Gottwald, Künzer, Ritter

Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler

Blatt 5

Platzaufgaben

Platzaufgabe 15

(1) Schreiben Sie das folgende Gleichungssystem in der Form $Ax = b$ mit einer Matrix A und einem Vektor b.

$$\begin{array}{ccccccccc} 2x_1 & + & 4x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 7 \\ 3x_1 & + & 6x_2 & + & 3x_3 & + & 6x_4 & = & 6 \end{array}$$

(2) Formen Sie $(A|b)$ um, bis A in Zeilenstufenform ist.

(3) Bestimmen Sie eine Basis von $\{x \in \mathbf{R}^4 : Ax = 0\}$.

(4) Bestimmen Sie die Lösungsmenge $\{x \in \mathbf{R}^4 : Ax = b\}$ des Gleichungssystems $Ax = b$.

Platzaufgabe 16 Sei

$$A := \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie A^{-1}

(1) mit der Formel aus der Vorlesung,

(2) indem Sie A in die Zeilenstufenform überführen.

Platzaufgabe 17 Für die Unterräume T und U von $\mathbf{R}^4$ mit

$$T := \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \text{ und } U := \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

bestimmen Sie

(1) die Dimension und eine Basis von T,

(2) die Dimension und eine Basis von U,

(3) die Dimension und eine Basis von $T + U$,

(4) die Dimension und eine Basis von $T \cap U$.

Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler

Blatt 5

Hausaufgaben

Hausaufgabe 17 Sei $A := \begin{pmatrix} 3 & 3 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & -3 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ und $b := \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(1) Formen Sie $(A|b)$ um, bis A in Zeilenstufenform ist.

(2) Bestimmen Sie eine Basis von $\{x \in \mathbf{R}^6 : Ax = 0\}$.

(3) Bestimmen Sie $\{x \in \mathbf{R}^6 : Ax = b\}$.

Hausaufgabe 18 Falls A invertierbar ist, berechnen Sie A^{-1}.

(1) $A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

(2) $A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Hausaufgabe 19 Wir betrachten den Vektorraum $\mathbf{R}^{\mathbf{R}}$, die Funktionen $g_1 : \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ x \mapsto x^2$, $g_2 : \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ x \mapsto \sin(\pi x)$, $g_3 : \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ x \mapsto 1$ und $h : \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ x \mapsto \cos(\pi x)$, sowie den Unterraum $U := \langle g_1, g_2, g_3 \rangle$ von $\mathbf{R}^{\mathbf{R}}$.

(1) Ist (g_1, g_2, g_3) linear unabhängig?

Hinweis: $\lambda_1 g_1(x) + \lambda_2 g_2(x) + \lambda_3 g_3(x) = 0$ ansetzen und verschiedene Werte für x einsetzen.

(2) Ist (g_1, g_2, g_3) eine Basis von U?

(3) Ist $h \in U$? Ist (g_1, g_2, g_3) eine Basis von $\mathbf{R}^{\mathbf{R}}$?

Hausaufgabe 20 Für die Unterräume T und U von $\mathbf{R}^5$ mit

$$T := \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \text{ und } U := \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

(1) Bestimmen Sie die Dimension und eine Basis von T.

(2) Bestimmen Sie die Dimension und eine Basis von U.

(3) Bestimmen Sie die Dimension und eine Basis von $T + U$. Ist $T + U = \mathbf{R}^5$?

(4) Bestimmen Sie die Dimension und eine Basis von $T \cap U$.