Gottwald, Künzer, Ritter Wintersemester 2018/19

Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler

Lösung 9

Lösungen zu den Hausaufgaben

Hausaufgabe 32 Seien $z = 2 - 3\mathrm{i}$, $w = 4 - \mathrm{i}$ und $v = 2 + \mathrm{i}$.
Berechnen Sie folgende komplexe Zahlen.

(1) $z\overline{w}v^{-1}$ (3) $|v + w + z|$

(2) $\mathrm{Re}(vw) + \mathrm{Im}(vz)$. (4) $\dfrac{v\overline{v}}{w}$

Lösung.

(1) Es ist

$$\begin{aligned} z\overline{w}v^{-1} = \frac{(2-3\mathrm{i}) \cdot \overline{4-\mathrm{i}}}{2+\mathrm{i}} = \frac{(2-3\mathrm{i})(4+\mathrm{i})}{2+\mathrm{i}} = \frac{(2-3\mathrm{i})(4+\mathrm{i})}{2+\mathrm{i}} &= \frac{11-10\mathrm{i}}{2+\mathrm{i}} \\ &= \frac{(11-10\mathrm{i})(2-\mathrm{i})}{4+1} \\ &= \frac{12-31\mathrm{i}}{5} \\ &= \frac{12}{5} - \frac{31}{5}\mathrm{i}. \end{aligned}$$

(2) Es ist

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}(vw) + \mathrm{Im}(vz) &= \mathrm{Re}((2+\mathrm{i})(4-\mathrm{i})) + \mathrm{Im}((2+\mathrm{i})(2-3\mathrm{i})) \\ &= \mathrm{Re}(9+2\mathrm{i}) + \mathrm{Im}(7-4\mathrm{i}) \\ &= 9 - 4 \\ &= 5. \end{aligned}$$

(3) Es ist

$$|v+w+z| = |2+\mathrm{i}+4-\mathrm{i}+2-3\mathrm{i}| = |8-3\mathrm{i}| = \sqrt{73}.$$

(4) Es ist

$$\frac{v\overline{v}}{w} = \frac{(2+\mathrm{i}) \cdot \overline{2+\mathrm{i}}}{4-\mathrm{i}} = \frac{(2+\mathrm{i})(2-\mathrm{i})}{4-\mathrm{i}} = \frac{5}{4-\mathrm{i}} = \frac{5(4+\mathrm{i})}{17} = \frac{20}{17} + \frac{5}{17}\mathrm{i}.$$

Hausaufgabe 33 Berechnen Sie für die folgenden Folgen und Reihen den jeweiligen Grenzwert oder entscheiden Sie auf Divergenz.

(1) $\left(\frac{(-1)^n}{n} + \frac{n}{n+1}\mathrm{i}\right)_{n\geqslant 1}$

(2) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\pi^n \cdot \mathrm{i}^n}{n!}$

(3) $(\frac{1}{n} + \cos(n\pi) \cdot \mathrm{i})_{n \geqslant 1}$

(4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\ln(2) + \mathrm{i}\pi/3)^n}{n!}$

Lösung.

(1) Die Folge $(\frac{(-1)^n}{n} + \frac{n}{n+1}\mathrm{i})_{n \geqslant 1}$ konvergiert genau dann, wenn $(\frac{(-1)^n}{n})_{n \geqslant 1}$ und $(\frac{n}{n+1})_{n \geqslant 1}$ konvergieren.

Da $-\frac{1}{n} \leqslant \frac{(-1)^n}{n} \leqslant \frac{1}{n}$ für alle $n \geqslant 1$ gilt und die beiden äußeren Folgen gegen 0 konvergieren, konvergiert mit dem Lemma von Sandwich auch $\frac{(-1)^n}{n}$ gegen 0.

Außerdem ist $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n\to\infty}(1 - \frac{1}{n+1}) = 1 - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 1$.

Also ist $\lim_{n\to\infty}(\frac{(-1)^n}{n} + \frac{n}{n+1}\mathrm{i})_{n \geqslant 1} = \mathrm{i}$.

(2) Nach der Definition der Exponentialfunktion und der Eulerschen Formel ist

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\pi^n \cdot \mathrm{i}^n}{n!} = \mathrm{e}^{\pi \cdot \mathrm{i}} = \mathrm{e}^0(\cos(\pi) + \mathrm{i}\sin(\pi)) = -1.$$

(3) Die Folge $(\frac{1}{n} + \cos(n\pi) \cdot \mathrm{i})_{n \geqslant 1}$ kann nur konvergieren, wenn auch $(\cos(n\pi))_{n \geqslant 1}$ konvergiert. Allerdings ist $\cos(n\pi) = (-1)^n$. Das bedeutet, dass für jede Zahl $x \in \mathbf{R}$ und $k \in \mathbf{N}$ die Gleichungen

$$|\cos(2k\pi) - x| = |(-1)^{2k} - x| = |1 - x|$$

und

$$|\cos((2k+1)\pi) - x| = |(-1)^{2k+1} - x| = |-1 - x| = |1 + x|$$

gelten.

Aber aus der Bedingung $|1 - x| < \epsilon$ für alle $\epsilon > 0$ folgt $x = 1$, während aus der Bedingung $|1 + x| < \epsilon$ für alle $\epsilon > 0$ folgt, dass $x = -1$ ist, ein Widerspruch.

Also divergiert $(\cos(n\pi))_{n \geqslant 1}$ und damit auch $(\frac{1}{n} + \cos(n\pi) \cdot \mathrm{i})_{n \geqslant 1}$.

(4) Es ist nach der Definition der Exponentialfunktion und der Eulerschen Formel

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\ln(2) + \mathrm{i}\pi/3)^n}{n!} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\ln(2) + \mathrm{i}\pi/3)^n}{n!} - \frac{(\ln(2) + \mathrm{i}\pi/3)^0}{0!} \\
&= \mathrm{e}^{\ln(2) + \mathrm{i}\pi/3} - 1 \\
&= \mathrm{e}^{\ln(2)}(\cos(\pi/3) + \mathrm{i}\sin(\pi/3)) - 1 \\
&= 2 \cdot \left(\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - 1 \\
&= \mathrm{i}\sqrt{3}.
\end{aligned}$$

Hausaufgabe 34 Berechnen Sie folgende komplexe Zahlen.

(1) $\cos\left(\dfrac{\pi + 2\pi\mathrm{i}}{1 + \mathrm{i}}\right)$

(2) $\mathrm{e}^{1 + \mathrm{i} \cdot 7\pi/6}$

(3) $\mathrm{e}^{\ln(3) + \mathrm{i}\pi/4} + \mathrm{e}^{\ln(3) + \mathrm{i} \cdot 7\pi/4}$

(4) $2\sin(\mathrm{i}) + \mathrm{i}^{13}\mathrm{e}^{-1}$

Lösung.

(1) Es ist

$$\frac{\pi + 2\pi \mathrm{i}}{1+\mathrm{i}} = \frac{(\pi + 2\pi \mathrm{i})(1-\mathrm{i})}{2} = \frac{3}{2}\pi + \frac{1}{2}\pi \mathrm{i},$$

also ist

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{\pi + 2\pi \mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}\right) = \cos\left(\frac{3}{2}\pi + \frac{1}{2}\pi \mathrm{i}\right) &= \cos\left(\frac{3}{2}\pi\right)\cos\left(\frac{1}{2}\pi \mathrm{i}\right) - \sin\left(\frac{3}{2}\pi\right)\sin\left(\frac{1}{2}\pi \mathrm{i}\right) \\ &= 0 \cdot \cos\left(\frac{1}{2}\pi \mathrm{i}\right) + \sin\left(\frac{1}{2}\pi \mathrm{i}\right) \\ &= \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\pi} - \mathrm{e}^{+\frac{1}{2}\pi}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\pi} - \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\pi}\right)\mathrm{i}.\end{aligned}$$

(2) Es ist

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{1+\mathrm{i}\cdot 7\pi/6} &= \mathrm{e}^1 \cdot \left(\cos\left(\frac{7}{6}\pi\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{7}{6}\pi\right)\right) \\ &= \mathrm{e}\left(\cos\left(\pi + \frac{1}{6}\pi\right) + \mathrm{i}\sin\left(\pi + \frac{1}{6}\pi\right)\right) \\ &= \mathrm{e}\left(\cos(\pi)\cos\left(\frac{1}{6}\pi\right) - \sin(\pi)\sin\left(\frac{1}{6}\pi\right) + \mathrm{i}\left(\cos(\pi)\sin\left(\frac{1}{6}\pi\right) + \sin(\pi)\cos\left(\frac{1}{6}\pi\right)\right)\right) \\ &= \mathrm{e}\left(-\frac{1}{2}\sqrt{3} - 0 + \mathrm{i}\left(-\frac{1}{2} + 0\right)\right) \\ &= -\frac{1}{2}\sqrt{3}\mathrm{e} - \frac{1}{2}\mathrm{e}\mathrm{i}.\end{aligned}$$

(3) Es ist

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{\ln(3)+\mathrm{i}\pi/4} + \mathrm{e}^{\ln(3)+\mathrm{i}\cdot 7\pi/4} &= \mathrm{e}^{\ln(3)} \cdot \left(\cos\left(\frac{1}{4}\pi\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{1}{4}\pi\right)\right) + \mathrm{e}^{\ln(3)} \cdot \left(\cos\left(\frac{7}{4}\pi\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{7}{4}\pi\right)\right) \\ &= 3 \cdot \left(\cos\left(\frac{1}{4}\pi\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{1}{4}\pi\right) + \cos\left(2\pi - \frac{1}{4}\pi\right) + \mathrm{i}\sin\left(2\pi - \frac{1}{4}\pi\right)\right) \\ &= 3 \cdot \left(\cos\left(\frac{1}{4}\pi\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{1}{4}\pi\right) + \cos\left(-\frac{1}{4}\pi\right) + \mathrm{i}\sin\left(-\frac{1}{4}\pi\right)\right) \\ &= 3 \cdot \left(\cos\left(\frac{1}{4}\pi\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{1}{4}\pi\right) + \cos\left(\frac{1}{4}\pi\right) - \mathrm{i}\sin\left(\frac{1}{4}\pi\right)\right) \\ &= 3\sqrt{2}.\end{aligned}$$

(4) Es ist

$$2\sin(\mathrm{i}) + \mathrm{i}^{13}\mathrm{e}^{-1} = 2 \cdot \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot\mathrm{i}} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\cdot\mathrm{i}}\right) + \mathrm{i}^{4\cdot 3+1}\mathrm{e}^{-1} = -\mathrm{i}\left(\mathrm{e}^{-1} - \mathrm{e}^{1}\right) + \mathrm{i}\mathrm{e}^{-1} = \mathrm{i}\mathrm{e}.$$

Hausaufgabe 35

(1) Sei $z = -3 + 3\mathrm{i}$. Finden Sie $(x, y) \in \mathbf{R} \times [0, 2\pi)$ mit $\mathrm{e}^{x+\mathrm{i}y} = z$.

(2) Finden Sie $(x, y) \in \mathbf{R} \times [0, 2\pi)$ mit $\mathrm{e}^{x+\mathrm{i}y} = 2\mathrm{i}$.

Finden Sie alle $(u, v) \in \mathbf{R} \times [0, 2\pi)$ mit $(\mathrm{e}^{u+\mathrm{i}v})^2 = 2\mathrm{i}$.

Zeichnen Sie $\mathrm{e}^{x+\mathrm{i}y}$ sowie $\mathrm{e}^{u+\mathrm{i}v}$ für alle Lösungen (u, v) in der komplexen Zahlenebene ein.

(3) Berechnen Sie $\sin(x)^4$ unter Verwendung von $\sin(x) = \frac{1}{2\mathrm{i}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x})$.

Bestimmen Sie $a, b, c \in \mathbf{R}$ so, dass die folgende Gleichung für alle $x \in \mathbf{C}$ gilt:

$$\sin(x)^4 = a + b\cos(2x) + c\cos(4x)$$

(4) Berechnen Sie $\sin(x)^3\cos(x)^2$ unter Verwendung von $\sin(x) = \frac{1}{2\mathrm{i}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x})$ und von $\cos(x) = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x})$.

Bestimmen Sie $a, b, c \in \mathbf{R}$ so, dass die folgende Gleichung für alle $x \in \mathbf{C}$ gilt:

$$\sin(x)^3\cos(x)^2 = a\sin(x) + b\sin(3x) + c\sin(5x)$$

Lösung

(1) Es ist $\mathrm{e}^{x+\mathrm{i}y} = \mathrm{e}^x(\cos(y) + \mathrm{i}\sin(y))$. Damit $\mathrm{e}^{x+\mathrm{i}y} = -3 + 3\mathrm{i}$ gilt, muss also $\mathrm{e}^x\cos(y) = -3$ und $\mathrm{e}^x\sin(y) = 3$ sein, also insbesondere $\cos(y) < 0$ und $\sin(y) = -\cos(y)$, was für $y = \frac{3}{4}\pi$ erfüllt ist: es ist

$$\cos\left(\frac{3}{4}\pi\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} = -\sin\left(\frac{3}{4}\pi\right).$$

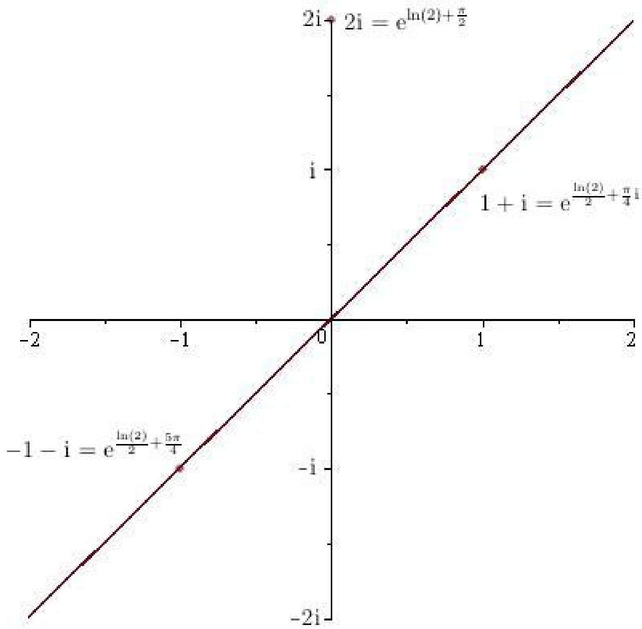
Damit muss $\mathrm{e}^x = 3 \cdot \dfrac{2}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}$ gelten, also $x = \ln\big(3\sqrt{2}\big)$.

(2) Wie zuvor ist ist $\mathrm{e}^{x+\mathrm{i}y} = \mathrm{e}^x(\cos(y) + \mathrm{i}\sin(y))$, also ist $\mathrm{e}^{x+\mathrm{i}y} = 2\mathrm{i}$ genau dann erfüllt, wenn die Gleichungen $\mathrm{e}^x\cos(y) = 0$ und $\mathrm{e}^x\sin(y) = 2$ erfüllt sind. Da $\mathrm{e}^x \neq 0$ für alle $x \in \mathbf{R}$ gilt, muss $\cos(y) = 0$ sein und da $y \in [0, 2\pi)$ ist, ist dies äquivalent zu $y = \frac{\pi}{2}$ oder $y = \frac{3\pi}{2}$.

Da außerdem $\mathrm{e}^x > 0$ ist, $\sin\big(\frac{\pi}{2}\big) = 1$ und $\sin\big(\frac{3\pi}{2}\big) = -1$, folgt aus $\mathrm{e}^x\sin(y) = 2$, dass $y = \frac{\pi}{2}$ und $x = \ln(2)$ sein muss.

Damit $(\mathrm{e}^{u+\mathrm{i}v})^2 = 2\mathrm{i}$ gilt, muss $\mathrm{e}^{2u+\mathrm{i}\cdot 2v} = 2\mathrm{i}$ sein. Mit den Überlegungen oben ist also $\mathrm{e}^{2u} = \mathrm{e}^x$, $\cos(2v) = \cos(y)$ und $\sin(2v) = \sin(y)$. Daraus folgt $2u = x$, und dass es ein $k \in \mathbf{Z}$ mit $2v = y + 2k\pi$ gibt.

Also ist $u = \frac{\ln(2)}{2}$ und aufgrund von $v \in [0, 2\pi)$ muss $v = \frac{\pi}{4}$ oder $v = \frac{5\pi}{4}$ gelten. Die gesuchten Punkte sind also $\left(\frac{\ln(2)}{2}, \frac{\pi}{4}\right)$ und $\left(\frac{\ln(2)}{2}, \frac{5\pi}{4}\right)$.



(3) Es ist

$$
\begin{aligned}
(\sin(x))^4 &= \left(\frac{1}{2\mathrm{i}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x})\right)^4 \\
&= \frac{1}{16\mathrm{i}^4}(\mathrm{e}^{4\mathrm{i}x} - 4\mathrm{e}^{3\mathrm{i}x-\mathrm{i}x} + 6\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x-2\mathrm{i}x} - 4\mathrm{e}^{\mathrm{i}x-3\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-4\mathrm{i}x}) \\
&= \frac{1}{16}(\mathrm{e}^{4\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-4\mathrm{i}x} - 4(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x}) + 6) \\
&= \frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{1}{8}\cos(4x).
\end{aligned}
$$

(4) Es ist

$$
\begin{aligned}
&\sin(x)^3\cos(x)^2 \\
=&\left(\frac{1}{2\mathrm{i}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x})\right)^3 \left(\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x})\right)^2 \\
=&\frac{1}{32\mathrm{i}^3}(\mathrm{e}^{3\mathrm{i}x} - 3\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x-\mathrm{i}x} + 3\mathrm{e}^{\mathrm{i}x-2\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-3\mathrm{i}x})(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x} + 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}x-\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x}) \\
=&-\frac{1}{32\mathrm{i}}(\mathrm{e}^{3\mathrm{i}x} - 3\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + 3\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-3\mathrm{i}x})(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x} + 2 + \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x}) \\
=&-\frac{1}{32\mathrm{i}}(\mathrm{e}^{5\mathrm{i}x} - 3\mathrm{e}^{3\mathrm{i}x} + 3\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x} + 2(\mathrm{e}^{3\mathrm{i}x} - 3\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + 3\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-3\mathrm{i}x}) \\
&+ \mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - 3\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x} + 3\mathrm{e}^{-3\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-5\mathrm{i}x}) \\
=&-\frac{1}{32\mathrm{i}}(\mathrm{e}^{5\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-5\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{3\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-3\mathrm{i}x} - 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + 2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}) \\
=&\frac{1}{8}\sin(x) + \frac{1}{16}\sin(3x) - \frac{1}{16}\sin(5x).
\end{aligned}
$$