**Name:** 

Gottwald, Künzer, Ritter — Wintersemester 2018/19

Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler

# Test 3

**Bearbeitungszeit:** 60 Minuten.
**Erlaubte Hilfsmittel:** 4 eigenhändig handgeschriebene Seiten DIN A4.
**Bewertung:** Zu bearbeiten sind die **Aufgaben 1–4**. Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt.

**Aufgabe 1 (1 Punkt)** Sei $f : \mathbf{R}_{>0} \to \mathbf{R},\ x \mapsto f(x) = 195 \cdot 0{,}85^{x-1}$.
Berechnen Sie die Elastizität von $f$.

$$\mathrm{E}_f : \mathbf{R}_{>0} \to \mathbf{R},\ x \mapsto \mathrm{E}_f(x) = \boxed{\ln(0{,}85) \cdot x}$$

**Aufgabe 2 (2 Punkte)** Berechnen Sie das Taylorpolynom $t(x)$ um $x_0 := \frac{3\pi}{2}$ in 2-ter Ordnung von

$$f : \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ x \mapsto f(x) = \sin\left(\frac{x}{3}\right).$$

Taylorpolynom: $t(x) = \boxed{1 - \frac{1}{18}\left(x - \frac{3\pi}{2}\right)^2}$

**Aufgabe 3 (2 Punkte)** Sei $A := \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}$.

(1) Berechnen Sie die Hauptminoren von $A$.

$\mathrm{M}_1(A) = \boxed{-2}$ $\qquad \mathrm{M}_2(A) = \boxed{7}$

$\mathrm{M}_3(A) = \boxed{-14}$ $\qquad \mathrm{M}_4(A) = \boxed{14}$

(2) Untersuchen Sie $A$ auf Definitheit.

Tragen Sie in **jeden** Kasten **„ja“** oder **„nein“** ein.

Ist $A$ positiv definit? nein $\qquad$ Ist $A$ negativ definit? ja

**Bitte wenden →**

**Aufgabe 4 (5 Punkte)** Sei

$$f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R},\ (x,y,z) \mapsto f(x,y,z) = x^3 - 3xyz$$

und

$$g : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R},\ (x,y,z) \mapsto g(x,y,z) = z + y - yz + 3$$

(1) Berechnen Sie

$$\nabla_f(x,y,z) = \boxed{\begin{pmatrix} 3x^2 - 3yz \\ -3xz \\ -3xy \end{pmatrix}} \qquad \nabla_g(x,y,z) = \boxed{\begin{pmatrix} 0 \\ 1-z \\ 1-y \end{pmatrix}}$$

(2) Bestimmen Sie $\rho_1 \in \mathbf{R}$ mit $\nabla_f(-1,-1,-1) = \rho_1 \nabla_g(-1,-1,-1)$.

$$\rho_1 = \boxed{-\frac{3}{2}}$$

(3) Sei $F : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$, $(x,y,z) \mapsto F(x,y,z) := f(x,y,z) - \rho_1 g(x,y,z)$. Berechnen Sie

$$\mathrm{H}_F(-1,-1,-1) = \boxed{\begin{pmatrix} -6 & 3 & 3 \\ 3 & 0 & 3/2 \\ 3 & 3/2 & 0 \end{pmatrix}}$$

(4) Sei $N(-1,-1,-1) \in \mathbf{R}^{3\times 1}$ die Matrix mit der Spalte $\nabla_g(-1,-1,-1)$. Sei $U$ eine Matrix, deren Spalten eine Basis von $\{u \in \mathbf{R}^{3\times 1} : N(-1,-1,-1)^{\mathrm{t}}\, u = 0\}$ bilden. Berechnen Sie

$$U = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} \qquad U^{\mathrm{t}}\, \mathrm{H}_F(-1,-1,-1) U = \boxed{\begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}}$$

(5) Welche der folgenden Charakterisierungen treffen auf die Stelle $(-1,-1,-1)$ unter der Nebenbedingung $g = 0$ zu?

Tragen Sie an $\boxed{\textbf{jeder}}$ Stelle der folgenden Tabelle **„ja"** oder **„nein"** ein.

| | Flachstelle | lokale Minimalstelle | lokale Maximalstelle | Sattelpunkt |
|---|---|---|---|---|
| $(-1,-1,-1)$ | ja | nein | ja | nein |

**Name:** 

Gottwald, Künzer, Ritter — Wintersemester 2018/19

Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler

# Test 3

**Bearbeitungszeit:** 60 Minuten.
**Erlaubte Hilfsmittel:** 4 eigenhändig handgeschriebene Seiten DIN A4.
**Bewertung:** Zu bearbeiten sind die **Aufgaben 1–4**. Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt.

**Aufgabe 1 (1 Punkt)** Sei $f : \mathbf{R}_{>0} \to \mathbf{R},\ x \mapsto f(x) = 215 \cdot 0{,}75^{x-1}$.
Berechnen Sie die Elastizität von $f$.

$\mathrm{E}_f : \mathbf{R}_{>0} \to \mathbf{R},\ x \mapsto \mathrm{E}_f(x) =$ $\ln(0{,}75) \cdot x$

**Aufgabe 2 (2 Punkte)** Berechnen Sie das Taylorpolynom $t(x)$ um $x_0 := 3\pi$ in 2-ter Ordnung von

$$f : \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ x \mapsto f(x) = \cos\left(\frac{x}{3}\right).$$

Taylorpolynom: $t(x) =$ $-1 + \frac{1}{18}(x-3\pi)^2$

**Aufgabe 3 (2 Punkte)** Sei $A := \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

(1) Berechnen Sie die Hauptminoren von $A$.

$\mathrm{M}_1(A) =$ $-2$ $\qquad$ $\mathrm{M}_2(A) =$ $4$

$\mathrm{M}_3(A) =$ $8$ $\qquad$ $\mathrm{M}_4(A) =$ $20$

(2) Untersuchen Sie $A$ auf Definitheit.
Tragen Sie in **jeden** Kasten **„ja“** oder **„nein“** ein.

Ist $A$ positiv definit? nein $\qquad$ Ist $A$ negativ definit? nein

**Bitte wenden →**

**Aufgabe 4 (5 Punkte)** Sei

$$f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R},\ (x, y, z) \mapsto f(x, y, z) = 3x^3 + xyz$$

und

$$g : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R},\ (x, y, z) \mapsto g(x, y, z) = zy + y - z + 3$$

(1) Berechnen Sie

$$\nabla_f(x, y, z) = \boxed{\begin{pmatrix} 9x^2 + yz \\ xz \\ xy \end{pmatrix}} \qquad \nabla_g(x, y, z) = \boxed{\begin{pmatrix} 0 \\ z + 1 \\ y - 1 \end{pmatrix}}$$

(2) Bestimmen Sie $\rho_1 \in \mathbf{R}$ mit $\nabla_f(1, 3, -3) = \rho_1 \nabla_g(1, 3, -3)$.

$$\rho_1 = \boxed{\frac{3}{2}}$$

(3) Sei $F : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$, $(x, y, z) \mapsto F(x, y, z) := f(x, y, z) - \rho_1 g(x, y, z)$. Berechnen Sie

$$\mathrm{H}_F(1, 3, -3) = \boxed{\begin{pmatrix} 18 & -3 & 3 \\ -3 & 0 & -1/2 \\ 3 & -1/2 & 0 \end{pmatrix}}$$

(4) Sei $N(1, 3, -3) \in \mathbf{R}^{3\times 1}$ die Matrix mit der Spalte $\nabla_g(1, 3, -3)$. Sei $U$ eine Matrix, deren Spalten eine Basis von $\{u \in \mathbf{R}^{3\times 1} : N(1, 3, -3)^{\mathrm{t}}\, u = 0\}$ bilden. Berechnen Sie

$$U = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} \qquad U^{\mathrm{t}}\, \mathrm{H}_F(1, 3, -3)U = \boxed{\begin{pmatrix} 18 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}$$

(5) Welche der folgenden Charakterisierungen treffen auf die Stelle $(1, 3, -3)$ unter der Nebenbedingung $g = 0$ zu?

Tragen Sie an **jeder** Stelle der folgenden Tabelle **„ja“** oder **„nein“** ein.

| | Flachstelle | lokale Minimalstelle | lokale Maximalstelle | Sattelpunkt |
|---|---|---|---|---|
| $(1, 3, -3)$ | ja | nein | nein | ja |

**Name:** 

Gottwald, Künzer, Ritter — Wintersemester 2018/19

Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler

# Test 3

**Bearbeitungszeit:** 60 Minuten.
**Erlaubte Hilfsmittel:** 4 eigenhändig handgeschriebene Seiten DIN A4.
**Bewertung:** Zu bearbeiten sind die **Aufgaben 1–4**. Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt.

**Aufgabe 1 (1 Punkt)** Sei $f : \mathbf{R}_{>0} \to \mathbf{R},\ x \mapsto f(x) = 175 \cdot 0{,}95^{x-1}$.
Berechnen Sie die Elastizität von $f$.

$\mathrm{E}_f : \mathbf{R}_{>0} \to \mathbf{R},\ x \mapsto \mathrm{E}_f(x) =$ $\ln(0{,}95) \cdot x$

**Aufgabe 2 (2 Punkte)** Berechnen Sie das Taylorpolynom $t(x)$ um $x_0 := -6\pi$ in 2-ter Ordnung von

$$f : \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ x \mapsto f(x) = \cos\left(\frac{x}{3}\right).$$

Taylorpolynom: $t(x) =$ $1 - \frac{1}{18}(x + 6\pi)^2$

**Aufgabe 3 (2 Punkte)** Sei $A := \begin{pmatrix} -4 & -3 & 0 & 0 \\ -3 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$.

(1) Berechnen Sie die Hauptminoren von $A$.

$\mathrm{M}_1(A) =$ $-4$ $\qquad \mathrm{M}_2(A) =$ $7$

$\mathrm{M}_3(A) =$ $-7$ $\qquad \mathrm{M}_4(A) =$ $-21$

(2) Untersuchen Sie $A$ auf Definitheit.
Tragen Sie in **jeden** Kasten **„ja“** oder **„nein“** ein.

Ist $A$ positiv definit? nein $\qquad$ Ist $A$ negativ definit? nein

**Bitte wenden →**

**Aufgabe 4 (5 Punkte)** Sei

$$f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R},\ (x,y,z) \mapsto f(x,y,z) = -x^3 - 3xyz$$

und

$$g : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R},\ (x,y,z) \mapsto g(x,y,z) = 2z - 2y - zy - 12$$

(1) Berechnen Sie

$$\nabla_f(x,y,z) = \boxed{\begin{pmatrix} -3x^2 - 3yz \\ -3xz \\ -3xy \end{pmatrix}} \qquad \nabla_g(x,y,z) = \boxed{\begin{pmatrix} 0 \\ -2 - z \\ 2 - y \end{pmatrix}}$$

(2) Bestimmen Sie $\rho_1 \in \mathbf{R}$ mit $\nabla_f(2,-2,2) = \rho_1 \nabla_g(2,-2,2)$.

$$\rho_1 = \boxed{3}$$

(3) Sei $F : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$, $(x,y,z) \mapsto F(x,y,z) := f(x,y,z) - \rho_1 g(x,y,z)$. Berechnen Sie

$$\mathrm{H}_F(2,-2,2) = \boxed{\begin{pmatrix} -12 & -6 & 6 \\ -6 & 0 & -3 \\ 6 & -3 & 0 \end{pmatrix}}$$

(4) Sei $N(2,-2,2) \in \mathbf{R}^{3\times 1}$ die Matrix mit der Spalte $\nabla_g(2,-2,2)$. Sei $U$ eine Matrix, deren Spalten eine Basis von $\{u \in \mathbf{R}^{3\times 1} : N(2,-2,2)^{\mathrm{t}}\, u = 0\}$ bilden. Berechnen Sie

$$U = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} \qquad U^{\mathrm{t}}\, \mathrm{H}_F(2,-2,2) U = \boxed{\begin{pmatrix} -12 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}}$$

(5) Welche der folgenden Charakterisierungen treffen auf die Stelle $(2,-2,2)$ unter der Nebenbedingung $g = 0$ zu?

Tragen Sie an $\boxed{\textbf{jeder}}$ Stelle der folgenden Tabelle **„ja“** oder **„nein“** ein.

| | Flachstelle | lokale Minimalstelle | lokale Maximalstelle | Sattelpunkt |
|---|---|---|---|---|
| $(2,-2,2)$ | ja | nein | ja | nein |

**Name:** 

Gottwald, Künzer, Ritter — Wintersemester 2018/19

Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler

# Test 3

**Bearbeitungszeit:** 60 Minuten.
**Erlaubte Hilfsmittel:** 4 eigenhändig handgeschriebene Seiten DIN A4.
**Bewertung:** Zu bearbeiten sind die **Aufgaben 1–4**. Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt.

**Aufgabe 1 (1 Punkt)** Sei $f : \mathbf{R}_{>0} \to \mathbf{R},\ x \mapsto f(x) = 225 \cdot 0{,}65^{x-1}$.
Berechnen Sie die Elastizität von $f$.

$$\mathrm{E}_f : \mathbf{R}_{>0} \to \mathbf{R},\ x \mapsto \mathrm{E}_f(x) = \boxed{\ln(0{,}65) \cdot x}$$

**Aufgabe 2 (2 Punkte)** Berechnen Sie das Taylorpolynom $t(x)$ um $x_0 := -\frac{3\pi}{2}$ in 2-ter Ordnung von

$$f : \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ x \mapsto f(x) = \sin\left(\frac{x}{3}\right).$$

Taylorpolynom: $t(x) = \boxed{-1 + \frac{1}{18}\left(x + \frac{3\pi}{2}\right)^2}$

**Aufgabe 3 (2 Punkte)** Sei $A := \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

(1) Berechnen Sie die Hauptminoren von $A$.

$\mathrm{M}_1(A) = \boxed{2}$ $\quad \mathrm{M}_2(A) = \boxed{4}$

$\mathrm{M}_3(A) = \boxed{12}$ $\quad \mathrm{M}_4(A) = \boxed{32}$

(2) Untersuchen Sie $A$ auf Definitheit.

Tragen Sie in **jeden** Kasten **„ja“** oder **„nein“** ein.

Ist $A$ positiv definit? ja — Ist $A$ negativ definit? nein

**Bitte wenden →**

**Aufgabe 4 (5 Punkte)** Sei

$$f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R},\ (x, y, z) \mapsto f(x, y, z) = x^3 + 6xyz$$

und

$$g : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R},\ (x, y, z) \mapsto g(x, y, z) = zy + y - 2z + 6$$

(1) Berechnen Sie

$$\nabla_f(x, y, z) = \boxed{\begin{pmatrix} 3x^2 + 6yz \\ 6xz \\ 6xy \end{pmatrix}} \qquad \nabla_g(x, y, z) = \boxed{\begin{pmatrix} 0 \\ z+1 \\ y-2 \end{pmatrix}}$$

(2) Bestimmen Sie $\rho_1 \in \mathbf{R}$ mit $\nabla_f(2, -2, 1) = \rho_1 \nabla_g(2, -2, 1)$.

$$\rho_1 = \boxed{6}$$

(3) Sei $F : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$, $(x, y, z) \mapsto F(x, y, z) := f(x, y, z) - \rho_1 g(x, y, z)$. Berechnen Sie

$$\mathrm{H}_F(2, -2, 1) = \boxed{\begin{pmatrix} 12 & 6 & -12 \\ 6 & 0 & 6 \\ -12 & 6 & 0 \end{pmatrix}}$$

(4) Sei $N(2, -2, 1) \in \mathbf{R}^{3\times 1}$ die Matrix mit der Spalte $\nabla_g(2, -2, 1)$. Sei $U$ eine Matrix, deren Spalten eine Basis von $\{u \in \mathbf{R}^{3\times 1} : N(2, -2, 1)^{\mathrm{t}}\, u = 0\}$ bilden. Berechnen Sie

$$U = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} \qquad U^{\mathrm{t}}\, \mathrm{H}_F(2, -2, 1) U = \boxed{\begin{pmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 24 \end{pmatrix}}$$

(5) Welche der folgenden Charakterisierungen treffen auf die Stelle $(2, -2, 1)$ unter der Nebenbedingung $g = 0$ zu?

Tragen Sie an **jeder** Stelle der folgenden Tabelle **„ja“** oder **„nein“** ein.

| | Flachstelle | lokale Minimalstelle | lokale Maximalstelle | Sattelpunkt |
|---|---|---|---|---|
| $(2, -2, 1)$ | ja | ja | nein | nein |