf{C}$.

Setzen wir $w = c + d\mathrm{i}$ mit $c,\, d \in \mathbf{R}$ an. Es ist $z^2 = c^2 - d^2 + 2cd\mathrm{i}$.

Aus $c^2 - d^2 = 1$ und $2cd = 0$ folgt $c \neq 0$, also $d = 0$, also $c = \pm 1$. Also

$$w \;=\; c + d\mathrm{i} \;\in\; \{-1,\ +1\}\ .$$

Beides sind in der Tat Lösungen.

Also ist für $z \in \mathbf{C}$

$$z^6 \;=\; 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad (z^3)^2 \;=\; 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad z^3 \;\in\; \{-1, +1\}\ .$$

Aus (1) wissen wir bereits, daß

$$z^3 \;=\; 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad z \;\in\; \{1,\ -\tfrac{1}{2} + \tfrac{\mathrm{i}}{2}\sqrt{3},\ -\tfrac{1}{2} - \tfrac{\mathrm{i}}{2}\sqrt{3}\}\ .$$

Bleiben also alle $z \in \mathbf{C}$ mit $z^3 = -1$ zu finden. Wiederum mit (1) wird

$$\begin{array}{rcl} z^3 = -1 & \Longleftrightarrow & (-z)^3 = 1 \\ & \Longleftrightarrow & -z \;\in\; \{1,\ -\tfrac{1}{2} + \tfrac{\mathrm{i}}{2}\sqrt{3},\ -\tfrac{1}{2} - \tfrac{\mathrm{i}}{2}\sqrt{3}\} \\ & \Longleftrightarrow & z \;\in\; \{-1,\ \tfrac{1}{2} - \tfrac{\mathrm{i}}{2}\sqrt{3},\ \tfrac{1}{2} + \tfrac{\mathrm{i}}{2}\sqrt{3}\}\ . \end{array}$$

Insgesamt ist $z^6 = 1$ für $z \in \mathbf{C}$ genau dann erfüllt, wenn

$$z \;\in\; \{-1,\ +1,\ \tfrac{1}{2} + \tfrac{\mathrm{i}}{2}\sqrt{3},\ \tfrac{1}{2} - \tfrac{\mathrm{i}}{2}\sqrt{3},\ -\tfrac{1}{2} + \tfrac{\mathrm{i}}{2}\sqrt{3},\ -\tfrac{1}{2} - \tfrac{\mathrm{i}}{2}\sqrt{3}\}\ .$$

Vgl. auch Aufgabe 146 unten.

Aufgabe 141

(1) Es wird $|z| = |\,\mathrm{Re}(z) + \mathrm{i}\,\mathrm{Im}(z)| \overset{\text{D.U.}}{\leqslant} |\,\mathrm{Re}(z)| + |\mathrm{i}\,\mathrm{Im}(z)| = |\,\mathrm{Re}(z)| + |\,\mathrm{Im}(z)|$.

(2) Zur ersten Ungleichung.
Zum einen ist

$$|z| - |w| \;=\; |(z-w)+w| - |w| \;\overset{\text{D.U.}}{\leqslant}\; |z-w| + |w| - |w| \;=\; |z-w|$$

Zum anderen gibt nun Vertauschung von w und z

$$|w| - |z| \leqslant |w-z| \;=\; |z-w|$$

Insgesamt also

$$||z| - |w|| \;=\; \max\{|z|-|w|,\, |w|-|z|\} \;\leqslant\; |z-w|\,.$$

Zweitere Ungleichung folgt aus ersterer durch Ersetzen von w durch $-w$.

Vgl. §1.2.

Aufgabe 142

Es wird

$$\sin(\mathrm{i}) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \tfrac{\mathrm{i}^{2n+1}}{(2n+1)!} \;\approx\; \mathrm{i} - \tfrac{1}{6}\mathrm{i}^3 + \tfrac{1}{120}\mathrm{i}^5 \;=\; (1+\tfrac{1}{6}+\tfrac{1}{120})\mathrm{i} \;=\; \tfrac{141}{120}\,\mathrm{i} \;=\; 1{,}175\,\mathrm{i}\ .$$

Allgemein ist $\sin(z) = \frac{1}{2\mathrm{i}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,z} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,z})$ für $z \in \mathbf{C}$; cf. Bemerkung aus §11.2.2. Speziell wird also

$$\sin(\mathrm{i}) \;=\; \tfrac{1}{2\mathrm{i}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot\mathrm{i}} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\cdot\mathrm{i}}) \;=\; -\tfrac{\mathrm{i}}{2}(\mathrm{e}^{-1} - \mathrm{e}^{1}) \;=\; \tfrac{\mathrm{i}}{2}(\mathrm{e} - \tfrac{1}{\mathrm{e}}) \;\approx\; 1{,}17520119\,\mathrm{i}\ ,$$

in guter Übereinstimmung mit der zuvor bestimmten Näherung mittels definierender Reihe.

Aufgabe 143

(1) Es wird $\mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}/2} = \mathrm{e}^{0+(\pi/2)\mathrm{i}} = \mathrm{e}^0(\cos(\pi/2) + \mathrm{i}\sin(\pi/2)) = \mathrm{i}$.

(2) Es wird $\mathrm{e}^{\ln(2)+\pi\mathrm{i}/3} = \mathrm{e}^{\ln(2)}(\cos(\pi/3) + \mathrm{i}\sin(\pi/3)) = 2(\frac{1}{2} + \frac{\mathrm{i}}{2}\sqrt{3}) = 1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$.

Aufgabe 144

(1) Es wird $\mathrm{e}^{1+3\mathrm{i}\pi/2} = \mathrm{e}^1(\cos(3\pi/2) + \mathrm{i}\sin(3\pi/2)) = \mathrm{e}(0+\mathrm{i}(-1)) = -\mathrm{i}\mathrm{e} = -2{,}71828\,\mathrm{i}$.

(2) Es wird

$$\mathrm{Im}(\mathrm{e}^{-\ln(7)+7\mathrm{i}\pi/6}) \;=\; \mathrm{Im}(\mathrm{e}^{-\ln(7)}(\cos(7\pi/6) + \mathrm{i}\sin(7\pi/6))) \;=\; \mathrm{e}^{-\ln(7)}\sin(7\pi/6) \;=\; \tfrac{1}{7}(-\tfrac{1}{2}) \;=\; -\tfrac{1}{14} \;\approx\; 0{,}07143\ .$$

(3) Es wird $\mathrm{e}^{((1+\mathrm{i})^{-1})} = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}-\frac{\mathrm{i}}{2}} = \mathrm{e}^{1/2}(\cos(-1/2) + \mathrm{i}\sin(-1/2)) \approx 1{,}44689 - 0{,}79044\,\mathrm{i}$.

(4) Es wird

$$\mathrm{e}^{\ln(3)(1+\mathrm{i})} \;=\; \mathrm{e}^{\ln(3)}(\cos(\ln(3)) + \mathrm{i}\sin(\ln(3))) \;=\; 3(\cos(\ln(3)) + \mathrm{i}\sin(\ln(3))) \;\approx\; 1{,}36449 + 2{,}67173\,\mathrm{i}\ .$$

Aufgabe 145

(1) Es wird z.B.

$$\cos(2\mathrm{i}) \;=\; \tfrac{1}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot 2\mathrm{i}} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\cdot 2\mathrm{i}}) \;=\; \tfrac{1}{2}(\mathrm{e}^{-2} + \mathrm{e}^2) \;\approx\; 3{,}762196 \;\in\; \mathbf{R}_{>2}\,;$$

vgl. Bemerkung aus §11.2.2.

(2) Allgemein gilt

$$\cos(z+\pi) \;=\; \tfrac{1}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(z+\pi)} + \mathrm{e}^{-(\mathrm{i}z+\pi)}) \;=\; \tfrac{1}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}\mathrm{e}{-}\mathrm{i}\pi) \;=\; \tfrac{1}{2}(-\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}) \;=\; -\cos(z)$$

für $z \in \mathbf{C}$.

Speziell wird z.B.

$$\cos(2\mathrm{i}+\pi) \;=\; -\cos(2\mathrm{i}) \;\approx\; -3{,}762196 \;\in\; \mathbf{R}_{<-2}\;.$$

Aufgabe 146

(1) Von vorneherein ist $z \neq 0$, da $0^3 = 0 \neq 1$.

Wir suchen $x \in \mathbf{R}$ und $y \in [0, 2\pi)$ mit $z = \mathrm{e}^{x+\mathrm{i}y}$ so, daß $z^3 = \mathrm{e}^{3(x+\mathrm{i}y)} \overset{!}{=} 1$.

Dies gibt

$$1 \;\overset{!}{=}\; \mathrm{e}^{3(x+\mathrm{i}y)} \;=\; \mathrm{e}^{3x}(\cos(3y) + \mathrm{i}\sin(3y))\;.$$

Insbesondere sollte

$$1 \;=\; |1| \overset{!}{=} |\mathrm{e}^{3x}(\cos(3y) + \mathrm{i}\sin(3y))| \;=\; \mathrm{e}^{3x}$$

sein, also $x = 0$; beachte, daß die Exponentialfunktion eine überall positive Ableitung hat, daher streng monoton wachsend und insbesondere injektiv ist.

Es verbleibt

$$1 \;\overset{!}{=}\; \cos(3y) + \mathrm{i}\sin(3y)\;.$$

Vergleich der Realteile liefert die Bedingung $3y \overset{!}{\in} \{\, 2\pi k \,:\, k \in \mathbf{Z}\,\}$, d.h. $y \overset{!}{\in} \{\, 2\pi k/3 \,:\, k \in \mathbf{Z}\,\}$. Da zudem $y \in [0, 2\pi)$ vorausgesetzt ist, folgt $y \in \{0,\, 2\pi/3,\, 4\pi/3\}$.

Für diese y ist auch $\sin(3y) = 0$ erfüllt; also gilt dort auch die Gleichheit der Imaginärteile.

Wir erhalten

$$\{\, z \in \mathbf{C} \,:\, z^3 = 1\,\} \;=\; \{\, \cos(y) + \mathrm{i}\sin(y) \,:\, y \in \{0,\, 2\pi/3,\, 4\pi/3\}\,\} \;=\; \{\, 1,\; -\tfrac{1}{2} + \tfrac{\mathrm{i}}{2}\sqrt{3},\; -\tfrac{1}{2} - \tfrac{\mathrm{i}}{2}\sqrt{3}\,\}\;.$$

(2) Von vorneherein ist $z \neq 0$, da $0^6 = 0 \neq 1$.

Wir suchen $x \in \mathbf{R}$ und $y \in [0, 2\pi)$ mit $z = \mathrm{e}^{x+\mathrm{i}y}$ so, daß $z^6 = \mathrm{e}^{6(x+\mathrm{i}y)} \overset{!}{=} 1$.

Dies gibt

$$1 \;\overset{!}{=}\; \mathrm{e}^{6(x+\mathrm{i}y)} \;=\; \mathrm{e}^{6x}(\cos(6y) + \mathrm{i}\sin(6y))\;.$$

Insbesondere sollte

$$1 \;=\; |1| \overset{!}{=} |\mathrm{e}^{3x}(\cos(3y) + \mathrm{i}\sin(3y))| \;=\; \mathrm{e}^{3x}$$

sein, also $x = 0$. Es verbleibt

$$1 \;\overset{!}{=}\; \cos(6y) + \mathrm{i}\sin(6y)\;.$$

Vergleich der Realteile liefert die Bedingung $6y \overset{!}{\in} \{\, 2\pi k \,:\, k \in \mathbf{Z}\,\}$, d.h. $y \overset{!}{\in} \{\, \pi k/3 \,:\, k \in \mathbf{Z}\,\}$. Da zudem $y \in [0, 2\pi)$ vorausgesetzt ist, folgt

$$y \;\in\; \{0\pi/3,\, 1\pi/3,\, 2\pi/3,\, 3\pi/3,\, 4\pi/3,\, 5\pi/3\} \;=\; \{0,\, \pi/3,\, 2\pi/3,\, \pi,\, 4\pi/3,\, 5\pi/3\}\;.$$

Für diese y ist auch $\sin(6y) = 0$ erfüllt; also gilt dort auch die Gleichheit der Imaginärteile.

Wir erhalten

$$\begin{aligned} \{\, z \in \mathbf{C} \,:\, z^6 = 1\,\} \;&=\; \{\, \cos(y) + \mathrm{i}\sin(y) \,:\, y \in \{0,\, \pi/3,\, 2\pi/3,\, \pi,\, 4\pi/3,\, 5\pi/3\}\,\} \\ &=\; \{\, 1,\; \tfrac{1}{2} + \tfrac{\mathrm{i}}{2}\sqrt{3},\; -\tfrac{1}{2} + \tfrac{\mathrm{i}}{2}\sqrt{3},\; -1,\; -\tfrac{1}{2} - \tfrac{\mathrm{i}}{2}\sqrt{3},\; \tfrac{1}{2} - \tfrac{\mathrm{i}}{2}\sqrt{3}\,\}\;. \end{aligned}$$

Vgl. Aufgabe 140.

Aufgabe 147

(1) Quadratische Ergänzung gibt
$$z^2 + 2z + 2 = (z+1)^2 + 1\,.$$
Also ist
$$\begin{array}{rcl} \{\, z \in \mathbf{C} \,:\, z^2 + 2z + 2 = 0 \,\} & = & \{\, z \in \mathbf{C} \,:\, (z+1)^2 = -1 \,\} \\ & = & \{\, z \in \mathbf{C} \,:\, z + 1 \in \{-\mathrm{i}\,,\, +\mathrm{i}\} \,\} \\ & = & \{-1-\mathrm{i}\,,\, -1+\mathrm{i}\}\,. \end{array}$$

(2) Setzen wir $z = w^2$, so folgt $z^2 + 2z + 2 = 0$, was dank (1) äquivalent ist zu $z \in \{-1-\mathrm{i}\,,\, -1+\mathrm{i}\}$. Es ist $w^2 = -1-\mathrm{i} = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{5\pi\mathrm{i}/4}$ äquivalent zu
$$w \;\in\; \{\, -2^{1/4}\mathrm{e}^{5\pi\mathrm{i}/8},\; +2^{1/4}\mathrm{e}^{5\pi\mathrm{i}/8} \,\} \;=\; \{\, 2^{1/4}\mathrm{e}^{13\pi\mathrm{i}/8},\; 2^{1/4}\mathrm{e}^{5\pi\mathrm{i}/8} \,\}\,.$$
Es ist $w^2 = -1+\mathrm{i} = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{3\pi\mathrm{i}/4}$ äquivalent zu
$$w \;\in\; \{\, -2^{1/4}\mathrm{e}^{3\pi\mathrm{i}/8},\; +2^{1/4}\mathrm{e}^{3\pi\mathrm{i}/8} \,\} \;=\; \{\, 2^{1/4}\mathrm{e}^{11\pi\mathrm{i}/8},\; 2^{1/4}\mathrm{e}^{3\pi\mathrm{i}/8} \,\}\,.$$
Also ist
$$\begin{array}{rl} & \{\, w \in \mathbf{C} \,:\, w^4 + 2w^2 + 2 = 0 \,\} \\ = & \{\, 2^{1/4}\mathrm{e}^{13\pi\mathrm{i}/8},\; 2^{1/4}\mathrm{e}^{5\pi\mathrm{i}/8},\; 2^{1/4}\mathrm{e}^{11\pi\mathrm{i}/8},\; 2^{1/4}\mathrm{e}^{3\pi\mathrm{i}/8} \,\} \\ \approx & \{\, 0{,}45509 - 1{,}09868\,\mathrm{i}\,,\; -0{,}45509 + 1{,}09868\,\mathrm{i}\,,\; -0{,}45509 - 1{,}09868\,\mathrm{i}\,,\; 0{,}45509 + 1{,}09868\,\mathrm{i} \,\}\,. \end{array}$$

Aufgabe 148

(1) Schreibe $z = x + \mathrm{i}y$ mit $x,\, y \in \mathbf{R}$. Gemäß Bemerkung aus §11.2.2 ist
$$\mathrm{e}^{\bar{z}} \;=\; \mathrm{e}^{x-\mathrm{i}y} \;=\; \mathrm{e}^{x}(\cos(-y) + \mathrm{i}\sin(-y)) \;=\; \mathrm{e}^{x}(\cos(y) - \mathrm{i}\sin(y)) \;=\; \overline{\mathrm{e}^{x}(\cos(y) + \mathrm{i}\sin(y))} \;=\; \overline{\mathrm{e}^{x+\mathrm{i}y}} \;=\; \overline{\mathrm{e}^{z}}\,.$$
Man könnte auch die die Exponentialfunktion definierende Reihe summandenweise konjugieren.

(2) Gemäß Bemerkung aus §11.2.2 ist
$$\begin{array}{rcl} \sin(z)^2 + \cos(z)^2 & = & (\frac{1}{2\mathrm{i}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}))^2 + (\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}))^2 \\ & = & -\frac{1}{4}((\mathrm{e}^{\mathrm{i}z})^2 - 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z} + (\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z})^2) + \frac{1}{4}((\mathrm{e}^{\mathrm{i}z})^2 + 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z} + (\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z})^2) \\ & = & \frac{1}{4}(-\mathrm{e}^{2\mathrm{i}z} + 2 - \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}z} + \mathrm{e}^{2\mathrm{i}z} + 2 + \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}z}) \\ & = & \frac{1}{4}(2+2) \\ & = & 1\,. \end{array}$$

(3) Es ist
$$\begin{array}{rl} & \sin(z)\cos(w) + \cos(z)\sin(w) \\ = & \frac{1}{2\mathrm{i}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}) \cdot \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}w} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}w}) + \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}) \cdot \frac{1}{2\mathrm{i}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}w} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}w}) \\ = & \frac{1}{4\mathrm{i}}\big((\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z})(\mathrm{e}^{\mathrm{i}w} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}w}) + (\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z})(\mathrm{e}^{\mathrm{i}w} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}w})\big) \\ = & \frac{1}{4\mathrm{i}}\big((\mathrm{e}^{\mathrm{i}(z+w)} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}(-z+w)} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}(z-w)} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(z+w)}) + (\mathrm{e}^{\mathrm{i}(z+w)} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}(-z+w)} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}(z-w)} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(z+w)})\big) \\ = & \frac{1}{4\mathrm{i}}\big((\mathrm{e}^{\mathrm{i}(z+w)} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(z+w)}) + (\mathrm{e}^{\mathrm{i}(z+w)} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(z+w)})\big) \\ = & \frac{1}{2\mathrm{i}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(z+w)} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(z+w)}) \\ = & \sin(z+w)\,. \end{array}$$

Es ist

$$\begin{aligned}
& \cos(z)\cos(w) - \sin(z)\sin(w) \\
= \; & \tfrac{1}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,z} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,z}) \cdot \tfrac{1}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,w} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,w}) - \tfrac{1}{2\mathrm{i}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,z} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,z}) \cdot \tfrac{1}{2\mathrm{i}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,w} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,w}) \\
= \; & \tfrac{1}{4}\big((\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,z} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,z})(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,w} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,w}) + (\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,z} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,z})(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,w} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,w})\big) \\
= \; & \tfrac{1}{4}\big((\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,(z+w)} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,(-z+w)} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,(z-w)} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,(z+w)}) + (\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,(z+w)} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,(-z+w)} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,(z-w)} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,(z+w)})\big) \\
= \; & \tfrac{1}{4}\big((\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,(z+w)} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,(z+w)}) + (\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,(z+w)} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,(z+w)})\big) \\
= \; & \tfrac{1}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,(z+w)} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,(z+w)}) \\
= \; & \cos(z+w)\,.
\end{aligned}$$

Vgl. Bemerkung aus §11.2.2.

Aufgabe 149

(1) Es wird

$$\cos(x)^2 \;=\; \frac{1}{2}(\cos(x)^2 - \sin(x)^2) + \frac{1}{2}(\cos(x)^2 + \sin(x)^2) \;=\; \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{1}{2}\cdot 1 \;=\; \frac{1}{2}(\cos(2x)+1)\,.$$

(2) Es wird

$$\begin{aligned}
\cos(x)^2 \;&=\; (\tfrac{1}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,x}))^2 \;=\; \tfrac{1}{4}((\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x})^2 + 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,x} + (\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,x})^2) \\
&=\; \tfrac{1}{4}(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\,x} + 2 + \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\,x}) \;=\; \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{2}(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\,x} + \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\,x}) + \tfrac{1}{4}\cdot 2 \;=\; \tfrac{1}{2}\cos(2x) + \tfrac{1}{2}\,.
\end{aligned}$$

(3) Es wird

$$\textstyle\int_0^\pi \cos(x)^2\,\mathrm{d}x \;=\; \tfrac{1}{2}\int_0^\pi(\cos(2x)+1)\,\mathrm{d}x \;=\; \tfrac{1}{2}[\tfrac{1}{2}\sin(2x)+x]_{x=0}^{\pi} \;=\; \tfrac{\pi}{2}\,.$$

(4) Es wird

$$\begin{aligned}
\textstyle\int_0^\pi \cos(x)^2\,\mathrm{d}x \;&=\; \textstyle\int_0^\pi \tfrac{1}{4}(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\,x} + 2 + \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\,x})\,\mathrm{d}x \\
&=\; [\tfrac{1}{4}(\tfrac{1}{2\mathrm{i}}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\,x} + 2x + \tfrac{1}{-2\mathrm{i}}\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\,x})]_{x=0}^{\pi} \\
&=\; \tfrac{1}{4}(\tfrac{1}{2\mathrm{i}}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\,\pi} + 2\pi + \tfrac{1}{-2\mathrm{i}}\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\,\pi}) - \tfrac{1}{4}(\tfrac{1}{2\mathrm{i}}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\cdot 0} + 2\cdot 0 + \tfrac{1}{-2\mathrm{i}}\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\cdot 0}) \\
&=\; \tfrac{1}{4}(\tfrac{1}{2\mathrm{i}} + 2\pi - \tfrac{1}{2\mathrm{i}}) - \tfrac{1}{4}(\tfrac{1}{2\mathrm{i}} - \tfrac{1}{2\mathrm{i}}) \\
&=\; \tfrac{\pi}{2}\,.
\end{aligned}$$

Aufgabe 150

(1) Mit der Eulerschen Formel aus §11.2.2 wird

$$\int_0^\pi \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x}\,\mathrm{d}x \;=\; \int_0^\pi(\cos(x)+\mathrm{i}\sin(x))\,\mathrm{d}x \;=\; [\sin(x)]_{x=0}^{\pi} + \mathrm{i}[-\cos(x)]_{x=0}^{\pi} \;=\; (0-0)+\mathrm{i}(1-(-1)) = 2\mathrm{i}\,.$$

(2) *Erster Weg.* Nach der Additionsregel für den Sinus aus §11.2.2 ist $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$. Mit einer linearen Substitution folgt

$$\begin{aligned}
\textstyle\int_0^{\pi/2}\sin(x)\cos(x)\,\mathrm{d}x \;&=\; \textstyle\tfrac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\sin(2x)\,\mathrm{d}x \\
&\overset{u=2x}{=}\; \textstyle\tfrac{1}{2}\int_0^{\pi}\sin(u)\tfrac{1}{2}\,\mathrm{d}u \\
&=\; \tfrac{1}{4}[-\cos(u)]_{u=0}^{\pi} \\
&=\; \tfrac{1}{4}(1-(-1)) \\
&=\; \tfrac{1}{2}\,;
\end{aligned}$$

vgl. §6.3.1, Beispiel, (3).

Zweiter Weg. Einsetzen der Formel für sin und cos in Termen der Exponentialfunktion aus §11.2.2 gibt

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/2} \sin(x)\cos(x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^{\pi/2} \tfrac{1}{2\mathrm{i}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}) \cdot \tfrac{1}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x})\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\pi/2} \tfrac{1}{4\mathrm{i}}(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x})\,\mathrm{d}x \\
&= \tfrac{1}{4\mathrm{i}}[\tfrac{1}{2\mathrm{i}}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x} - \tfrac{1}{-2\mathrm{i}}\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x}]_{x=0}^{\pi/2} \\
&= \tfrac{1}{4\mathrm{i}}\big(\tfrac{1}{2\mathrm{i}}((-1)-1) - \tfrac{1}{-2\mathrm{i}}((-1)-1)\big) \\
&= \tfrac{1}{4\mathrm{i}}(-\tfrac{1}{\mathrm{i}} - \tfrac{1}{\mathrm{i}}) \\
&= \tfrac{1}{2}\,.
\end{aligned}$$

(3) Einsetzen der Formel für sin und cos in Termen der Exponentialfunktion aus §11.2.2 gibt

$$\begin{aligned}
& \int_0^{\pi/2} \sin(x)^3\cos(x)^2\,\mathrm{d}x \\
= \;& \int_0^{\pi/2} (\tfrac{1}{2\mathrm{i}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}))^3 \cdot (\tfrac{1}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}))^2\,\mathrm{d}x \\
= \;& -\tfrac{1}{32\mathrm{i}}\int_0^{\pi/2} (\mathrm{e}^{3\mathrm{i}x} - 3\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + 3\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-3\mathrm{i}x})) \cdot (\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x} + 2 + \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x}))\,\mathrm{d}x \\
= \;& -\tfrac{1}{32\mathrm{i}}\int_0^{\pi/2} (\mathrm{e}^{5\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{3\mathrm{i}x} - 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + 2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-3\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-5\mathrm{i}x})\,\mathrm{d}x \\
= \;& -\tfrac{1}{32\mathrm{i}}[\tfrac{1}{5\mathrm{i}}\mathrm{e}^{5\mathrm{i}x} - \tfrac{1}{3\mathrm{i}}\mathrm{e}^{3\mathrm{i}x} - 2\tfrac{1}{\mathrm{i}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + 2\tfrac{1}{-\mathrm{i}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x} + \tfrac{1}{-3\mathrm{i}}\mathrm{e}^{-3\mathrm{i}x} - \tfrac{1}{-5\mathrm{i}}\mathrm{e}^{-5\mathrm{i}x}]\,\mathrm{d}x \\
= \;& -\tfrac{1}{32\mathrm{i}}[\tfrac{1}{5\mathrm{i}}(\mathrm{e}^{5\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-5\mathrm{i}x}) - \tfrac{1}{3\mathrm{i}}(\mathrm{e}^{3\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-3\mathrm{i}x}) - 2\tfrac{1}{\mathrm{i}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x})]_{x=0}^{\pi/2} \\
= \;& -\tfrac{1}{32\mathrm{i}}(\tfrac{1}{5\mathrm{i}}(-2) - \tfrac{1}{3\mathrm{i}}(-2) - 2\tfrac{1}{\mathrm{i}}(-2)) \\
= \;& -\tfrac{1}{16}(\tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{3} - 2\tfrac{1}{1}) \\
= \;& \tfrac{2}{15} \\
= \;& 0{,}1\overline{3}\,.
\end{aligned}$$

Aufgabe 151

(1) Schreibe $r := \mathrm{Re}(\lambda)$ und $s := \mathrm{Im}(\lambda)$. Schreibe $u(x) := \mathrm{Re}(f(x))$ und $v(x) := \mathrm{Im}(f(x))$ für $x \in D$. Unter der Verwendung der Definition eines Integrals einer komplexwertigen Funktion aus §11.3.2 und der reellen Regeln für Vertauschung von Linearkombinationen und Integralen aus §6.2 wird

$$\begin{aligned}
\int_a^b \lambda f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_a^b (r + s\mathrm{i})(u(x) + \mathrm{i}v(x))\,\mathrm{d}x \\
&= \int_a^b ((ru(x) - sv(x)) + \mathrm{i}(rv(x) + su(x))\,\mathrm{d}x \\
&= \int_a^b (ru(x) - sv(x)\,\mathrm{d}x + \mathrm{i}\int_a^b (rv(x) + su(x)\,\mathrm{d}x \\
&= r\int_a^b u(x)\,\mathrm{d}x - s\int_a^b v(x)\,\mathrm{d}x + \mathrm{i}r\int_a^b v(x)\,\mathrm{d}x + \mathrm{i}s\int_a^b u(x)\,\mathrm{d}x \\
&= (r + \mathrm{i}s)\int_a^b u(x)\,\mathrm{d}x + (r + \mathrm{i}s)\mathrm{i}\int_a^b v(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \lambda\int_a^b u(x)\,\mathrm{d}x + \lambda\mathrm{i}\int_a^b v(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \lambda(\int_a^b u(x)\,\mathrm{d}x + \mathrm{i}\int_a^b v(x)\,\mathrm{d}x) \\
&= \lambda\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\,.
\end{aligned}$$

(2) Sei $\varphi \in [0, 2\pi)$ so, daß $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$ für ein $r \in \mathbf{R}_{\geqslant 0}$. (Falls das Integral den Wert 0 annimmt, kann hierfür $\varphi = 0$ und $r = 0$ gewählt werden.)

Beachte, daß $\int_a^b \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi} f(x)\,\mathrm{d}x \overset{(1)}{=} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = r \in \mathbf{R}_{\geqslant 0}$.
Beachte ferner, daß $|\operatorname{Re}(z)| = (\operatorname{Re}(z)^2)^{1/2} \leqslant (\operatorname{Re}(z)^2 + \operatorname{Im}(z)^2)^{1/2} = |z|$ für $z \in \mathbf{C}$.
Schreibe $u(x) := \operatorname{Re}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi} f(x))$ und $v(x) := \operatorname{Im}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi} f(x))$ für $x \in D$.
Unter Verwendung von (1), der Definition eines Integrals einer komplexwertigen Funktion aus §11.3.2 und der Dreiecksungleichung für reellwertige Integrale aus §6.2 wird

$$\begin{array}{rcl} |\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x| & = & |\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}| \cdot |\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x| \\ & = & |\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x| \\ & = & |\int_a^b \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi} f(x)\,\mathrm{d}x| \\ & = & |\operatorname{Re}(\int_a^b \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi} f(x)\,\mathrm{d}x)| \\ & = & |\int_a^b u(x)\,\mathrm{d}x| \\ & \leqslant & \int_a^b |u(x)|\,\mathrm{d}x \\ & = & \int_a^b |\operatorname{Re}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi} f(x))|\,\mathrm{d}x \\ & \leqslant & \int_a^b |\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi} f(x)|\,\mathrm{d}x \\ & = & \int_a^b |\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}| \cdot |f(x)|\,\mathrm{d}x \\ & = & \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x\ . \end{array}$$

Aufgabe 152

Schreibe $s = u + \mathrm{i}v$ mit $u,\, v \in \mathbf{R}$.

(1) Zum einen ist

$$\begin{array}{rcl} \big(\operatorname{Re}(\frac{1}{s}\mathrm{e}^{sx})\big)' & = & \big(\operatorname{Re}(\frac{u-v\mathrm{i}}{u^2+v^2}\mathrm{e}^{ux}(\cos(vx) + \mathrm{i}\sin(vx)))\big)' \\ & = & \frac{1}{u^2+v^2}\big(\mathrm{e}^{ux}(u\cos(vx) + v\sin(vx))\big)' \\ & = & \frac{1}{u^2+v^2}(u\mathrm{e}^{ux}(u\cos(vx) + v\sin(vx)) + \mathrm{e}^{ux}(-uv\sin(vx) + v^2\cos(vx)) \\ & = & \frac{1}{u^2+v^2}(u^2\mathrm{e}^{ux}\cos(vx) + v^2\mathrm{e}^{ux}\cos(vx)) \\ & = & \mathrm{e}^{ux}\cos(vx) \\ & = & \operatorname{Re}(\mathrm{e}^{(u+v\mathrm{i})x}) \\ & = & \operatorname{Re}(\mathrm{e}^{sx})\ . \end{array}$$

Zum anderen ist

$$\begin{array}{rcl} \big(\operatorname{Im}(\frac{1}{s}\mathrm{e}^{sx})\big)' & = & \big(\operatorname{Im}(\frac{u-v\mathrm{i}}{u^2+v^2}\mathrm{e}^{ux}(\cos(vx) + \mathrm{i}\sin(vx)))\big)' \\ & = & \frac{1}{u^2+v^2}\big(\mathrm{e}^{ux}(-v\cos(vx) + u\sin(vx))\big)' \\ & = & \frac{1}{u^2+v^2}(u\mathrm{e}^{ux}(-v\cos(vx) + u\sin(vx)) + \mathrm{e}^{ux}(v^2\sin(vx) + uv\cos(vx)) \\ & = & \frac{1}{u^2+v^2}(u^2\mathrm{e}^{ux}\sin(vx) + v^2\mathrm{e}^{ux}\sin(vx)) \\ & = & \mathrm{e}^{ux}\sin(vx) \\ & = & \operatorname{Im}(\mathrm{e}^{(u+v\mathrm{i})x}) \\ & = & \operatorname{Im}(\mathrm{e}^{sx})\ . \end{array}$$

Mit dem (reellen) Hauptsatz aus §6.2 wird also

$$\int_a^b \mathrm{e}^{sx}\,\mathrm{d}x \;=\; \int_a^b \operatorname{Re}(\mathrm{e}^{sx})\,\mathrm{d}x + \mathrm{i}\int_a^b \operatorname{Im}(\mathrm{e}^{sx})\,\mathrm{d}x \;=\; [\operatorname{Re}(\tfrac{1}{s}\mathrm{e}^{sx})]_{x=a}^b + \mathrm{i}\,[\operatorname{Im}(\tfrac{1}{s}\mathrm{e}^{sx})]_{x=a}^b\ .$$

(2) Der Integrand auf der linken Seite ist die reellwertige Funktion

$$\tfrac{1}{x-s} + \tfrac{1}{x-\bar{s}} \;=\; \tfrac{x-\bar{s}}{(x-s)(x-\bar{s})} + \tfrac{x-s}{(x-s)(x-\bar{s})} \;=\; \tfrac{2(x-\mathrm{Re}(s))}{x^2-2\,\mathrm{Re}(s)+|s|^2} \;=\; \tfrac{2(x-\mathrm{Re}(s))}{(x-\mathrm{Re}(s))^2+\mathrm{Im}(s)^2}\;.$$

Mit dem (reellen) Hauptsatz aus §6.2 bleibt also nachzurechnen, daß dies auch die Ableitung der rechts in eckigen Klammern stehenden Funktion ist.

Aber mit der Kettenregel wird

$$\ln\big((x-\mathrm{Re}(s))^2+\mathrm{Im}(s)^2\big)' \;=\; \big((x-\mathrm{Re}(s))^2+\mathrm{Im}(s)^2\big)^{-1}\cdot 2(x-\mathrm{Re}(s))\;,$$

wie gewünscht.

(3) Nach Division durch i bleibt zu verifizieren, daß $\int_a^b \frac{1}{\mathrm{i}}(\frac{1}{x-s} - \frac{1}{x-\bar{s}})\,\mathrm{d}x \stackrel{!}{=} [2\arctan\big((x-\mathrm{Re}(s))/\mathrm{Im}(s)\big)]_{x=a}^b$.

Der Integrand auf der linken Seite ist die reellwertige Funktion

$$\tfrac{1}{\mathrm{i}}(\tfrac{1}{x-s} - \tfrac{1}{x-\bar{s}}) \;=\; \tfrac{1}{\mathrm{i}}(\tfrac{x-\bar{s}}{(x-s)(x-\bar{s})} - \tfrac{x-s}{(x-s)(x-\bar{s})}) \;=\; \tfrac{2\,\mathrm{Im}(s)}{x^2-2\,\mathrm{Re}(s)+|s|^2} \;=\; \tfrac{2\,\mathrm{Im}(s)}{(x-\mathrm{Re}(s))^2+\mathrm{Im}(s)^2}\;.$$

Mit dem (reellen) Hauptsatz aus §6.2 bleibt also nachzurechnen, daß dies auch die Ableitung der rechts in eckigen Klammern stehenden Funktion ist.

Aber mit der Kettenregel wird

$$\big(2\arctan\big((x-\mathrm{Re}(s))/\mathrm{Im}(s)\big)\big)' \;=\; 2\,\tfrac{1/\mathrm{Im}(s)}{((x-\mathrm{Re}(s))/\mathrm{Im}(s))^2+1} \;=\; \tfrac{2\,\mathrm{Im}(s)}{(x-\mathrm{Re}(s))^2+\mathrm{Im}(s)^2}\;,$$

wie gewünscht; vgl. §6.2, Beispiel, (3).

Aufgabe 153

Zunächst ist

$$x^2+1 \;=\; (x-\mathrm{i})(x+\mathrm{i})\;.$$

Wir machen demgemäß den Ansatz

$$\frac{x}{(x^2+1)(x+1)} \;=\; \frac{x}{(x+\mathrm{i})(x-\mathrm{i})(x+1)} \;\stackrel{!}{=}\; \frac{A}{x+\mathrm{i}} + \frac{B}{x-\mathrm{i}} + \frac{C}{x+1}$$

und suchen A, B, $C \in \mathbf{C}$. Multiplikation mit $(x+\mathrm{i})(x-\mathrm{i})(x+1)$ auf beiden Seiten gibt die Bedingung

$$x \;\stackrel{!}{=}\; A(x^2+(1-\mathrm{i})x-\mathrm{i}) + B(x^2+(1+\mathrm{i})x+\mathrm{i}) + C(x^2+1)\;.$$

Koeffizientenvergleich gibt folgendes lineare Gleichungssystem für $\left(\begin{smallmatrix}A\\B\\C\end{smallmatrix}\right) \in \mathbf{C}^{3\times 1}$, welches wir sogleich umformen.

$$\left(\begin{array}{rrr|r} -\mathrm{i} & \mathrm{i} & 1 & 0\\ 1-\mathrm{i} & 1+\mathrm{i} & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 0\end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 2\mathrm{i} & 1+\mathrm{i} & 0\\ 0 & 2\mathrm{i} & -1+\mathrm{i} & 1\end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 1/2+\mathrm{i}/2 & 0\\ 0 & 1 & 1/2-\mathrm{i}/2 & 0\\ 0 & 0 & -2 & 1\end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 1/4+\mathrm{i}/4\\ 0 & 1 & 0 & 1/4-\mathrm{i}/4\\ 0 & 0 & 1 & -1/2\end{array}\right)$$

Folglich ist $A = \frac{1+\mathrm{i}}{4}$, $B = \frac{1+\mathrm{i}}{4}$, $C = -\frac{1}{2}$. Es wird

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \tfrac{x}{(x^2+1)(x+1)}\,\mathrm{d}x \;&=\; \tfrac{1+\mathrm{i}}{4}\int_0^1 \tfrac{1}{x+\mathrm{i}}\,\mathrm{d}x + \tfrac{1-\mathrm{i}}{4}\int_0^1 \tfrac{1}{x-\mathrm{i}}\,\mathrm{d}x - \tfrac{1}{2}\int_0^1 \tfrac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x\\
&=\; \tfrac{1}{4}\int_0^1(\tfrac{1}{x-(-\mathrm{i})} + \tfrac{1}{x-\mathrm{i}})\,\mathrm{d}x + \tfrac{\mathrm{i}}{4}\int_0^1(\tfrac{1}{x-(-\mathrm{i})} - \tfrac{1}{x-\mathrm{i}})\,\mathrm{d}x - \tfrac{1}{2}[\ln(x+1)]_{x=0}^1\\
&=\; \tfrac{1}{4}[\ln(x^2+1)]_{x=0}^1 + \tfrac{\mathrm{i}}{4}[2\mathrm{i}\arctan(x/(-1))]_{x=0}^1 - \tfrac{1}{2}\ln(2)\\
&=\; \tfrac{1}{4}\ln(2) - \tfrac{1}{2}\arctan(-1) - \tfrac{1}{2}\ln(2)\\
&=\; -\tfrac{1}{4}\ln(2) + \tfrac{\pi}{8}\\
&\approx\; 0{,}2194122866\;.
\end{aligned}$$

Aufgabe 154

(1) Zunächst ist

$$x^2 + 1 \;=\; (x - \mathrm{i})(x + \mathrm{i}) \,.$$

Wir machen demgemäß den Ansatz

$$\frac{(x+1)^2}{(x^2+1)^2} \;=\; \frac{x^2+2x+1}{(x-\mathrm{i})^2(x+\mathrm{i})^2} \;\overset{!}{=}\; \frac{A}{x-\mathrm{i}} + \frac{B}{(x-\mathrm{i})^2} + \frac{C}{x+\mathrm{i}} + \frac{D}{(x+\mathrm{i})^2}$$

und suchen A, B, C, $D \in \mathbf{C}$. Multiplikation mit $(x-\mathrm{i})^2\,(x+\mathrm{i})^2$ auf beiden Seiten gibt die Bedingung

$$x^2 + 2x + 1 \overset{!}{=} A(x^3 + \mathrm{i}x^2 + x + \mathrm{i}) + B(x^2 + 2\mathrm{i}x - 1) + C(x^3 - \mathrm{i}x^2 + x - \mathrm{i}) + D(x^2 - 2\mathrm{i}x - 1)\,.$$

Koeffizientenvergleich gibt folgendes lineare Gleichungssystem für $\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{pmatrix} \in \mathbf{C}^{4\times 1}$, welches wir sogleich umformen.

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} \mathrm{i} & -1 & -\mathrm{i} & -1 & 1 \\ 1 & 2\mathrm{i} & 1 & -2\mathrm{i} & 2 \\ \mathrm{i} & 1 & -\mathrm{i} & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2\mathrm{i} & -1 & 1 \\ 0 & 2\mathrm{i} & 0 & -2\mathrm{i} & 2 \\ 0 & 1 & -2\mathrm{i} & 1 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2\mathrm{i} & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -4\mathrm{i} & 2+2\mathrm{i} \\ 0 & 0 & -4\mathrm{i} & 0 & 2 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 0 & \mathrm{i} & -1/2-\mathrm{i}/2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -\mathrm{i} \\ 0 & 0 & 1 & -\mathrm{i} & 1/2+\mathrm{i}/2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 2\mathrm{i} \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 0 & 0 & -\mathrm{i}/2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\mathrm{i}/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \mathrm{i}/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \mathrm{i}/2 \end{array}\right)$$

Folglich ist $A = -\frac{\mathrm{i}}{2}$, $B = -\frac{\mathrm{i}}{2}$, $C = \frac{\mathrm{i}}{2}$, $D = \frac{\mathrm{i}}{2}$. Es wird

$$\begin{aligned} \int_0^1 \tfrac{(x+1)^2}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x &= -\tfrac{\mathrm{i}}{2}\Big(\int_0^1 \tfrac{1}{x-\mathrm{i}} - \tfrac{1}{x+\mathrm{i}}\,\mathrm{d}x\Big) - \tfrac{\mathrm{i}}{2}\int_0^1 \tfrac{1}{(x-\mathrm{i})^2}\,\mathrm{d}x + \tfrac{\mathrm{i}}{2}\int_0^1 \tfrac{1}{(x+\mathrm{i})^2}\,\mathrm{d}x \\ &= -\tfrac{\mathrm{i}}{2}[2\mathrm{i}\arctan(x)]_{x=0}^1 - \tfrac{\mathrm{i}}{2}[-\tfrac{1}{x-\mathrm{i}}]_{x=0}^1 + \tfrac{\mathrm{i}}{2}[-\tfrac{1}{x+\mathrm{i}}]_{x=0}^1 \\ &= \tfrac{\pi}{4} - \tfrac{\mathrm{i}}{2}(-\tfrac{1}{1-\mathrm{i}} + \tfrac{1}{-\mathrm{i}}) + \tfrac{\mathrm{i}}{2}(-\tfrac{1}{1+\mathrm{i}} + \tfrac{1}{\mathrm{i}}) \\ &= \tfrac{\pi}{4} - \tfrac{\mathrm{i}}{2}(-\tfrac{1+\mathrm{i}}{2} + \mathrm{i}) + \tfrac{\mathrm{i}}{2}(-\tfrac{1-\mathrm{i}}{2} - \mathrm{i}) \\ &= \tfrac{\pi}{4} + \tfrac{1}{2} \\ &\approx 1{,}2853981634\,. \end{aligned}$$

(2) Zunächst ist

$$x^4 + 4 \;=\; (x^2 + 2\mathrm{i})(x^2 - 2\mathrm{i}) \;=\; (x - 1 - \mathrm{i})(x + 1 + \mathrm{i})(x - 1 + \mathrm{i})(x + 1 - \mathrm{i})\,.$$

Wir machen demgemäß den Ansatz

$$\frac{1}{x^4+4} \;=\; \frac{1}{(x-1-\mathrm{i})(x+1+\mathrm{i})(x-1+\mathrm{i})(x+1-\mathrm{i})} \;\overset{!}{=}\; \frac{A}{x-1-\mathrm{i}} + \frac{B}{x+1+\mathrm{i}} + \frac{C}{x-1+\mathrm{i}} + \frac{D}{x+1-\mathrm{i}}$$

und suchen A, B, C, $D \in \mathbf{C}$. Multiplikation mit $(x-1-\mathrm{i})(x+1+\mathrm{i})(x-1+\mathrm{i})(x+1-\mathrm{i})$ auf beiden Seiten gibt die Bedingung

$$\begin{aligned} 1 \;&\overset{!}{=}\; A(x^3 + (1+\mathrm{i})x^2 + 2\mathrm{i}x - 2 + 2\mathrm{i}) + B(x^3 - (1+\mathrm{i})x^2 + 2\mathrm{i}x + 2 - 2\mathrm{i}) \\ &+\; C(x^3 + (1-\mathrm{i})x^2 - 2\mathrm{i}x - 2 - 2\mathrm{i}) + D(x^3 - (1-\mathrm{i})x^2 - 2\mathrm{i}x + 2 + 2\mathrm{i})\,. \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich gibt folgendes lineare Gleichungssystem für $\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{pmatrix} \in \mathbf{C}^{4\times 1}$, welches wir sogleich umformen.

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} -2+2\mathrm{i} & 2-2\mathrm{i} & -2-2\mathrm{i} & 2+2\mathrm{i} & 1 \\ 2\mathrm{i} & 2\mathrm{i} & -2\mathrm{i} & -2\mathrm{i} & 0 \\ 1+\mathrm{i} & -1-\mathrm{i} & 1-\mathrm{i} & -1+\mathrm{i} & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4-4\mathrm{i} & -4\mathrm{i} & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -4\mathrm{i} & -4\mathrm{i} & 0 \\ 0 & -2-2\mathrm{i} & -2\mathrm{i} & -2 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 1/2-\mathrm{i}/2 & 1/2+\mathrm{i}/2 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2+\mathrm{i}/2 & 1/2-\mathrm{i}/2 & 0 \\ 0 & 0 & -4-4\mathrm{i} & 4+4\mathrm{i} & 1 \\ 0 & 0 & -4\mathrm{i} & -4\mathrm{i} & 0 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 0 & \mathrm{i} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\mathrm{i} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8+8\mathrm{i} & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 0 & 0 & (-1-\mathrm{i})/16 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & (1+\mathrm{i})/16 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & (-1+\mathrm{i})/16 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & (1-\mathrm{i})/16 \end{array}\right)$$

Folglich ist $A = \frac{-1-\mathrm{i}}{16}$, $B = \frac{1+\mathrm{i}}{16}$, $C = \frac{-1+\mathrm{i}}{16}$, $D = \frac{1-\mathrm{i}}{16}$. Es wird

$$
\begin{array}{cl}
& \int_{-1}^{1} \frac{1}{x^4+4}\, \mathrm{d}x \\
= & \frac{-1-\mathrm{i}}{16} \int_{-1}^{1} \frac{1}{x-1-\mathrm{i}}\, \mathrm{d}x + \frac{1+\mathrm{i}}{16} \int_{-1}^{1} \frac{1}{x+1+\mathrm{i}}\, \mathrm{d}x + \frac{-1+\mathrm{i}}{16} \int_{-1}^{1} \frac{1}{x-1+\mathrm{i}}\, \mathrm{d}x + \frac{1-\mathrm{i}}{16} \int_{-1}^{1} \frac{1}{x+1-\mathrm{i}}\, \mathrm{d}x \\
= & -\frac{1}{16} \int_{-1}^{1} (\frac{1}{x-(1+\mathrm{i})} + \frac{1}{x-(1-\mathrm{i})})\, \mathrm{d}x - \frac{\mathrm{i}}{16} \int_{-1}^{1} (\frac{1}{x-(1+\mathrm{i})} - \frac{1}{x-(1-\mathrm{i})})\, \mathrm{d}x \\
& + \frac{1}{16} \int_{-1}^{1} (\frac{1}{x-(-1-\mathrm{i})} + \frac{1}{x-(-1+\mathrm{i})})\, \mathrm{d}x + \frac{\mathrm{i}}{16} \int_{-1}^{1} (\frac{1}{x-(-1-\mathrm{i})} - \frac{1}{x-(-1+\mathrm{i})})\, \mathrm{d}x \\
= & -\frac{1}{16} [\ln((x-1)^2+1)]_{x=-1}^{1} - \frac{\mathrm{i}}{16} [2\mathrm{i} \arctan((x-1)/1)]_{x=-1}^{1} \\
& + \frac{1}{16} [\ln((x+1)^2+1)]_{x=-1}^{1} + \frac{\mathrm{i}}{16} [2\mathrm{i} \arctan((x+1)/(-1))]_{x=-1}^{1} \\
= & -\frac{1}{16} (\ln(1) - \ln(5)) + \frac{1}{8} (\arctan(0) - \arctan(-2)) \\
& + \frac{1}{16} (\ln(5) - \ln(1)) - \frac{1}{8} (\arctan(-2) - \arctan(0)) \\
= & \frac{1}{8} \ln(5) + \frac{1}{4} \arctan(2) \\
\approx & 0{,}4779669185\,.
\end{array}
$$

(3) Wir machen den Ansatz

$$
\frac{1}{(x^2+1)^3} \;=\; \frac{1}{(x-\mathrm{i})^3\,(x+\mathrm{i})^3} \;\overset{!}{=}\; \frac{A}{x-\mathrm{i}} + \frac{B}{(x-\mathrm{i})^2} + \frac{C}{(x-\mathrm{i})^3} + \frac{D}{x+\mathrm{i}} + \frac{E}{(x+\mathrm{i})^2} + \frac{F}{(x+\mathrm{i})^3}
$$

und suchen A, B, C, D, E, $F \in \mathbf{C}$. Multiplikation mit $(x-\mathrm{i})^3\,(x+\mathrm{i})^3$ auf beiden Seiten gibt die Bedingung

$$
\begin{array}{rcl}
1 & \overset{!}{=} & A(x^5 + \mathrm{i}x^4 + 2x^3 + 2\mathrm{i}x^2 + x + \mathrm{i}) + B(x^4 + 2\mathrm{i}x^3 + 2\mathrm{i}x - 1) + C(x^3 + 3\mathrm{i}x^2 - 3x - \mathrm{i}) \\
& + & D(x^5 - \mathrm{i}x^4 + 2x^3 - 2\mathrm{i}x^2 + x - \mathrm{i}) + E(x^4 - 2\mathrm{i}x^3 - 2\mathrm{i}x - 1) + F(x^3 - 3\mathrm{i}x^2 - 3x + \mathrm{i})\,.
\end{array}
$$

Koeffizientenvergleich gibt folgendes lineare Gleichungssystem für $\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \end{pmatrix} \in \mathbf{C}^{6\times 1}$, welches wir sogleich umformen.

$$
\left(\begin{array}{rrrrrr|r}
\mathrm{i} & -1 & -\mathrm{i} & -\mathrm{i} & -1 & \mathrm{i} & 1 \\
1 & 2\mathrm{i} & -3 & 1 & -2\mathrm{i} & -3 & 0 \\
2\mathrm{i} & 0 & 3\mathrm{i} & -2\mathrm{i} & 0 & -3\mathrm{i} & 0 \\
2 & 2\mathrm{i} & 1 & 2 & -2\mathrm{i} & 1 & 0 \\
\mathrm{i} & 1 & 0 & -\mathrm{i} & 1 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right)
\rightsquigarrow
\left(\begin{array}{rrrrrr|r}
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & -\mathrm{i} & -2\mathrm{i} & -1 & \mathrm{i} & 1 \\
0 & 2\mathrm{i} & -3 & 0 & -2\mathrm{i} & -3 & 0 \\
0 & 0 & 3\mathrm{i} & -4\mathrm{i} & 0 & -3\mathrm{i} & 0 \\
0 & 2\mathrm{i} & 1 & 0 & -2\mathrm{i} & 1 & 0 \\
0 & 1 & 0 & -2\mathrm{i} & 1 & 0 & 0
\end{array}\right)
\rightsquigarrow
\left(\begin{array}{rrrrrr|r}
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & -2\mathrm{i} & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -\mathrm{i} & -4\mathrm{i} & 0 & \mathrm{i} & 1 \\
0 & 0 & -3 & -4 & -4\mathrm{i} & -3 & 0 \\
0 & 0 & 3\mathrm{i} & -4\mathrm{i} & 0 & -3\mathrm{i} & 0 \\
0 & 0 & 1 & -4 & -4\mathrm{i} & 1 & 0
\end{array}\right)
$$

$$
\rightsquigarrow
\left(\begin{array}{rrrrrr|r}
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & -2\mathrm{i} & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & -4 & -4\mathrm{i} & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -8\mathrm{i} & 4 & 2\mathrm{i} & 1 \\
0 & 0 & 0 & -16 & -16\mathrm{i} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 8\mathrm{i} & -12 & -6\mathrm{i} & 0
\end{array}\right)
\rightsquigarrow
\left(\begin{array}{rrrrrr|r}
1 & 0 & 0 & 0 & -\mathrm{i} & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & \mathrm{i} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 2\mathrm{i} & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -4 & -6\mathrm{i} & 0
\end{array}\right)
\rightsquigarrow
\left(\begin{array}{rrrrrr|r}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3/2 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3\mathrm{i}/2 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3/2 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3\mathrm{i}/2 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8\mathrm{i} & 1
\end{array}\right)
$$

$$
\rightsquigarrow
\left(\begin{array}{rrrrrr|r}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3\mathrm{i}/16 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3/16 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \mathrm{i}/8 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3\mathrm{i}/16 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -3/16 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\mathrm{i}/8
\end{array}\right)
$$

Folglich ist $A = -\frac{3\mathrm{i}}{16}$, $B = -\frac{3}{16}$, $C = \frac{\mathrm{i}}{8}$, $D = \frac{3\mathrm{i}}{16}$, $E = -\frac{3}{16}$, $F = -\frac{\mathrm{i}}{8}$. Es wird

$$\begin{array}{rl}
& \int_{-1}^{1} \frac{1}{(x^2+1)^3}\,\mathrm{d}x \\
= & -\frac{3\mathrm{i}}{16}\int_{-1}^{1}\frac{1}{x-\mathrm{i}}\,\mathrm{d}x - \frac{3}{16}\int_{-1}^{1}\frac{1}{(x-\mathrm{i})^2}\,\mathrm{d}x + \frac{\mathrm{i}}{8}\int_{-1}^{1}\frac{1}{(x-\mathrm{i})^3}\,\mathrm{d}x \\
& +\frac{3\mathrm{i}}{16}\int_{-1}^{1}\frac{1}{x+\mathrm{i}}\,\mathrm{d}x - \frac{3}{16}\int_{-1}^{1}\frac{1}{(x+\mathrm{i})^2}\,\mathrm{d}x - \frac{\mathrm{i}}{8}\int_{-1}^{1}\frac{1}{(x+\mathrm{i})^3}\,\mathrm{d}x \\
= & -\frac{3\mathrm{i}}{16}\int_{-1}^{1}(\frac{1}{x-\mathrm{i}} - \frac{1}{x+\mathrm{i}})\,\mathrm{d}x - \frac{3}{16}\int_{-1}^{1}(\frac{1}{(x-\mathrm{i})^2} + \frac{1}{(x+\mathrm{i})^2})\,\mathrm{d}x + \frac{\mathrm{i}}{8}\int_{-1}^{1}(\frac{1}{(x-\mathrm{i})^3} - \frac{1}{(x+\mathrm{i})^3})\,\mathrm{d}x \\
= & -\frac{3\mathrm{i}}{16}[2\mathrm{i}\arctan(x)]_{x=-1}^{1} - \frac{3}{16}[-\frac{1}{x-\mathrm{i}} - \frac{1}{x+\mathrm{i}}]_{x=-1}^{1} + \frac{\mathrm{i}}{8}[-\frac{1}{2}\frac{1}{(x-\mathrm{i})^2} + \frac{1}{2}\frac{1}{(x+\mathrm{i})^2}]_{x=-1}^{1} \\
= & \frac{3}{8}[\arctan(x)]_{x=-1}^{1} - \frac{3}{16}(-\frac{1}{1-\mathrm{i}} - \frac{1}{1+\mathrm{i}} + \frac{1}{-1-\mathrm{i}} + \frac{1}{-1+\mathrm{i}}) + \frac{\mathrm{i}}{8}(-\frac{1}{2}\frac{1}{(1-\mathrm{i})^2} + \frac{1}{2}\frac{1}{(1+\mathrm{i})^2} + \frac{1}{2}\frac{1}{(-1-\mathrm{i})^2} - \frac{1}{2}\frac{1}{(-1+\mathrm{i})^2}) \\
= & \frac{3}{8}(\frac{\pi}{4} - (-\frac{\pi}{4})) - \frac{3}{16}(-\frac{1+\mathrm{i}}{2} - \frac{1-\mathrm{i}}{2} + \frac{-1+\mathrm{i}}{2} + \frac{-1-\mathrm{i}}{2}) + \frac{\mathrm{i}}{8}(-\frac{1}{(1-\mathrm{i})^2} + \frac{1}{(1+\mathrm{i})^2}) \\
= & \frac{3\pi}{16} - \frac{3}{16}(-2) + \frac{\mathrm{i}}{8}(-\frac{1}{-2\mathrm{i}} + \frac{1}{2\mathrm{i}}) \\
= & \frac{3\pi}{16} + \frac{1}{2} \\
\approx & 1{,}089048622548\,.
\end{array}$$

Aufgabe 155

Wir verwenden die Notation von §12.2.

Es ist $F(x) = \int_1^x 1\,\mathrm{d}x = x - 1$.

Es ist $H(y) = \int_2^y t^{-2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2} - y^{-1}$.

Gleichsetzen,

$$\tfrac{1}{2} - y^{-1} \;=\; x - 1\,,$$

und Auflösen nach y gibt

$$y(x) \;=\; H^{-1}(F(x)) \;=\; \frac{1}{\frac{3}{2} - x}\,.$$

Definiert ist diese Funktion auf dem offenen Intervall $(-\infty, \frac{3}{2})$, das 1 enthält.

Aufgabe 156

Wir verwenden die Notation von §12.2.

Es ist $F(x) = \int_2^x x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x^2 - 2$.

Es ist $H(y) = \int_1^y t^{-1}\,\mathrm{d}t = \ln(y)$.

Auflösen nach y gibt

$$y(x) \;=\; H^{-1}(F(x)) \;=\; \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2 - 2}\,.$$

Definiert ist diese Funktion auf $\mathbf{R}$, wie gewünscht.

Aufgabe 157

Wir verwenden die Bezeichnungen aus §12.2.

(1) Es ist $f(x) = 1$, $g(y) = y^3$, $x_0 = 0$ und $y_0 = 1$.
Es wird

$$F(x) \;=\; \int_{x_0}^x f(t)\,\mathrm{d}t \;=\; \int_0^x 1\,\mathrm{d}t \;=\; x\,.$$

Es wird

$$H(y) \;=\; \int_{y_0}^y g(t)^{-1}\,\mathrm{d}t \;=\; \int_1^y t^{-3}\,\mathrm{d}t \;=\; [-\tfrac{1}{2}t^{-2}]_{t=1}^{y} \;=\; \tfrac{1}{2}(1 - y^{-2})\,.$$

Wir lösen

$$H(y) \;=\; \tfrac{1}{2}(1-y^{-2}) \;=\; x \;=\; F(x)$$

nach y auf und folgern aus $y^2 = 1-2x$ wegen $y = +1$ bei $x = 0$, daß

$$y(x) \;=\; y \;=\; (1-2x)^{-1/2}$$

ist auf dem offenen Intervall $\mathbf{R}_{<1/2}$, das 0 enthält.

(2) Hat man (1) bereits berechnet, so kann man erkennen, daß die mit (-1) multiplizierte Funktion aus (1) die Lösung für (2) sein muß.

Nach Verfahren ergibt sich folgendes.

Es ist $f(x) = 1$, $g(y) = y^3$, $x_0 = 0$ und $y_0 = 1$.

Es wird

$$F(x) \;=\; \int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t \;=\; \int_0^x 1\,\mathrm{d}t \;=\; x\;.$$

Es wird

$$H(y) \;=\; \int_{y_0}^{y} g(t)^{-1}\,\mathrm{d}t \;=\; \int_{-1}^{y} t^{-3}\,\mathrm{d}t \;=\; [-\tfrac{1}{2}\,t^{-2}]_{t=-1}^{y} \;=\; \tfrac{1}{2}(1-y^{-2})\;.$$

Wir lösen

$$H(y) \;=\; \tfrac{1}{2}(1-y^{-2}) \;=\; x \;=\; F(x)$$

nach y auf und folgern aus $y^2 = 1-2x$ wegen $y = -1$ bei $x = 0$ nun, daß

$$y(x) \;=\; y \;=\; -(1-2x)^{-1/2}$$

ist auf dem offenen Intervall $\mathbf{R}_{<1/2}$, das 0 enthält.

(3) Eine solche Funktion $y(x)$ müßte auf $\mathbf{R}_{<1/2}$ mit $(1-2x)^{-2}$ übereinstimmen und könnte daher bei $x = 1/2$ nicht stetig sein. Also gibt es erst recht keine solche differenzierbare Funktion, wie bei einer Differentialgleichung erster Ordnung gesucht.

Aufgabe 158

Wir verwenden die Bezeichnungen aus §12.2.

Wir substituieren $u := y'$ und suchen u so, daß

$$u' = u^2/x^2\;.$$

Es ist $f(x) = x^{-2}$, $g(u) = u^2$, $x_0 = 0$ und $u_0 = 2$.

Es wird

$$F(x) \;=\; \int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t \;=\; \int_1^x t^{-2}\,\mathrm{d}t \;=\; 1-x^{-1}\;.$$

Es wird

$$H(u) \;=\; \int_{u_0}^{u} g(t)^{-1}\,\mathrm{d}t \;=\; \int_2^u t^{-2}\,\mathrm{d}t \;=\; [-\,t^{-1}]_{t=2}^{u} \;=\; \tfrac{1}{2}-u^{-1}\;.$$

Wir lösen

$$H(u) \;=\; \tfrac{1}{2}-u^{-1} \;=\; 1-x^{-1} \;=\; F(x)$$

nach u auf und erhalten

$$u(x) \;=\; u \;=\; -\tfrac{2x}{x-2} \;=\; -2-\tfrac{4}{x-2}$$

auf dem offenen Intervall $\mathbf{R}_{<2}$, das 1 enthält.

Hieraus entsteht wegen $y_0 = 0$

$$y(x) \;=\; y_0 + \int_{x_0}^{x}(-2-\tfrac{4}{t-2})\,\mathrm{d}t \;=\; \int_1^x(-2-\tfrac{4}{t-2})\,\mathrm{d}t \;=\; -2x-4\ln(2-x)+2\;.$$

Aufgabe 159

Wir verwenden die Bezeichnungen aus §12.2.

Es ist $f(x) = x$, $g(y) = (y+1)^{-1}$, $x_0 = 0$ und $y_0 = 0$.

Es wird
$$F(x) \;=\; \int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t \;=\; \int_0^x t\,\mathrm{d}t \;=\; \tfrac{1}{2}\,x^2\ .$$

Es wird
$$H(y) \;=\; \int_{y_0}^{y} g(t)^{-1}\,\mathrm{d}t \;=\; \int_0^y (t+1)\,\mathrm{d}t \;=\; [\tfrac{1}{2}\,(t+1)^2]_{t=1}^{y} \;=\; \tfrac{1}{2}((y+1)^2-1)\ .$$

Wir lösen
$$H(y) \;=\; \tfrac{1}{2}((y+1)^2-1) \;=\; \tfrac{1}{2}\,x^2 \;=\; F(x)$$
nach y auf und folgern aus $(y+1)^2 = x^2+1$ wegen $y=0$ bei $x=0$, daß $y+1 = +\sqrt{x^2+1}$ und also
$$y(x) \;=\; y \;=\; -1+\sqrt{x^2+1}$$
ist auf $\mathbf{R}$.

Beachte, daß $y(x) = -1$ für kein $x \in \mathbf{R}$ eintritt, und so in der Differentialgleichung bei Einsetzen von $y(x)$ in der Tat nicht durch 0 zu dividieren ist.

Aufgabe 160

Wir verwenden die Bezeichnungen aus §12.2.

Es sollte $y' = \pm\sqrt{x}\sqrt{y}$ sein.

Es ist $f(x) = \pm\sqrt{x}$, $g(y) = \sqrt{y}$, $x_0 = 1$ und $y_0 = 1$.

Es wird
$$F(x) \;=\; \int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t \;=\; \pm\int_1^x t^{1/2}\,\mathrm{d}t \;=\; \pm\tfrac{2}{3}\,(x^{3/2}-1)\ .$$

Es wird
$$H(y) \;=\; \int_{y_0}^{y} g(t)^{-1}\,\mathrm{d}t \;=\; \int_1^y t^{-1/2}\,\mathrm{d}t \;=\; [2t^{1/2}]_{t=1}^{y} \;=\; 2(y^{1/2}-1)\ .$$

Wir lösen
$$H(y) \;=\; 2(y^{1/2}-1) \;=\; \pm\tfrac{2}{3}\,(x^{3/2}-1) \;=\; F(x)$$
nach y auf und erhalten
$$y(x) \;=\; y \;=\; (\pm\tfrac{1}{3}(x^{3/2}-1)+1)^2$$
auf dem offenen Intervall $\mathbf{R}_{>0}$, das 1 enthält.

Hier gibt es also zwei Lösungen unserer Differentialgleichung, die die Anfangswertbedingung erfüllen, $y(x) = \frac{1}{9}(x^{3/2}+2)^2$ und $y(x) = \frac{1}{9}(x^{3/2}-4)^2$.

Aufgabe 161

In den Bezeichnungen von §12.3 ist $a(x) = 1$ und $b(x) = x$.

Wir bilden
$$A(x) \;=\; \int_{x_0}^{x} a(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x 1\,\mathrm{d}t \;=\; x\ .$$

Wir bilden
$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{x_0}^{x} b(t)\,\mathrm{e}^{-A(t)}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^x t\,\mathrm{e}^{-t}\ \mathrm{d}t \\ &= [-t\,\mathrm{e}^{-t}]_{t=0}^{x} - \int_0^x (-\mathrm{e}^{-t})\,\mathrm{d}t \\ &= -x\,\mathrm{e}^{-x} - [\mathrm{e}^{-t}]_{t=0}^{x} \\ &= -x\,\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-x} + 1\ . \end{aligned}$$

Wir erhalten

$$y(x) \;=\; \mathrm{e}^{A(x)}(F(x)+y_0) \;=\; \mathrm{e}^{x}(-x\,\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{-x}+1) \;=\; -x-1+\mathrm{e}^{x}\;.$$

Diese Lösung ist auf ganz $\mathbf{R}$ definiert.

Aufgabe 162

(1) In den Bezeichnungen von §12.3 ist $a(x)=x^{-1}$ und $b(x)=x+1$.
Ferner ist $x_0=1$ und $y_0=1$.
Wir bilden

$$A(x) \;=\; \int_{x_0}^{x} a(t)\,\mathrm{d}t = \int_1^x t^{-1}\,\mathrm{d}t \;=\; [\ln(t)]_{t=1}^{x} \;=\; \ln(x)\;.$$

Wir bilden

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{x_0}^{x} b(t)\,\mathrm{e}^{-A(t)}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_1^x (t+1)\,\mathrm{e}^{-\ln(t)}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_1^x (t+1)t^{-1}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_1^x (1+t^{-1})\,\mathrm{d}t \\ &= [t+\ln(t)]_{t=1}^{x} \\ &= x-1+\ln(x)\;. \end{aligned}$$

Wir erhalten

$$y(x) \;=\; \mathrm{e}^{A(x)}(F(x)+y_0) \;=\; \mathrm{e}^{\ln(x)}(x+\ln(x)) \;=\; x(x+\ln(x))\;.$$

Diese Lösung ist auf $\mathbf{R}_{>0}$ definiert.

(2) In den Bezeichnungen von §12.3 ist $a(x)=\ln(x)$ und $b(x)=\ln(x)$.
Ferner ist $x_0=1$ und $y_0=0$.
Wir bilden

$$A(x) \;=\; \int_{x_0}^{x} a(t)\,\mathrm{d}t = \int_1^x \ln(t)\,\mathrm{d}t \;=\; [t\ln(t)-t]_{t=1}^{x} \;=\; x\ln(x)-x+1\;.$$

Wir bilden mittels Substitution, vgl. §6.3.1,

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{x_0}^{x} \ln(t)\,\mathrm{e}^{-t\ln(t)+t-1}\,\mathrm{d}t \\ &\overset{g(t)\;=\;-t\ln(t)+t-1}{=} \int_1^x (-\mathrm{e}^{g(t)}g'(t))\,\mathrm{d}t \\ &= -\int_{g(1)}^{g(x)} \mathrm{e}^{u}\,\mathrm{d}u \\ &= -\int_0^{-x\ln(x)+x-1} \mathrm{e}^{u}\,\mathrm{d}u \\ &= -[\mathrm{e}^{u}]_{u=0}^{u=-x\ln(x)+x-1} \\ &= -\mathrm{e}^{-x\ln(x)+x-1}+1\;. \end{aligned}$$

Wir erhalten

$$y(x) \;=\; \mathrm{e}^{A(x)}(F(x)+y_0) \;=\; -\mathrm{e}^{x\ln(x)-x+1}(\mathrm{e}^{-x\ln(x)+x-1}-1) \;=\; \mathrm{e}^{x\ln(x)-x+1}-1\;.$$

Diese Lösung ist auf $\mathbf{R}_{>0}$ definiert.

Aufgabe 163

In den Bezeichnungen von §12.4.1 ist $a=1$, $b=1$ und $c(x)=0$, wir sind also im homogenen Fall.

Da $a^2 = 1 = b$ ist, sind wir in Fall (3) des Lemmas in §12.4.2. Somit wird

$$y(x) \;=\; \mathrm{e}^{-ax}(r+sx) \;=\; \mathrm{e}^{-x}(r+sx)$$

mit noch zu bestimmenden $r,\, s \in \mathbf{R}$.

Es wird

$$y'(x) \;=\; -\mathrm{e}^{-x}(r+sx) + \mathrm{e}^{-x}\cdot s \;=\; \mathrm{e}^{-x}(-s-r+sx)\;.$$

Einsetzen von $x_0 = 0$ in $y(x)$ gibt die Bedingung

$$y_0 \;=\; 0 \;\overset{!}{=}\; \mathrm{e}^{-0}(r+s0) \;=\; r\;.$$

Einsetzen von $x_0 = 0$ in $y'(x)$ gibt die Bedingung

$$y_0' \;=\; 1 \;\overset{!}{=}\; \mathrm{e}^{-0}(-s-r+s\cdot 0) \;=\; -s-r\;.$$

Auch ohne Verfahren erkennen wir, daß $r = 0$ und $s = -1$ zu sein hat. Das liefert die Lösung

$$y(x) = -x\,\mathrm{e}^{-x}$$

auf $\mathbf{R}$.

Aufgabe 164

(1) In den Bezeichnungen von §12.4.1 ist $a = 1$, $b = 2$ und $c(x) = 0$, wir sind also im homogenen Fall.
Ferner ist $x_0 = 0$, $y_0 = 0$ und $y_0' = 1$.
Da $a^2 = 1 < 2 = b$ ist, sind wir in Fall (2) des Lemmas in §12.4.2. Somit wird $w = \sqrt{b-a^2} = \sqrt{2-1} = 1$ und

$$y(x) \;=\; \mathrm{e}^{-ax}(r\sin(wx) + s\cos(wx)) \;=\; \mathrm{e}^{-x}(r\sin(x) + s\cos(x))$$

mit noch zu bestimmenden $r,\, s \in \mathbf{R}$.
Es wird

$$y'(x) \;=\; -\mathrm{e}^{-x}(r\sin(x)+s\cos(x))+\mathrm{e}^{-x}(r\cos(x)-s\sin(x)) \;=\; \mathrm{e}^{-x}((-r-s)\sin(x)+(r-s)\cos(x))\;.$$

Einsetzen von $x_0 = 0$ in $y(x)$ gibt die Bedingung

$$y_0 \;=\; 0 \;\overset{!}{=}\; \mathrm{e}^{-0}(r\sin(0) + s\cos(0)) \;=\; s\;.$$

Einsetzen von $x_0 = 0$ in $y'(x)$ gibt die Bedingung

$$y_0' \;=\; 1 \;\overset{!}{=}\; \mathrm{e}^{-0}((-r-s)\sin(0) + (r-s)\cos(0)) \;=\; r-s\;.$$

Auch ohne Verfahren erkennen wir, daß $s = 0$ und $r = 1$ zu sein hat. Das liefert die Lösung

$$y(x) = \mathrm{e}^{-x}\sin(x)\;.$$

auf $\mathbf{R}$.

(2) In den Bezeichnungen von §12.4.1 ist $a = 1$, $b = -2$ und $c(x) = 0$, wir sind also im homogenen Fall.
Ferner ist $x_0 = 0$, $y_0 = 2$ und $y_0' = -2$.
Da $a^2 = 1 > -2 = b$ ist, sind wir in Fall (1) des Lemmas in §12.4.2.

Somit wird $v = \sqrt{a^2 - b} = \sqrt{1 - (-2)} = \sqrt{3}$ und

$$y(x) \;=\; \mathrm{e}^{-ax}(r\,\mathrm{e}^{vx} + s\,\mathrm{e}^{-vx}) \;=\; \mathrm{e}^{-x}(r\,\mathrm{e}^{x\sqrt{3}} + s\,\mathrm{e}^{-x\sqrt{3}}) \;=\; r\,\mathrm{e}^{x(-1+\sqrt{3})} + s\,\mathrm{e}^{x(-1-\sqrt{3})}$$

mit noch zu bestimmenden $r,\, s \in \mathbf{R}$.
Es wird

$$y'(x) \;=\; r(-1+\sqrt{3})\,\mathrm{e}^{x(-1+\sqrt{3})} + s(-1-\sqrt{3})\,\mathrm{e}^{x(-1-\sqrt{3})}\;.$$

Einsetzen von $x_0 = 0$ in $y(x)$ gibt die Bedingung

$$y_0 \;=\; 2 \;\overset{!}{=}\; r\,\mathrm{e}^{0(-1+\sqrt{3})} + s\,\mathrm{e}^{0(-1-\sqrt{3})} \;=\; r + s\;.$$

Einsetzen von $x_0 = 0$ in $y'(x)$ gibt die Bedingung

$$y_0' \;=\; -2 \;\overset{!}{=}\; r(-1+\sqrt{3})\,\mathrm{e}^{0(-1+\sqrt{3})} + s(-1-\sqrt{3})\,\mathrm{e}^{0(-1-\sqrt{3})} \;=\; r(-1+\sqrt{3}) + s(-1-\sqrt{3})\;.$$

Wir lösen, unter Zuhilfenahme zweier naheliegender vorbereitender Schritte,

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ -1+\sqrt{3} & -1-\sqrt{3} & -2 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ \sqrt{3} & -\sqrt{3} & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -2 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right)\;.$$

Also ist $r = 1$ und $s = 1$. Das liefert die Lösung

$$y(x) = \mathrm{e}^{x(-1+\sqrt{3})} + \mathrm{e}^{x(-1-\sqrt{3})}\;.$$

auf $\mathbf{R}$.

(3) In den Bezeichnungen von §12.4.1 ist $a = \frac{1}{2}$, $b = -2$ und $c(x) = 0$, wir sind also im homogenen Fall.
Da $a^2 = \frac{1}{4} > -2 = b$ ist, sind wir in Fall (1) des Lemmas in §12.4.2.
Somit wird $v = \sqrt{a^2 - b} = \sqrt{\frac{1}{4} - (-2)} = \frac{3}{2}$ und

$$y(x) \;=\; \mathrm{e}^{-ax}(r\,\mathrm{e}^{vx} + s\,\mathrm{e}^{-vx}) \;=\; \mathrm{e}^{-x/2}(r\,\mathrm{e}^{3x/2} + s\,\mathrm{e}^{-3x/2}) \;=\; r\,\mathrm{e}^{x} + s\,\mathrm{e}^{-2x}$$

mit $r,\, s \in \mathbf{R}$. Jede Lösung ist von dieser Form.
In anderen Worten, es ist der Lösungsraum der Differentialgleichung $y'' + y' - 2y$ auf $\mathbf{R}$ gegeben durch

$$\langle\, \mathrm{e}^{x},\, \mathrm{e}^{-2x} \rangle$$

Aufgabe 165

(1) Wir verwenden die Bezeichnungen aus §12.3. Wir haben zu überprüfen, daß

$$y(x) \;:=\; \mathrm{e}^{A(x)}(F(x) + y_0)$$

auf D eine Lösung von $y' = a(x)y + b(x)$ unter der Anfangswertbedingung $y(x_0) = y_0$ ist.
Es wird

$$\begin{aligned} y'(x) &= A'(x)\,\mathrm{e}^{A(x)}(F(x) + y_0) + \mathrm{e}^{A(x)}F'(x) \\ &= a(x)\,\mathrm{e}^{A(x)}(F(x) + y_0) + \mathrm{e}^{A(x)}b(x)\,\mathrm{e}^{-A(x)} \\ &= a(x)\,\mathrm{e}^{A(x)}(F(x) + y_0) + b(x) \\ &= a(x)y(x) + b(x)\;. \end{aligned}$$

Ferner wird

$$y(x_0) \;=\; \mathrm{e}^{A(x_0)}(F(x_0) + y_0) \;=\; \mathrm{e}^{0}(0 + y_0) \;=\; y_0\;.$$

(2) Wir verwenden die Bezeichnungen aus §12.4.2.

(2.1) *Fall* $a^2 > b$. Wir schreiben $v := \sqrt{a^2 - b}$. Wir haben sicherzustellen, daß für beliebig gewählte $r,\, s \in \mathbf{R}$ die Funktion

$$y(x) \;:=\; \mathrm{e}^{-ax}(r\,\mathrm{e}^{vx} + s\,\mathrm{e}^{-vx})$$

auf $\mathbf{R}$ eine Lösung der Differentialgleichung $y'' + 2ay' + by = 0$ ist.

Es wird

$$\begin{array}{rcl} y(x) & = & \mathrm{e}^{-ax}(r\,\mathrm{e}^{vx} + s\,\mathrm{e}^{-vx}) \\ & = & r\,\mathrm{e}^{(v-a)x} + s\,\mathrm{e}^{(-v-a)x} \\ y'(x) & = & r(v-a)\,\mathrm{e}^{(v-a)x} + s(-v-a)\,\mathrm{e}^{(-v-a)x} \\ y''(x) & = & r(v-a)^2\,\mathrm{e}^{(v-a)x} + s(-v-a)^2\,\mathrm{e}^{(-v-a)x}\ . \end{array}$$

Also wird

$$\begin{array}{rl} & y'' + 2ay' + by \\ = & r((v-a)^2 + 2a(v-a) + b)\,\mathrm{e}^{(v-a)x} + s((-v-a)^2 + 2a(-v-a) + b)\,\mathrm{e}^{(-v-a)x} \\ = & r(v^2 - 2av + a^2 + 2av - 2a^2 + b)\,\mathrm{e}^{(v-a)x} + s(v^2 + 2av + a^2 - 2av - 2a^2 + b)\,\mathrm{e}^{(-v-a)x} \\ = & r(v^2 - a^2 + b)\,\mathrm{e}^{(v-a)x} + s(v^2 - a^2 + b)\,\mathrm{e}^{(-v-a)x} \\ = & r(a^2 - b - a^2 + b)\,\mathrm{e}^{(v-a)x} + s(a^2 - b - a^2 + b)\,\mathrm{e}^{(-v-a)x} \\ = & 0 \end{array}$$

auf $\mathbf{R}$.

(2.2) *Fall* $a^2 < b$. Wir schreiben $w := \sqrt{b - a^2}$. Wir haben sicherzustellen, daß für beliebig gewählte $r,\, s \in \mathbf{R}$ die Funktion

$$y(x) \;:=\; \mathrm{e}^{-ax}(r\sin(wx) + s\cos(wx))$$

auf $\mathbf{R}$ eine Lösung der Differentialgleichung $y'' + 2ay' + by = 0$ ist.

Es wird

$$\begin{array}{rcl} y(x) & = & \mathrm{e}^{-ax}(r\sin(wx) + s\cos(wx)) \\ y'(x) & = & -a\,\mathrm{e}^{-ax}(r\sin(wx) + s\cos(wx)) + \mathrm{e}^{-ax}(rw\cos(wx) - sw\sin(wx)) \\ & = & \mathrm{e}^{-ax}((-ra - sw)\sin(wx) + (-sa + rw)\cos(wx)) \\ y''(x) & = & -a\,\mathrm{e}^{-ax}((-ra - sw)\sin(wx) + (-sa + rw)\cos(wx)) \\ & & +\mathrm{e}^{-ax}(w(-ra - sw)\cos(wx) - w(-sa + rw)\sin(wx)) \\ & = & \mathrm{e}^{-ax}((ra^2 + 2saw - rw^2)\sin(wx) + (sa^2 - 2raw - sw^2)\cos(wx))\ . \end{array}$$

Also wird

$$\begin{array}{rl} & y'' + 2ay' + by \\ = & \mathrm{e}^{-ax}\big(((ra^2 + 2saw - rw^2) + 2a(-ra - sw) + br)\sin(wx) \\ & +((sa^2 - 2raw - sw^2) + 2a(-sa + rw) + bs)\cos(wx)\big) \\ = & \mathrm{e}^{-ax}((-ra^2 - rw^2 + rb)\sin(wx) + (-sa^2 - sw^2 + sb)\cos(wx)) \\ = & \mathrm{e}^{-ax}(r(-a^2 - w^2 + b)\sin(wx) + s(-a^2 - w^2 + b)\cos(wx)) \\ = & \mathrm{e}^{-ax}(r(-a^2 - b + a^2 + b)\sin(wx) + s(-a^2 - b + a^2 + b)\cos(wx)) \\ = & 0 \end{array}$$

auf $\mathbf{R}$.

(2.3) *Fall* $a^2 = b$. Wir haben sicherzustellen, daß für beliebig gewählte $r,\, s \in \mathbf{R}$ die Funktion

$$y(x) \;:=\; \mathrm{e}^{-ax}(r + sx)$$

auf **R** eine Lösung der Differentialgleichung $y'' + 2ay' + by = 0$ ist.

Es wird

$$\begin{aligned} y(x) &= \mathrm{e}^{-ax}(r+sx) \\ y'(x) &= -a\,\mathrm{e}^{-ax}(r+sx) + \mathrm{e}^{-ax}s \\ &= \mathrm{e}^{-ax}(-ar+s-asx) \\ y''(x) &= -a\,\mathrm{e}^{-ax}(-ar+s-asx) + \mathrm{e}^{-ax}(-as) \\ &= \mathrm{e}^{-ax}(a^2r - 2as + a^2sx)\ . \end{aligned}$$

Also wird

$$\begin{aligned} & y'' + 2ay' + by \\ = \ & \mathrm{e}^{-ax}((a^2r - 2as + a^2sx) + 2a(-ar+s-asx) + b(r+sx)) \\ = \ & \mathrm{e}^{-ax}(-a^2r - a^2sx + br + bsx) \\ = \ & \mathrm{e}^{-ax}(-a^2r - a^2sx + a^2r + a^2sx) \\ = \ & 0\ . \end{aligned}$$

Aufgabe 166

In der Lösung zu Aufgabe 163 haben wir bereits die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung $y'' + 2y' + y = 0$ zu

$$\mathrm{e}^{-x}(r+sx)$$

mit $r,\ s \in \mathbf{R}$ ermittelt.

Nun brauchen wir noch eine Lösung der gegebenen inhomogenen Differentialgleichung. Ihre allgemeine Lösung ergibt sich dann als Summe aus dieser speziellen Lösung und der allgemeinen Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung.

Wir machen den Ansatz, eine Lösung der Form $\hat{y}(x) = \lambda x + \mu$ mit Konstanten $\lambda,\ \mu \in \mathbf{R}$ zu suchen; vgl. zweite Bemerkung in §12.4.3. Einsetzen in die Differentialgleichung gibt die Bedingung

$$x \overset{!}{=} (\lambda x + \mu)'' + 2(\lambda x + \mu)' + (\lambda x + \mu) \ = \ \lambda x + (2\lambda + \mu)\ .$$

Koeffizientenvergleich bei x^1 gibt $\lambda \overset{!}{=} 1$. Koeffizientenvergleich bei x^0 gibt $2\lambda + \mu \overset{!}{=} 0$, also $\mu = -2$. Also wird

$$\hat{y}(x) \ = \ x - 2\ .$$

Als allgemeine Lösung von $y'' + 2y' + y = x$ erhalten wir also

$$y(x) \ = \ x - 2 + \mathrm{e}^{-x}(r+sx)$$

auf **R** mit mit $r,\ s \in \mathbf{R}$.

Kümmern wir uns nun um die Anfangswertbedingungen, um r und s zu ermitteln.

Zunächst ist

$$y'(x) \ = \ 1 - \mathrm{e}^{-x}(r+sx) + \mathrm{e}^{-x}s \ = \ 1 + \mathrm{e}^{-x}(s-r-sx)\ .$$

Es sollte

$$0 \overset{!}{=} y(0) \ = \ 0 - 2 + \mathrm{e}^{-0}(r + s\cdot 0) \ = \ -2 + r$$

sein, und damit $r = 2$.

Es sollte

$$0 \overset{!}{=} y'(0) \ = \ 1 + \mathrm{e}^{-0}(s - r - s\cdot 0) \ = \ 1 + s - r$$

sein, und damit $s = r - 1 = 1$.

Wir erhalten

$$y(x) \;=\; x - 2 + \mathrm{e}^{-x}(2 + x)$$

auf $\mathbf{R}$ als Lösung der Aufgabe.

Aufgabe 167

(1) Wir verwenden die Notation von §12.4.3.

In der Lösung zu Aufgabe 66.(1) haben wir bereits die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung $y'' + 2y' + 2y = 0$ zu

$$\mathrm{e}^{-x}(r\sin(x) + s\cos(x))$$

mit $r,\ s \in \mathbf{R}$ ermittelt.

Nun brauchen wir noch eine Lösung der gegebenen inhomogenen Differentialgleichung. Ihre allgemeine Lösung ergibt sich dann als Summe aus dieser speziellen Lösung und der allgemeinen Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung.

Wir machen den Ansatz, eine Lösung der Form $\hat{y}(x) = \lambda x^2 + \mu x + \nu$ mit Konstanten $\lambda,\ \mu,\ \nu \in \mathbf{R}$ zu suchen; vgl. zweite Bemerkung in §12.4.3. Einsetzen in die Differentialgleichung gibt die Bedingung

$$2x^2 \overset{!}{=} (\lambda x^2 + \mu x + \nu)'' + 2(\lambda x^2 + \mu x + \nu)' + 2(\lambda x^2 + \mu x + \nu) \;=\; 2\lambda x^2 + (2\mu + 4\lambda)x + (2\nu + 2\mu + 2\lambda)\ .$$

Koeffizientenvergleich bei x^2 gibt $\lambda \overset{!}{=} 1$. Koeffizientenvergleich bei x^1 gibt $2\mu + 4\lambda \overset{!}{=} 0$, also $\mu = -2$. Koeffizientenvergleich bei x^0 gibt $2\nu + 2\mu + 2\lambda \overset{!}{=} 0$, also $\nu = 1$. Also wird

$$\hat{y}(x) \;=\; x^2 - 2x + 1\ .$$

Als allgemeine Lösung von $y'' + 2y' + 2y = 2x^2$ erhalten wir also

$$y(x) \;=\; x^2 - 2x + 1 + \mathrm{e}^{-x}(r\sin(x) + s\cos(x))$$

auf $\mathbf{R}$ mit mit $r,\ s \in \mathbf{R}$.

Kümmern wir uns nun um die Anfangswertbedingungen, um r und s zu ermitteln.

Zunächst ist

$$y'(x) \;=\; 2x - 2 + \mathrm{e}^{-x}((-r - s)\sin(x) + (-s + r)\cos(x))\ .$$

Es sollte

$$0 \overset{!}{=} y(0) \;=\; 1 + s$$

sein, und damit $s = -1$.

Es sollte

$$0 \overset{!}{=} y'(0) \;=\; -2 - s + r$$

sein, und damit $r = s + 2 = 1$.

Wir erhalten

$$y(x) \;=\; x^2 - 2x + 1 + \mathrm{e}^{-x}(\sin(x) - \cos(x))$$

auf $\mathbf{R}$ als Lösung der Aufgabe.

(2) Wir verwenden die Notation von §12.4.3.

In der Lösung zu Aufgabe 66.(2) (oder (3)) haben wir bereits die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung $y'' + 2y' - 2y = 0$ zu

$$r\,\mathrm{e}^{x(-1+\sqrt{3})} + s\,\mathrm{e}^{x(-1-\sqrt{3})}$$

mit $r,\ s\ \in\ \mathbf{R}$ ermittelt.

Nun brauchen wir noch eine Lösung der gegebenen inhomogenen Differentialgleichung. Ihre allgemeine Lösung ergibt sich dann als Summe aus dieser speziellen Lösung und der allgemeinen Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung.

Wir machen den Ansatz, eine Lösung der Form $\hat{y}(x) = \lambda\sin(x) + \mu\cos(x)$ mit Konstanten $\lambda,\ \mu\ \in\ \mathbf{R}$ zu suchen; vgl. zweite Bemerkung in §12.4.3. Einsetzen in die Differentialgleichung gibt die Bedingung

$$\begin{array}{rcl} \sin(x) & \overset{!}{=} & (\lambda\sin(x)+\mu\cos(x))'' + 2(\lambda\sin(x)+\mu\cos(x))' - 2(\lambda\sin(x)+\mu\cos(x)) \\ & = & (-3\lambda-2\mu)\sin(x) + (2\lambda-3\mu)\cos(x)\ . \end{array}$$

Koeffizientenvergleich bei $\sin(x)$ gibt $\lambda - 2\mu \overset{!}{=} 1$. Koeffizientenvergleich bei $\cos(x)$ gibt $2\lambda+\mu \overset{!}{=} 0$. Wir berechnen

$$\left(\begin{smallmatrix} -3 & -2 & | & 1 \\ 2 & -3 & | & 0 \end{smallmatrix}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2/3 & | & -1/3 \\ 0 & -13/3 & | & 2/3 \end{smallmatrix}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & | & -3/13 \\ 0 & 1 & | & -2/13 \end{smallmatrix}\right)$$

und erhalten so $\lambda = -3/13$ und $\mu = -2/13$. Also wird

$$\hat{y}(x) \ = \ -\tfrac{3}{13}\sin(x) - \tfrac{2}{13}\cos(x)\ .$$

Alle Lösungen von $y'' + 2y' - 2y = \sin(x)$ sind also von der Form

$$y(x) \ = \ -\tfrac{3}{13}\sin(x) - \tfrac{2}{13}\cos(x) + r\,\mathrm{e}^{x(-1+\sqrt{3})} + s\,\mathrm{e}^{x(-1-\sqrt{3})}$$

auf $\mathbf{R}$ mit mit $r,\ s\ \in\ \mathbf{R}$.

Aufgabe 168

Wir verwenden die Bezeichnungen von §12.5.1.

Es ist $a = 1$, $b = 3$ und $c = 3$. Ferner ist $x_0 = 1$.

Da $a \neq c$, sind wir in Fall (1) des Lemmas aus §12.5.1. Es wird

$$(x_n)_{n\geqslant 0} \ = \ (\tfrac{b}{c-a}\,c^n + (x_0 - \tfrac{b}{c-a})a^n)_{n\geqslant 0} \ = \ (\tfrac{3}{2}\cdot 3^n - \tfrac{1}{2})_{n\geqslant 0}\ .$$

Aufgabe 169

(1) Wir verwenden die Bezeichnungen von §12.5.1.
Es ist $a = \frac{1}{2}$, $b = 1$ und $c = 1$. Ferner ist $x_0 = 0$.
Da $a \neq c$, sind wir in Fall (1) des Lemmas aus §12.5.1. Es wird

$$(x_n)_{n\geqslant 0} \ = \ (\tfrac{b}{c-a}\,c^n + (x_0 - \tfrac{b}{c-a})a^n)_{n\geqslant 0} \ = \ (2 - 2\,(\tfrac{1}{2})^n)_{n\geqslant 0} \ = \ (2 - 2^{1-n})_{n\geqslant 0}\ .$$

(2) Wir verwenden die Bezeichnungen von §12.5.2.
Es ist $a = 2$, $b = 4$, $c = 1$ und $d = 1$. Ferner ist $x_0 = \frac{13}{7}$ und $x_1 = \frac{27}{7}$.
Es ist $a^2 + b = 8 \neq 0$. Also sind wir in Fall (1) oder (2) des Lemmas aus §12.5.2.
Es ist $d^2 - 2ad - b = -7 \neq 0$. Also sind wir in Fall (1) des Lemmas aus §12.5.2.
Es ist $\lambda_1 := a + \sqrt{a^2+b} = 2 + \sqrt{8}$ und $\lambda_2 := a - \sqrt{a^2+b} = 2 - \sqrt{8}$.
Es wird

$$(x_n)_{n\geqslant 0} \ = \ (\tfrac{c}{d^2-2ad-b}\,d^n + r\lambda_1^n + s\lambda_2^n)_{n\geqslant 0} \ = \ (-\tfrac{1}{7} + r(2+\sqrt{8})^n + s(2-\sqrt{8})^n)_{n\geqslant 0}$$

mit $r,\ s\ \in\ \mathbf{C}$.

Aus $x_0 = \frac{13}{7}$ folgt $\frac{13}{7} = -\frac{1}{7} + r(2+\sqrt{8})^0 + s(2-\sqrt{8})^0 = -\frac{1}{7} + r + s$, also $r + s = 2$.
Aus $x_1 = \frac{27}{7}$ folgt $\frac{27}{7} = -\frac{1}{7} + r(2+\sqrt{8})^1 + s(2-\sqrt{8})^1$, also $r(2+\sqrt{8}) + s(2-\sqrt{8}) = 4$.
Wir lösen, unter Zuhilfenahme zweier naheliegender vorbereitender Schritte,

$$\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 2+\sqrt{8} & 2-\sqrt{8} \end{smallmatrix}\middle|\begin{smallmatrix} 2 \\ 4 \end{smallmatrix}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ \sqrt{8} & -\sqrt{8} \end{smallmatrix}\middle|\begin{smallmatrix} 2 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{smallmatrix}\middle|\begin{smallmatrix} 2 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{smallmatrix}\middle|\begin{smallmatrix} 2 \\ -2 \end{smallmatrix}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\middle|\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) .$$

Also ist $r = 1$ und $s = 1$. Es folgt

$$(x_n)_{n\geqslant 0} \;=\; (-\tfrac{1}{7} + (2+\sqrt{8})^n + (2-\sqrt{8})^n)_{n\geqslant 0}$$

(3) Wir verwenden die Bezeichnungen von §12.5.2.
Es ist $a = -1$, $b = -1$, $c = 1$ und $d = 2$. Ferner ist $x_0 = 1$ und $x_1 = 0$.
Es ist $a^2 + b = 0$. Also sind wir in Fall (3) oder (4) des Lemmas aus §12.5.2.
Es ist $d = 2 \neq -1 = a$. Also sind wir in Fall (3) des Lemmas aus §12.5.2.
Es wird

$$(x_n)_{n\geqslant 0} \;=\; (\tfrac{c}{(d-a)^2}\, d^n + ra^n + sna^n)_{n\geqslant 0} \;=\; (\tfrac{1}{9}\, 2^n + r(-1)^n + sn(-1)^n)_{n\geqslant 0}$$

mit $r,\, s \in \mathbf{R}$.
Aus $x_0 = 1$ folgt $1 = \frac{1}{9}\, 2^0 + r(-1)^0 + s\cdot 0\cdot(-1)^0 = \frac{1}{9} + r$ und also $r = \frac{8}{9}$.
Aus $x_1 = 0$ folgt $0 = \frac{1}{9}\, 2^1 + r(-1)^1 + s\cdot 1\cdot(-1)^1 = \frac{2}{9} - r - s$ und also $s = \frac{2}{9} - r = -\frac{2}{3}$.
Es folgt

$$(x_n)_{n\geqslant 0} \;=\; (\tfrac{1}{9}\, 2^n + \tfrac{8}{9}\,(-1)^n - \tfrac{2}{3}\, n(-1)^n)_{n\geqslant 0}$$

Die ersten paar Folgenglieder ergeben sich zu

$$(x_n)_{n\geqslant 0} \;=\; (1, 0, 0, 2, 0, 6, 4, 18, 24, 62, 108, \dots) .$$

Aufgabe 170

(1) Wir verwenden die Notation aus §12.4.3.
Nach Voraussetzung ist $u''(x) + 2au'(x) + bu(x) = 0$ für $x \in D$.
Es wird

$$\begin{aligned} (u(x)H(x))' &= u'(x)H(x) + u(x)H'(x) \\ &= u'(x)H(x) + u(x)(u(x)^{-2}\mathrm{e}^{-2ax}G(x)) \\ &= u'(x)H(x) + u(x)^{-1}\mathrm{e}^{-2ax}G(x) . \end{aligned}$$

Es wird

$$\begin{aligned} & (u(x)H(x))'' \\ = \;& (u'(x)H(x) + u(x)^{-1}\mathrm{e}^{-2ax}G(x))' \\ = \;& u''(x)H(x) + u'(x)H'(x) - u(x)^{-2}u'(x)\mathrm{e}^{-2ax}G(x) - 2au(x)^{-1}\mathrm{e}^{-2ax}G(x) + u(x)^{-1}\mathrm{e}^{-2ax}G'(x) \\ = \;& u''(x)H(x) + u'(x)u(x)^{-2}\mathrm{e}^{-2ax}G(x) - u(x)^{-2}u'(x)\mathrm{e}^{-2ax}G(x) - 2au(x)^{-1}\mathrm{e}^{-2ax}G(x) + u(x)^{-1}\mathrm{e}^{-2ax}(c(x)u(x)\mathrm{e}^{2ax}) \\ = \;& u''(x)H(x) - 2au(x)^{-1}\mathrm{e}^{-2ax}G(x) + c(x) . \end{aligned}$$

Insgesamt wird

$$\begin{aligned} & (u(x)H(x))'' + 2a(u(x)H(x))' + b(u(x)H(x)) - c(x) \\ = \;& (u''(x)H(x) - 2au(x)^{-1}\mathrm{e}^{-2ax}G(x) + c(x)) + 2a(u'(x)H(x) + u(x)^{-1}\mathrm{e}^{-2ax}G(x)) + bu(x)H(x) - c(x) \\ = \;& u''(x)H(x) + 2a(u'(x)H(x) + bu(x)H(x) \\ = \;& 0 \end{aligned}$$

auf D.

(2) Wir verwenden die Notation aus §§12.5.1.

(1) Ist $a \neq c$, und ist

$$(x_n)_{n\geqslant 0} \;=\; (\tfrac{b}{c-a}\, c^n + ra^n)_{n\geqslant 0}$$

mit $r \in \mathbf{R}$, dann ist

$$\begin{array}{rcl} x_{n+1} - ax_n - bc^n & = & (\tfrac{b}{c-a}\, c^{n+1} + ra^{n+1}) - a(\tfrac{b}{c-a}\, c^n + ra^n) - bc^n \\ & = & \tfrac{b}{c-a}\, c^{n+1} + ra^{n+1} - a\,\tfrac{b}{c-a}\, c^n - ra^{n+1} - bc^n \\ & = & \tfrac{b}{c-a}\, c^{n+1} - a\,\tfrac{b}{c-a}\, c^n - bc^n \\ & = & \tfrac{c^n}{c-a}(bc - ab - b(c-a)) \\ & = & 0 \end{array}$$

für $n \geqslant 0$.

(2) Ist $a = c$, und ist

$$(x_n)_{n\geqslant 0} \;=\; ((bn + ra)a^{n-1})_{n\geqslant 0}$$

mit $r \in \mathbf{R}$, dann ist

$$\begin{array}{rcl} x_{n+1} - ax_n - bc^n & = & x_{n+1} - ax_n - ba^n \\ & = & (b(n+1) + ra)a^n - a(bn + ra)a^{n-1} - ba^n \\ & = & (bn + b + ra)a^n - (bn + ra)a^n - ba^n \\ & = & (bn + b + ra - bn - ra - b)a^n \\ & = & 0 \end{array}$$

für $n \geqslant 0$.

(3) Wir verwenden die Notation aus §12.5.2.

(1) Ist $a^2 + b \neq 0$ und $d^2 - 2ad - b \neq 0$, dann wollen wir zeigen, daß

$$(x_n)_{n\geqslant 0} \;=\; (\tfrac{c}{d^2-2ad-b}\, d^n + r\lambda_1^n + s\lambda_2^n)_{n\geqslant 0}$$

mit $r,\, s \in \mathbf{C}$ die Gleichung $x_{n+2} - 2ax_{n+1} - bx_n - cd^n = 0$ erfüllt für $n \geqslant 0$.
Wir erinnern an $\lambda_1 = a + \sqrt{a^2+b}$ und $\lambda_2 = a - \sqrt{a^2+b}$.
Die Folge $(\lambda_1^n)_{n\geqslant 0}$ erfüllt

$$\begin{array}{rcl} \lambda_1^{n+2} - 2a\lambda_1^{n+1} - b\lambda_1^n & = & \lambda_1^n(\lambda_1^2 - 2a\lambda_1 - b) \\ & = & \lambda_1^n(a^2 + 2a\sqrt{a^2+b} + a^2 + b - 2a^2 - 2a\sqrt{a^2+b} - b) \\ & = & 0 \end{array}$$

für $n \geqslant 0$ und leistet somit keinen Beitrag.
Die Folge $(\lambda_2^n)_{n\geqslant 0}$ erfüllt

$$\begin{array}{rcl} \lambda_2^{n+2} - 2a\lambda_2^{n+1} - b\lambda_2^n & = & \lambda_2^n(\lambda_2^2 - 2a\lambda_2 - b) \\ & = & \lambda_2^n(a^2 - 2a\sqrt{a^2+b} + a^2 + b - 2a^2 + 2a\sqrt{a^2+b} - b) \\ & = & 0 \end{array}$$

für $n \geqslant 0$ und leistet somit keinen Beitrag.
Also dürfen wir ohne Einschränkung $r = s = 0$ setzen.

Nun wird

$$\begin{aligned} & x_{n+2} - 2ax_{n+1} - bx_n - cd^n \\ = \;& (\tfrac{c}{d^2-2ad-b}\, d^{n+2}) - 2a(\tfrac{c}{d^2-2ad-b}\, d^{n+1}) - b(\tfrac{c}{d^2-2ad-b}\, d^n) - cd^n \\ = \;& \tfrac{c(d^2-2ad-b)}{d^2-2ad-b}\, d^n - cd^n \\ = \;& 0 \end{aligned}$$

für $n \geqslant 0$.

(2) Ist $a^2 + b \neq 0$ und $d^2 - 2ad - b = 0$, dann wollen wir zeigen, daß

$$(x_n)_{n\geqslant 0} \;=\; (\tfrac{c}{2(d-a)}\, nd^{n-1} + r\lambda_1^n + s\lambda_2^n)_{n\geqslant 0}$$

mit $r,\, s \in \mathbf{C}$ die Gleichung $x_{n+2} - 2ax_{n+1} - bx_n - cd^n = 0$ erfüllt für $n \geqslant 0$.
Wie in (1) ist o.E. $r = s = 0$.
Nun wird

$$\begin{aligned} & x_{n+2} - 2ax_{n+1} - bx_n - cd^n \\ = \;& \tfrac{c}{2(d-a)}\, (n+2)d^{n+1} - 2a\tfrac{c}{2(d-a)}\, (n+1)d^n - b\tfrac{c}{2(d-a)}\, nd^{n-1} - cd^n \\ = \;& \tfrac{c}{2(d-a)}\, d^{n-1}(nd^2 + 2d^2 - 2and - 2ad - bn) - cd^n \\ = \;& \tfrac{c}{2(d-a)}\, d^{n-1}(2d^2 - 2ad) - cd^n \\ = \;& \tfrac{c}{2(d-a)}\, d^{n-1}2(d-a)d - cd^n \\ = \;& 0 \end{aligned}$$

für $n \geqslant 0$.

(3) Ist $a^2 + b = 0$ und $d \neq a$, und ist

$$(x_n)_{n\geqslant 0} \;=\; (\tfrac{c}{(d-a)^2}\, d^n + ra^n + sna^n)_{n\geqslant 0}$$

mit $r,\, s \in \mathbf{R}$, dann wird zunächst für $(a^n)_{n\geqslant 0}$

$$a^{n+2} - 2a\cdot a^{n+1} - ba^n \;=\; a^{n+2} - 2a\cdot a^{n+1} + a^2\cdot a^n \;=\; 0$$

und für $(na^n)_{n\geqslant 0}$

$$(n+2)a^{n+2} - 2a(n+1)a^{n+1} - bna^n \;=\; (n+2)a^{n+2} - 2a(n+1)a^{n+1} + a^2na^n \;=\; 0\;,$$

so daß wir $r = s = 0$ setzen dürfen und

$$\begin{aligned} & x_{n+2} - 2ax_{n+1} - bx_n - cd^n \\ = \;& \tfrac{c}{(d-a)^2}\, d^{n+2} - 2a\, \tfrac{c}{(d-a)^2}\, d^{n+1} - b\, \tfrac{c}{(d-a)^2}\, d^n - cd^n \\ = \;& \tfrac{c}{(d-a)^2}\, d^n(d^2 - 2ad - b) - cd^n \\ = \;& \tfrac{c}{(d-a)^2}\, d^n(d^2 - 2ad + a^2) - cd^n \\ = \;& \tfrac{c}{(d-a)^2}\, d^n(d-a)^2 - cd^n \\ = \;& 0 \end{aligned}$$

erhalten für $n \geqslant 0$.

(4) Ist $a^2 + b = 0$ und $d = a$, und ist

$$(x_n)_{n \geqslant 0} \;=\; (\tfrac{c}{2}\, n^2 a^{n-2} + r a^n + s n a^n)_{n \geqslant 0}$$

mit $r,\, s \in \mathbf{R}$, so dürfen wir wie in (3) o.E. $r = s = 0$ setzen und erhalten

$$\begin{array}{rl} & x_{n+2} - 2a x_{n+1} - b x_n - c d^n \\ = & \tfrac{c}{2}\,(n+2)^2 a^n - 2a\,\tfrac{c}{2}\,(n+1)^2 a^{n-1} - b\,\tfrac{c}{2}\,n^2 a^{n-2} - c d^n \\ = & \tfrac{c}{2}\,a^{n-2}((n+2)^2 a^2 - 2a(n+1)^2 a - b n^2) - c d^n \\ = & \tfrac{c}{2}\,a^{n-2}((n+2)^2 a^2 - 2a(n+1)^2 a + a^2 n^2) - c d^n \\ = & \tfrac{c}{2}\,a^n((n+2)^2 - 2(n+1)^2 + n^2) - c d^n \\ = & \tfrac{c}{2}\,a^n(n^2 + 4n + 4 - 2n^2 - 4n - 2 + n^2) - c d^n \\ = & \tfrac{c}{2}\,a^n \cdot 2 - c d^n \\ = & \tfrac{c}{2}\,a^n \cdot 2 - c a^n \\ = & 0 \end{array}$$

für $n \geqslant 0$.

Literatur

[1] BAULE, B., *Die Mathematik des Naturforschers und Ingenieurs,* Band IV, Hirzel, 1955.

[2] BARNER, M.; FLOHR, F., *Analysis II*, 3. Aufl., de Gruyter, 1996.

[3] ERWE, F., *Differential- und Integralrechnung I und II,* B.I. Hochschultaschenbücher, 1962.

[4] JANK, G.; , JONGEN, H., *Höhere Mathematik II für Maschinenbauer,* Aachener Beitr. Math. 4, 2. Aufl., 1996.

[5] KOLBE, W., *Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler,* Skript, Stuttgart, 2010.

[6] KOLBE, W., *Mathematik II für Wirtschaftswissenschaftler,* Skript, Stuttgart, 2010.

[7] MAURIN, K., *Analysis. Part I.*, Springer, 1976.

[8] RUMP, W., *Mathematik I für Wirtschaftswissenschaftler,* Skript, Stuttgart, 2006.

[9] RUMP, W., *Mathematik II für Wirtschaftswissenschaftler,* Skript, Stuttgart, 2006.

[10] MARTIN, A. ET AL., *Mathematik-Online,* `mo.mathematik.uni-stuttgart.de/kurse/kurs29` und `mo.mathematik.uni-stuttgart.de/kurse/kurs14`, Ulm, 2004.

[11] SYDSÆTER, K., HAMMOND, P., *Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler,* 2. Aufl., Pearson, 2006.