Gottwald, Künzer, Ritter Wintersemester 2018/19

Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler

Blatt 2

Platzaufgaben

Platzaufgabe 4 Berechnen Sie

$$\lim_n \frac{n^2+1}{n^3-1} \,.$$

Platzaufgabe 5

(1) Skizzieren Sie die Graphen von $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R} : x \mapsto \mathrm{e}^x$ und von $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R} : x \mapsto 1 + x$ in ein gemeinsames Koordinatensystem.

(2) Wieso ist $\mathrm{e}^x \geqslant 1 + x$ für $x \geqslant 0$? Begründen Sie dies mithilfe der Exponentialreihe.

Platzaufgabe 6 Berechnen Sie

$$\sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^i \,.$$

Platzaufgabe 7 Sei

$$f : \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ x \mapsto f(x) := 2x + 1 \quad \text{und} \quad x_0 = 3.$$

Finden Sie für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta_\varepsilon > 0$ so, dass für alle $x \in \mathbf{R}$ mit $|x - x_0| < \delta_\varepsilon$ auch

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

gilt. Ist f stetig in x_0 ?

Gottwald, Künzer, Ritter Wintersemester 2018/19

Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler

Blatt 2

Hausaufgaben

Hausaufgabe 5 Sei $(a_n)_{n\geqslant 0} := \left(\dfrac{\sqrt{2n^4-2n}}{n^2+6} + \dfrac{1}{n+\mathrm{e}^n}\right)_{n\geqslant 0}$.

(1) Berechnen Sie das Folgenglied a_{100} mithilfe des Taschenrechners auf 5 Nachkommastellen genau.

(2) Wieso ist

$$b_n \;:=\; \frac{\sqrt{2n^4-2n}}{n^2+6} \;\leqslant\; a_n \;\leqslant\; \frac{\sqrt{2n^4-2n}}{n^2+6} + \frac{1}{n} \;=:\; c_n$$

für alle $n \in \mathbf{Z}_{\geqslant 0}$?

(3) Berechnen Sie $\lim_n b_n$ und $\lim_n c_n$.

(4) Berechnen Sie $\lim_n a_n$ unter Verwendung von (2) und (3).

Hausaufgabe 6

(1) Berechnen Sie $\displaystyle\sum_{n=1}^{7}(-1)^n\, 2^{-n}$. Berechnen Sie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\, 2^{-n}$.

(2) Für welche $q \in \mathbf{R}$ existiert $\displaystyle\sum_{i=0}^{\infty}(1-q)^i$? Berechnen Sie diesenfalls den Grenzwert.

Hausaufgabe 7

(1) Sei $f_\infty : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \mapsto \mathrm{e}^x$. Sei $f_k : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{k} \frac{x^n}{n!}$ für $k \geqslant 0$.

Skizzieren Sie die Graphen von f_2 , f_3 und f_∞ in ein gemeinsames Koordinatensystem.

(2) Überprüfen Sie anhand der Exponentialreihe, dass $\mathrm{e}^x \geqslant \dfrac{(x+1)^2}{2}$ gilt für $x \geqslant 0$.

Hausaufgabe 8 Sei $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \mapsto f(x) := x^2$ und $x_0 := 1$. Sei $0 < \varepsilon < 1$.

(1) Bestimmen Sie a_ε , $b_\varepsilon \in \mathbf{R}$ mit $\{\, x \in \mathbf{R}_{>0} \,:\, |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \,\} = (a_\varepsilon\, ,\, b_\varepsilon)$.

(2) Bestimmen Sie die Menge aus (1) für $\varepsilon = 0{,}5$ auf zeichnerischem Weg.

(3) Bestimmen Sie ein $\delta_\varepsilon > 0$ so, dass für alle $x \in \mathbf{R}$ mit $|x - x_0| < \delta_\varepsilon$ auch $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ gilt.