Klausur zur Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler

Version für Betriebswirtschaftslehre (Prüfungsnummer 41991)

Allgemeine Hinweise :

- Bearbeitungszeit: 120 Minuten.
- Erlaubte Hilfsmittel: Vier Seiten DIN A4 eigenhändig handbeschrieben.
- In den Aufgaben 1–5 sind vollständige Lösungswege anzugeben. Die Bearbeitung dieser Aufgaben ist auf gesondertem Papier vorzunehmen.
- In den Aufgaben 6–8 werden nur die Endergebnisse gewertet. Diese sind in die vorgegebenen Kästen einzutragen.
- Ergebnisse müssen in der jeweils verlangten Form angegeben werden und dabei vollständig zu Ende gerechnet sein. Näherungslösungen in Dezimalbruchform werden nicht verlangt.

Hinweise für Wiederholer : Wer diese Prüfung als Wiederholungsprüfung schreibt und nicht besteht, ist selbst dafür verantwortlich, sich zu erkundigen, ob er eine zugehörige mündliche Nachprüfung erhält, und sich gegebenenfalls beim Prüfer anzumelden. Diese Anmeldung hat bis zum 31.10.2019 zu erfolgen.

Aufgabe 1 (2 Punkte)

Sei $f : \mathbf{R} \setminus \{-\frac{1}{2}\} \to \mathbf{R} \setminus \{0\}$, $x \mapsto f(x) := \dfrac{1}{2x+1}$.
Bestimmen Sie die Umkehrabbildung $f^{-1} : \mathbf{R} \setminus \{0\} \to \mathbf{R} \setminus \{-\frac{1}{2}\}$.

Lösung. Wir setzen $y = \dfrac{1}{1+2x}$ an und lösen nach x auf.
Es wird $\dfrac{1}{y} = 1 + 2x$, also $\dfrac{1}{y} - 1 = 2x$, also $\dfrac{1}{2y} - \dfrac{1}{2} = x$.
Somit ergibt sich

$$f^{-1} : \mathbf{R} \setminus \{0\} \;\to\; \mathbf{R} \setminus \{-\tfrac{1}{2}\}\,, \quad y \;\mapsto\; f^{-1}(y) \;=\; \frac{1}{2y} - \frac{1}{2}\,.$$

Aufgabe 2 (4+2 Punkte)

Berechnen Sie die folgenden Integrale.

(1) $\displaystyle\int_0^1 x^2 \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x$ (2) $\displaystyle\int_1^4 \ln(2x) - \ln(x) \,\mathrm{d}x$

Lösung.

(1) Wir verwenden zweimal die Produktregel:

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^2 \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x &= [x^2\mathrm{e}^x]_0^1 - \int_0^1 2x\mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x \\ &= [x^2\mathrm{e}^x]_0^1 - [2x\mathrm{e}^x]_0^1 + \int_0^1 2\mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x \\ &= [x^2\mathrm{e}^x]_0^1 - [2x\mathrm{e}^x]_0^1 + [2\mathrm{e}^x]_0^1 \\ &= \mathrm{e} - 2\mathrm{e} + (2\mathrm{e} - 2) \\ &= \mathrm{e} - 2\,. \end{aligned}$$

(2) Es ist $\ln(2x) - \ln(x) = \ln(2) + \ln(x) - \ln(x) = \ln(2)$.

Also wird $\displaystyle\int_1^4 \ln(2x) - \ln(x) \,\mathrm{d}x = \int_1^4 \ln(2) \,\mathrm{d}x = [\ln(2)x]_1^4 = 3\ln(2)$.

Aufgabe 3 (3+2+3 Punkte)

Sei $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R},\ (x,y,z) \mapsto f(x,y,z) := \mathrm{e}^{x+y+z}(xy+yz+zx)$.

(1) Berechnen Sie den Gradienten $\nabla_f(x,y,z)$ und die Hessematrix $\mathrm{H}_f(x,y,z)$ für $(x,y,z) \in \mathbf{R}^3$.

(2) Berechnen Sie alle Flachstellen von f; berechnen Sie hierzu zunächst $f_x - f_y$ und $f_y - f_z$.

(3) Welche lokalen Minimalstellen, welche lokalen Maximalstellen und welche Sattelpunkte hat f?

Lösung.

(1) Es ist

$$\nabla_f(x,y,z) \;=\; \mathrm{e}^{x+y+z} \cdot \begin{pmatrix} xy+yz+zx+y+z \\ xy+yz+zx+x+z \\ xy+yz+zx+x+y \end{pmatrix} .$$

Es ist

$$\mathrm{H}_f(x,y,z) \;=$$

$$\mathrm{e}^{x+y+z} \cdot \begin{pmatrix} xy+yz+zx+2y+2z & xy+yz+zx+x+y+2z+1 & xy+yz+zx+x+2y+z+1 \\ xy+yz+zx+x+y+2z+1 & xy+yz+zx+2x+2z & xy+yz+zx+2x+y+z+1 \\ xy+yz+zx+x+2y+z+1 & xy+yz+zx+2x+y+z+1 & xy+yz+zx+2x+2y \end{pmatrix} .$$

(2) Eine Stelle $(x,y,z) \in \mathbf{R}^3$ ist eine Flachstelle von f, falls $\nabla_f(x,y,z) = 0$ gilt.

Dazu müssen wir das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{x+y+z}(xy+yz+zx+y+z) &= 0 \\ \mathrm{e}^{x+y+z}(xy+yz+zx+x+z) &= 0 \\ \mathrm{e}^{x+y+z}(xy+yz+zx+x+y) &= 0 \end{aligned}$$

lösen.

Hierzu sollen wir bei (x,y,z) folgende Differenzen bestimmen.

$$\begin{aligned} f_x - f_y &= \mathrm{e}^{x+y+z}(y-x) \\ f_y - f_z &= \mathrm{e}^{x+y+z}(z-y) \end{aligned}$$

Soll $f_x = f_y = f_z = 0$ sein, so müssen auch diese Differenzen gleich 0 sein. Also ist $x = y = z$. Unser Gleichungssytem reduziert sich somit durch Einsetzen auf

$$\mathrm{e}^{x+x+x}(x^2+x^2+x^2+x+x) \;=\; 0 ,$$

wegen $\mathrm{e}^{3x} \neq 0$ also auf

$$(3x+2)x \;=\; 0 .$$

Dies liefert $x = -\dfrac{2}{3}$ oder $x = 0$ und damit die Flachstellen

$$P \;:=\; (0, 0, 0)$$

und

$$Q \;:=\; \left(-\frac{2}{3}\,,\, -\frac{2}{3}\,,\, -\frac{2}{3}\right)\;.$$

(3) Bei der Flachstelle P ist

$$\mathrm{H}_f(0,0,0) \;=\; \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\;.$$

Es ist $\mathrm{H}_f(0,0,0)$ weder positiv noch negativ definit, da der Eintrag an Position $(1,1)$ gleich 0 ist. Da zudem $\det \mathrm{H}_f(0,0,0) = \det\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{smallmatrix}\right) = 2 \neq 0$ ist, ist P ein Sattelpunkt.

Zur Berechnung der Hessematrix bei der Flachstelle Q kann man ausnützen, daß für $x = y = z$ auf der Diagonalen $3x^2 + 4x$ und bei den übrigen Einträgen $3x^2 + 4x + 1$ steht. Somit wird

$$\mathrm{H}_f\left(-\frac{2}{3}\,,\, -\frac{2}{3}\,,\, -\frac{2}{3}\right) \;=\; \frac{\mathrm{e}^{-2}}{3}\cdot\begin{pmatrix} -4 & -1 & -1 \\ -1 & -4 & -1 \\ -1 & -1 & -4 \end{pmatrix}\;.$$

Die Hauptminoren sind $\det(\frac{\mathrm{e}^{-2}}{3}(-4)) = -\frac{4}{3}\mathrm{e}^{-2} < 0$, $\det(\frac{\mathrm{e}^{-2}}{3}\left(\begin{smallmatrix} -4 & -1 \\ -1 & -4 \end{smallmatrix}\right)) = \frac{15}{9}\mathrm{e}^{-4} > 0$ und $\det(\frac{\mathrm{e}^{-2}}{3}\cdot\left(\begin{smallmatrix} -4 & -1 & -1 \\ -1 & -4 & -1 \\ -1 & -1 & -4 \end{smallmatrix}\right)) = \det(\frac{\mathrm{e}^{-2}}{3}\cdot\left(\begin{smallmatrix} -4 & -1 & -1 \\ 3 & -3 & 0 \\ 3 & 0 & -3 \end{smallmatrix}\right)) = \frac{\mathrm{e}^{-6}}{3}\det\left(\begin{smallmatrix} -4 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)) = \frac{\mathrm{e}^{-6}}{3}\det\left(\begin{smallmatrix} 0 & -5 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{smallmatrix}\right)) = -2\mathrm{e}^{-6} < 0$. Folglich ist die Hessematrix bei Q negativ definit. Somit ist P eine lokale Maximalstelle.

Aufgabe 4 (13 Punkte) Seien

$$\begin{array}{rcrcll}
f & : & \mathbf{R}^4 & \to & \mathbf{R}, & (x,y,z,w) \mapsto f(x,y,z,w) := xyzw \\
g_1 & : & \mathbf{R}^4 & \to & \mathbf{R}, & (x,y,z,w) \mapsto g_1(x,y,z,w) := x^2+y^2-2 \\
g_2 & : & \mathbf{R}^4 & \to & \mathbf{R}, & (x,y,z,w) \mapsto g_2(x,y,z,w) := z^2+w^2-2\,.
\end{array}$$

Wir schreiben $g := (g_1, g_2)$.

(1) Berechnen Sie die Gradienten $\nabla_f(x,y,z,w)$, $\nabla_{g_1}(x,y,z,w)$ und $\nabla_{g_2}(x,y,z,w)$ für $(x,y,z,w) \in \mathbf{R}^4$.

(2) Sei $P := (1,1,1,1)$. Ist P eine Flachstelle von f unter der Nebenbedingung $g = 0$? Falls ja, dann entscheide man, ob P eine lokale Maximalstelle oder eine lokale Minimalstelle oder ein Sattelpunkt von f unter der Nebenbedingung $g = 0$ ist.

(3) Sei $Q := (\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}, 0)$. Ist Q eine Flachstelle von f unter der Nebenbedingung $g = 0$? Falls ja, dann entscheide man, ob Q eine lokale Maximalstelle oder eine lokale Minimalstelle oder ein Sattelpunkt von f unter der Nebenbedingung $g = 0$ ist.

Lösung.

(1) Die Gradienten berechnen sich zu

$$\nabla_f(x,y,z,w) = \begin{pmatrix} yzw \\ xzw \\ xyw \\ xyz \end{pmatrix}, \quad \nabla_{g_1}(x,y,z,w) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \nabla_{g_2}(x,y,z,w) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2z \\ 2w \end{pmatrix}.$$

(2) Wir stellen das Gleichungssystem auf, mit welchem Flachstellen unter Nebenbedingung $g = 0$ ermittelt werden können.

Mit zusätzlichen Unbekannten ρ_1, $\rho_2 \in \mathbf{R}$ sollte

$$\begin{array}{rcl}
\nabla_f(x,y,z,w) & = & \rho_1 \nabla_{g_1}(x,y,z,w) + \rho_2 \nabla_{g_2}(x,y,z,w) \\
g_1(x,y,z,w) & = & 0 \\
g_2(x,y,z,w) & = & 0
\end{array}$$

sein. Dies übersetzt sich zu folgendem Gleichungssystem.

$$\begin{array}{rcl}
yzw & = & \rho_1 \cdot 2x + \rho_2 \cdot 0 \\
xzw & = & \rho_1 \cdot 2y + \rho_2 \cdot 0 \\
xyw & = & \rho_1 \cdot 0 + \rho_2 \cdot 2z \\
xyz & = & \rho_1 \cdot 0 + \rho_2 \cdot 2w \\
x^2+y^2-2 & = & 0 \\
z^2+w^2-2 & = & 0
\end{array}$$

Einsetzen des Punktes $P = (1, 1, 1, 1)$ liefert

$$\begin{array}{rcl} 1 & = & 2\rho_1 \\ 1 & = & 2\rho_1 \\ 1 & = & 2\rho_2 \\ 1 & = & 2\rho_2 \\ 0 & = & 0 \\ 0 & = & 0 \end{array}$$

Dies wird durch $\rho_1 = \frac{1}{2}$ und $\rho_2 = \frac{1}{2}$ gelöst.
Somit ist $P = (1, 1, 1, 1)$ eine Flachstelle von f unter Nebenbedingung $g = 0$ mit Lagrangemultiplikator $r = \binom{\rho_1}{\rho_2} = \binom{1/2}{1/2}$.
Wir untersuchen, ob P eine lokale Extremstelle unter Nebenbedingung $g = 0$ ist.
Es ist

$$\begin{array}{rcl} F(x,y,z,w) & = & f(x,y,z,w) - \rho_1 g_1(x,y,z,w) - \rho_2 g_2(x,y,z,w) \\ & = & xyzw - \frac{1}{2}(x^2+y^2-2) - \frac{1}{2}(z^2+w^2-2)\ . \end{array}$$

Es wird $\nabla_F(x,y,z,w) = \begin{pmatrix} yzw - x \\ xzw - y \\ xyw - z \\ xyz - w \end{pmatrix}$.

Es wird

$$\mathrm{H}_F(x,y,z,w) = \begin{pmatrix} -1 & zw & yw & yz \\ zw & -1 & xw & xz \\ yw & xw & -1 & xy \\ yz & xz & xy & -1 \end{pmatrix}$$

und also

$$\mathrm{H}_F(1,1,1,1) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\ .$$

Die Gradienten von g_1 und von g_2 geben

$$N(x,y,z,w) = \begin{pmatrix} 2x & 0 \\ 2y & 0 \\ 0 & 2z \\ 0 & 2w \end{pmatrix}, \quad \text{also} \quad N(1,1,1,1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\ .$$

Wir transponieren und lösen das entstehende homogene lineare Gleichungssystem.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Eine Basis des Lösungsraums ist gegeben durch $\left(\left(\begin{smallmatrix}-1\\1\\0\\0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}0\\0\\-1\\1\end{smallmatrix}\right)\right)$. Folglich ist

$$U = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Wir erhalten

$$\begin{aligned}
U^{\mathrm{t}} \cdot \mathrm{H}_F(1,1,1,1) \cdot U &= \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} =: A\,.
\end{aligned}$$

Die Hauptminoren dieser Matrix sind $\mathrm{M}_1(A) = -4$ und $\mathrm{M}_2(A) = 16$. Mithin ist A negativ definit.

Folglich ist $P = (1,1,1,1)$ ein lokales Maximum von f unter Nebenbedingung $g = 0$.

(3) Einsetzen von $Q = (\sqrt{2}, 0, \sqrt{2},)$ in das in (2) ermittelte Gleichungssystem liefert folgendes Gleichungssystem.

$$\begin{aligned}
0 &= \rho_1 \cdot 2\sqrt{2} \\
0 &= 0 \\
0 &= \rho_2 \cdot 2\sqrt{2} \\
0 &= 0 \\
0 &= 0 \\
0 &= 0
\end{aligned}$$

Somit ist $Q = (\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}, 0)$ eine Flachstelle von f unter Nebenbedingung $g = 0$ mit Lagrangemultiplikator $r = \binom{\rho_1}{\rho_2} = \binom{0}{0}$.

Wir untersuchen, ob Q eine lokale Extremstelle unter Nebenbedingung $g = 0$ ist.
Es ist

$$\begin{aligned} F(x,y,z,w) &= f(x,y,z,w) - \rho_1 g_1(x,y,z,w) - \rho_2 g_2(x,y,z,w) \\ &= xyzw\ . \end{aligned}$$

Es wird $\nabla_F(x,y,z,w) = \begin{pmatrix} yzw \\ xzw \\ xyw \\ xyz \end{pmatrix}$.

Es wird

$$\mathrm{H}_F(x,y,z,w) = \begin{pmatrix} 0 & zw & yw & yz \\ zw & 0 & xw & xz \\ yw & xw & 0 & xy \\ yz & xz & xy & 0 \end{pmatrix}$$

und also

$$\mathrm{H}_F(\sqrt{2},0,\sqrt{2},0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Die Gradienten von g_1 und von g_2 geben

$$N(\sqrt{2},0,\sqrt{2},0) = \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 2\sqrt{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Wir transponieren und lösen das entstehende homogene lineare Gleichungssystem.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\sqrt{2} & 0 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Eine Basis des Lösungsraums ist gegeben durch $\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. Folglich ist

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Wir erhalten

$$
\begin{aligned}
U^{\mathrm{t}} \cdot \mathrm{H}_F(1,1,1,1) \cdot U &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} =: A \,.
\end{aligned}
$$

Die Hauptminoren dieser Matrix sind $\mathrm{M}_1(A) = 0$ und $\mathrm{M}_2(A) = -4$.
Folglich ist $Q = (\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}, 0)$ ein Sattelpunkt von f unter Nebenbedingung $g = 0$.

Aufgabe 5 (2 Punkte)

Sei bei einem Sparvertrag jährliche Verzinsung vereinbart, zu einem Zinsfaktor $q > 1$. Sei für die jährlich einzuzahlende Rate $R = 200$ Euro nachschüssige Zahlung vereinbart.
Sei das Anfangskapital $K_0 = 0$ Euro.

(1) Bestimmen Sie das Kapital K_5 nach Ablauf von 5 Jahren, in Abhängigkeit von q.

(2) Bei welchem Zinsfaktor q ergibt sich nach 2 Jahren ein Kapital von $K_2 = 412$ Euro?

Lösung.

(1) Es ist $K_5 = 200 \cdot \dfrac{q^5 - 1}{q - 1}$.

(2) Es ist $K_2 = 200 \cdot \dfrac{q^2 - 1}{q - 1} = 200(q + 1)$.

Es sollte also $200(q + 1) = 412$ sein, folglich $200q = 212$ und also $q = 1{,}06$.

Name, Vorname, Matrikelnummer:	

Aufgabe 6 (2+2+1 Punkte) Sei

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} .$$

(1) Formen Sie A in Zeilenstufenform um.

Zeilenstufenform von A: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(2) Geben Sie eine Basis von $\{ x \in \mathbf{R}^{4\times 1} \;:\; Ax = 0 \}$ an.

Basis von $\{ x \in \mathbf{R}^{4\times 1} \;:\; Ax = 0 \}$: $\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

(3) Geben Sie den Cosinus des Winkels α an, der von den Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ eingeschlossen wird.

$\cos(\alpha) =$ $\sqrt{\frac{2}{3}}$

Aufgabe 7 (1+1 Punkte) Berechnen Sie folgende Reihengrenzwerte.

(1) $$\sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^k = \boxed{\frac{2}{3}}$$

(2) $$\sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^{2k} = \boxed{\frac{4}{3}}$$

Aufgabe 8 (2 Punkte)

Sei $A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie: $A^{-1} = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$
