Gottwald, Künzer, Ritter Wintersemester 2018/19

Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler

Lösung 8

Lösungen zu den Hausaufgaben

Hausaufgabe 29 Sei

$$f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R},\ (x, y, z) \mapsto x^2y^2 + 2x^2 + z + x^2z$$

und

$$g : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R},\ (x, y, z) \mapsto x^2 + y^2 + z\ .$$

(1) Berechnen Sie $\nabla_f(x, y, z)$ und $\nabla_g(x, y, z)$ für $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$.

(2) Berechnen Sie alle Flachstellen von f unter der der Nebenbedingung $g = 0$.

(3) Unter der Nebenbedingung $g = 0$, welche lokalen Minimalstellen, welche lokalen Maximalstellen und welche Sattelpunkte hat f ?

Lösung.

(1) Es ist

$$\nabla_f(x, y, z) = \begin{pmatrix} f_x(x, y, z) \\ f_y(x, y, z) \\ f_z(x, y, z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2xy^2 + 4x + 2xz \\ 2x^2y \\ 1 + x^2 \end{pmatrix}$$

$$\nabla_g(x, y, z) = \begin{pmatrix} g_x(x, y, z) \\ g_y(x, y, z) \\ g_z(x, y, z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(2) Hierzu lösen wir das folgende Gleichungssystem für $x, y, z, r \in \mathbf{R}$:

$$\begin{aligned} \nabla_f(x, y, z) &= \nabla_g(x, y, z) \cdot \rho_1 \\ x^2 + y^2 + z &= 0 \end{aligned}$$

Einsetzen der Ergebnisse aus (1) ergibt die folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned} 2xy^2 + 4x + 2xz &= 2\rho_1 x \\ 2x^2y &= 2\rho_1 y \\ 1 + x^2 &= \rho_1 \\ x^2 + y^2 + z &= 0. \end{aligned}$$

Die 3. Gleichung ist äquivalent zu $x^2 = \rho_1 - 1$. Einsetzen in die 2. Gleichung ergibt $2(\rho_1 - 1)y = 2\rho_1 y$ und damit $-2y = 0$. Also muss $y = 0$ gelten.

Dann folgt aus der 4. Gleichung $z = -x^2$. Einsetzen in die 1. Gleichung unter Beachtung von $y = 0$ ergibt

$$4x + 2x(-x^2) = 4x - 2x^3 = 2\rho_1 x.$$

Im Fall $x = 0$ ergibt die 3. Gleichung $\rho_1 = 1$ und mit den obigen Rechnungen ist das Gleichungssystem genau dann erfüllt, wenn $y = z = 0$ gilt. Also ist $(0, 0, 0)$ ein Flachpunkt von f unter der Nebenbedingung $g = 0$ und in diesem Fall ist $\rho_1 = 1$.

Im Fall $x \neq 0$ ist $4x - 2x^3 = 2\rho_1 x$ äquivalent zu $4 - 2x^2 = 2\rho_1$. Aus der 3. Gleichung wissen wir, dass $x^2 = \rho_1 - 1$ gilt. Einsetzen ergibt $4 - 2(\rho_1 - 1) = 2\rho_1$ und damit $\rho_1 = \frac{3}{2}$. Damit ist $x^2 = \rho_1 - 1 = \frac{1}{2}$ und wir bekommen für x die möglichen Lösungen $\frac{\sqrt{2}}{2}$ und $-\frac{\sqrt{2}}{2}$. Da $z = -x^2$ ist, folgt in beiden Fällen $z = -\frac{1}{2}$.

Wir haben also die Flachstellen $(0, 0, 0)$ mit $\rho_1 = 1$, $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{1}{2}\right)$ mit $\rho_1 = \frac{3}{2}$ und $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{1}{2}\right)$ mit $\rho_1 = \frac{3}{2}$.

(3) Um zu bestimmen, welche der Flachstellen aus (2) lokale Minimalstellen, lokale Maximalstellen bzw. Sattelpunkte sind, betrachten wir für jede Flachstelle (x, y, z) die Funktion $F = f - \rho_1 g$, wobei ρ_1 jeweils den Wert annimmt, den wir in (2) berechnet haben. Dann überprüfen wir $U^t \mathrm{H}_F(x, y, z)U$ auf Definitheit, wobei die Spalten von U eine Basis von $\{u \in \mathbf{R}^3 : \mathrm{N}(x, y, z)^t u = 0\}$ bilden. Da wir nur eine Nebenbedingung haben, ist $\mathrm{N}(x, y, z)$ die Matrix mit der Spalte $\nabla_g(x, y, z)$.

Für $(0, 0, 0)$ ist $\rho_1 = 1$ und damit $F = f - g$. Also ist der Gradient von F

$$\nabla_F(x, y, z) = \nabla_f(x, y, z) - \nabla_g(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2xy^2 + 2x + 2xz \\ 2x^2y - 2y \\ x^2 \end{pmatrix}$$

und die Hessematrix

$$\mathrm{H}_F(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2y^2 + 2z + 2 & 4xy & 2x \\ 4xy & 2x^2 - 2 & 0 \\ 2x & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

also

$$\mathrm{H}_F(0, 0, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Es ist $\mathrm{N}(0, 0, 0)^t = \nabla_g(0, 0, 0)^t = (0, 0, 1)$. Eine Basis des Vektorraums $\{u \in \mathbf{R}^3 : (0, 0, 1)u = 0\}$ ist gegeben durch $\left(\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)\right)$.

Also ist

$$U^t \mathrm{H}_F(0, 0, 0)U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix},$$

eine Matrix mit der Determinante -4, die weder positiv noch negativ definit ist (da sie eine Diagonalmatrix ist, die sowohl positive als auch negative Einträge hat). Also ist

$(0,0,0)$ ein Sattelpunkt von f unter der Nebenbedingung $g = 0$.

Für $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{1}{2}\right)$ ist $\rho_1 = \frac{3}{2}$ und damit $F = f - \frac{3}{2}g$. Also ist der Gradient von F

$$\nabla_F(x,y,z) = \nabla_f(x,y,z) - \frac{3}{2}\nabla_g(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2xy^2 + x + 2xz \\ 2x^2y - 3y \\ x^2 - \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

und die Hessematrix

$$\mathrm{H}_F(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2y^2 + 2z + 1 & 4xy & 2x \\ 4xy & 2x^2 - 3 & 0 \\ 2x & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

also

$$\mathrm{H}_F\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & -2 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Es ist $\mathrm{N}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{1}{2}\right)^t = \nabla_g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{1}{2}\right)^t = (\sqrt{2}, 0, 1)$.

Eine Basis von $\{u \in \mathbf{R}^3 : (\sqrt{2}, 0, 1)u = 0\}$ ist gegeben durch $\left(\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ -\sqrt{2} \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)\right)$.

Also ist

$$\begin{aligned} U^t \mathrm{H}_F\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{1}{2}\right) U &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & -2 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

eine Diagonalmatrix, die nur negative Einträge hat und damit negativ definit ist. Damit ist $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{1}{2}\right)$ eine lokale Maximalstelle von f unter der Nebenbedingung $g = 0$.

Für $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{1}{2}\right)$ ist $\rho_1 = \frac{3}{2}$ und damit $F = f - \frac{3}{2}g$. Also ist analog zu oben

$$\mathrm{H}_F(0,0,0) = \begin{pmatrix} 2y^2 + 2z + 1 & 4xy & 2x \\ 4xy & 2x^2 - 3 & 0 \\ 2x & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{H}_F\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\sqrt{2} \\ 0 & -2 & 0 \\ -\sqrt{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Es ist $\mathrm{N}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{1}{2}\right)^t = \nabla_g\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{1}{2}\right)^t = (-\sqrt{2}, 0, 1)$.

Eine Basis von $\{u \in \mathbf{R}^3 : (-\sqrt{2}, 0, 1)u = 0\}$ ist gegeben durch $\left(\left(\begin{smallmatrix}1\\0\\\sqrt{2}\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}0\\1\\0\end{smallmatrix}\right)\right)$.

Also ist

$$\begin{aligned}
U^t \mathrm{H}_F\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{1}{2}\right) U &= \begin{pmatrix}1 & 0 & \sqrt{2}\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0 & 0 & -\sqrt{2}\\ 0 & -2 & 0\\ -\sqrt{2} & 0 & 0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ \sqrt{2} & 0\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}-2 & 0 & -\sqrt{2}\\ 0 & -2 & 0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ \sqrt{2} & 0\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}-4 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

eine Diagonalmatrix, die nur negative Einträge hat und damit negativ definit ist. Also ist $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{1}{2}\right)$ eine lokale Maximalstelle von f unter der Nebenbedingung $g = 0$.

Hausaufgabe 30 Sei

$$f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R},\ (x, y, z) \mapsto 2x^2y^2 + zy^2 - 22y^2 - 7x^2,$$

$$g_1 : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R},\ (x, y, z) \mapsto x^2 - 4 + z, \quad g_2 : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R},\ (x, y, z) \mapsto 2x - y^2 + 4\ .$$

(1) Berechnen Sie $\nabla_f(x, y, z)$, $\nabla_{g_1}(x, y, z)$ und $\nabla_{g_2}(x, y, z)$ für $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$.

(2) Welche der folgenden Punkte sind Flachstellen von f unter der Nebenbedingung $g := (g_1, g_2) = 0$?

Unter der Nebenbedingung $g = 0$, welche sind lokale Minimalstellen und welche sind lokale Maximalstellen?

$$(-2, \sqrt{7}, 0), \quad (3, \sqrt{10}, -5)$$

Lösung.

(1) Es ist

$$\nabla_f(x, y, z) = \begin{pmatrix}f_x(x, y, z)\\ f_y(x, y, z)\\ f_z(x, y, z)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4xy^2 - 14x\\ 4x^2y + 2yz - 44y\\ y^2\end{pmatrix}$$

$$\nabla_{g_1}(x, y, z) = \begin{pmatrix}g_{1x}(x, y, z)\\ g_{1y}(x, y, z)\\ g_{1z}(x, y, z)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2x\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$$

$$\nabla_{g_2}(x, y, z) = \begin{pmatrix}g_{2x}(x, y, z)\\ g_{2y}(x, y, z)\\ g_{2z}(x, y, z)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\ -2y\\ 0\end{pmatrix}.$$

(2) Um für eine gegebene Stelle (x, y, z) zu bestimmen, ob sie eine Flachstelle von f unter der Nebenbedingung $g = (g_1, g_2) = 0$ ist, müssen wir herausfinden, ob $g(x, y, z) = 0$ gilt und es ein eindeutig bestimmtes $r = \begin{pmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \end{pmatrix}$ mit $\nabla_f(x, y, z) = N(x, y, z) \cdot r = \nabla_{g_1}\rho_1 + \nabla_{g_2}\rho_2$ gibt.

Falls $g_1(x, y, z) = g_2(x, y, z) = 0$ gilt, lösen wir also das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 4xy^2 - 14x &= 2\rho_1 x + 2\rho_2 \\ 4x^2y + 2yz - 44y &= -2\rho_2 y \\ y^2 &= \rho_1. \end{aligned}$$

Da $g_2(-2, \sqrt{7}, 0) = -7 \neq 0$ gilt, ist $(-2, \sqrt{7}, 0)$ keine Flachstelle von f unter der Nebenbedingung $g = 0$. Damit kann $(-2, \sqrt{7}, 0)$ auch keine lokale Minimalstelle oder lokale Maximalstellen sein.

Für $(x, y, z) = (3, \sqrt{10}, -5)$ ist sowohl $g_1(x, y, z) = 0$ als auch $g_2(x, y, z) = 0$ und obiges Gleichungssystem ergibt

$$\begin{aligned} 78 &= 6\rho_1 + 2\rho_2 \\ -18 \cdot \sqrt{10} &= -2\rho_2\sqrt{10} \\ 10 &= \rho_1 \end{aligned}$$

mit der eindeutigen Lösung $\rho_1 = 10$ und $\rho_2 = 9$. Also ist $(3, \sqrt{10}, -5)$ eine Flachstelle von f unter der Nebenbedingung $g = 0$.

Wir müssen noch überprüfen, ob $(3, \sqrt{10}, -5)$ eine lokale Minimalstelle oder lokale Maximalstelle ist. Dafür überprüfen wir $U^t \mathrm{H}_F(3, \sqrt{10}, -5)U$ auf Definitheit, wobei

$F(x, y, z) = f(x, y, z) - \rho_1 g_1(x, y, z) - \rho_2 g_2(x, y, z) = 2x^2y^2 + zy^2 - 13y^2 - 17x^2 + 4 - 10z - 18x$.

ist und die Spalten von U eine Basis von $\{u \in \mathbf{R}^3 : N(3, \sqrt{10}, -5)^t u = 0\}$ bilden.

Es ist

$$\nabla_F(x, y, z) = \begin{pmatrix} 4xy^2 - 34x - 18 \\ 4x^2y + 2yz - 26y \\ y^2 - 10 \end{pmatrix}$$

und

$$\mathrm{H}_F(x, y, z) = \begin{pmatrix} 4y^2 - 34 & 8xy & 0 \\ 8xy & 4x^2 + 2z - 26 & 2y \\ 0 & 2y & 0 \end{pmatrix},$$

also

$$\mathrm{H}_F(3, \sqrt{10}, -5) = \begin{pmatrix} 6 & 24 \cdot \sqrt{10} & 0 \\ 24 \cdot \sqrt{10} & 0 & 2 \cdot \sqrt{10} \\ 0 & 2 \cdot \sqrt{10} & 0 \end{pmatrix}.$$

Es ist

$$\mathrm{N}(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2x & 2 \\ 0 & -2y \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

also

$$\mathrm{N}(3,\sqrt{10},-5) = \begin{pmatrix} 60 & 18 \\ 0 & -18\cdot\sqrt{10} \\ 10 & 0 \end{pmatrix}$$

Damit ist $\left(\begin{pmatrix} -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{60}\sqrt{10} \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ eine Basis von $\{u \in \mathbf{R}^3 : N(3,\sqrt{10},-5)^t u = 0\}$. Also ist auch jedes Vielfache davon eine Basis von $\{u \in \mathbf{R}^3 : N(3,\sqrt{10},-5)^t u = 0\}$, insbesondere $\left(\begin{pmatrix} 10 \\ \sqrt{10} \\ -60 \end{pmatrix}\right)$ und wir können $U := \begin{pmatrix} 10 \\ \sqrt{10} \\ -60 \end{pmatrix}$ setzen. Dann ist

$$\begin{aligned} U^t \mathrm{H}_F(3,\sqrt{10},-5)U &= \begin{pmatrix} 10 & \sqrt{10} & -60 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 24\cdot\sqrt{10} & 0 \\ 24\cdot\sqrt{10} & 0 & 2\cdot\sqrt{10} \\ 0 & 2\cdot\sqrt{10} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ \sqrt{10} \\ -60 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 300 & 120\cdot\sqrt{10} & 20 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ \sqrt{10} \\ -60 \end{pmatrix} \\ &= (3000). \end{aligned}$$

Da (3000) eine positiv definite Matrix ist, ist $(3,\sqrt{10},-5)$ eine lokale Minimalstelle von f unter der Nebenbedingung $g = 0$.

Hausaufgabe 31 Sei

$$f : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R},\ (x,y,z,w) \mapsto x^2y + zwy,$$
$$g_1 : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R},\ (x,y,z,w) \mapsto x^2 + xy, \quad g_2 : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R},\ (x,y,z,w) \mapsto zw + zy + wy - 12\ .$$

(1) Berechnen Sie $\nabla_f(x,y,z,w)$, $\nabla_{g_1}(x,y,z,w)$ und $\nabla_{g_2}(x,y,z,w)$ für $(x,y,z,w) \in \mathbf{R}^4$.

(2) Welche der folgenden Punkte sind Flachstellen von f unter der Nebenbedingung $g := (g_1, g_2) = 0$?

Unter der Nebenbedingung $g = 0$, welche sind lokale Minimalstellen und welche sind lokale Maximalstellen?

$$(0,2,2,2), \quad (0,-2,-2,-2), \quad (1,-1,-1,-\frac{11}{2})$$

Lösung.

(1) Es ist

$$\nabla_f(x,y,z,w) = \begin{pmatrix} f_x(x,y,z,w) \\ f_y(x,y,z,w) \\ f_z(x,y,z) \\ f_w(x,y,z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2xy \\ wz + x^2 \\ wy \\ zy \end{pmatrix}$$

$$\nabla_{g_1}(x,y,z) = \begin{pmatrix} g_{1x}(x,y,z,w) \\ g_{1y}(x,y,z,w) \\ g_{1z}(x,y,z,w) \\ g_{1w}(x,y,z,w) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+y \\ x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\nabla_{g_2}(x,y,z,w) = \begin{pmatrix} g_{2x}(x,y,z,w) \\ g_{2y}(x,y,z,w) \\ g_{2z}(x,y,z,w) \\ g_{2w}(x,y,z,w) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ w+z \\ w+y \\ y+z \end{pmatrix}.$$

(2) Um für eine gegebene Stelle (x,y,z,w) zu bestimmen, ob sie eine Flachstelle ist unter der Nebenbedingung $g = (g_1, g_2) = 0$ ist, müssen wir herausfinden, ob $g(x,y,z,w) = 0$ gilt und es ein eindeutig bestimmtes $r = \begin{pmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \end{pmatrix}$ mit $\nabla_f(x,y,z,w) = N(x,y,z,w) \cdot r = \nabla_{g_1}\rho_1 + \nabla_{g_2}\rho_2$ gibt.

Falls $g_1(x,y,z,w) = g_2(x,y,z,w) = 0$ gilt, lösen wir also das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 2xy &= 2\rho_1 x + \rho_1 y \\ wz + x^2 &= \rho_1 x + \rho_2 w + \rho_2 z \\ wy &= \rho_2 w + \rho_2 y \\ zy &= \rho_2 y + \rho_2 z. \end{aligned}$$

Für $(0,2,2,2)$ gilt $g_1(0,2,2,2) = g_2(0,2,2,2) = 0$ und das Gleichungssystem wird zu

$$\begin{aligned} 0 &= 2\rho_1 \\ 4 &= 4\rho_2 \\ 4 &= 4\rho_2 \\ 4 &= 4\rho_2 \end{aligned}$$

mit der eindeutigen Lösung $\rho_1 = 0$ und $\rho_2 = 1$. Also ist $(0,2,2,2)$ eine Flachstelle von f unter der Nebenbedingung $g = 0$.

Es ist

$F(x,y,z,w) = f(x,y,z,w) - \rho_1 g_1(x,y,z,w) - \rho_2 g_2(x,y,z,w) = x^2y + zwy - zw - zy - wy + 12$

mit Gradientem

$$\nabla_F = \begin{pmatrix} 2xy \\ wz + x^2 - w - z \\ wy - w - y \\ zy - y - z \end{pmatrix}$$

und Hessematrix

$$\mathrm{H}_F(x,y,z,w) = \begin{pmatrix} 2y & 2x & 0 & 0 \\ 2x & 0 & w-1 & z-1 \\ 0 & w-1 & 0 & y-1 \\ 0 & z-1 & y-1 & 0 \end{pmatrix},$$

also

$$\mathrm{H}_F(0,2,2,2) = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Es ist $\mathrm{N}(x,y,z,w) = \begin{pmatrix} 2x+y & 0 \\ x & w+z \\ 0 & w+y \\ 0 & y+z \end{pmatrix}$ und $\mathrm{N}(0,2,2,2) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \\ 0 & 4 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$. Damit ist eine Basis des Vektorraums $\{u \in \mathbf{R}^4 : N(0,2,2,2)^t u = 0\}$ zum Beispiel $\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right)$.

Also setzen wir $U := \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \\ -1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \right)$ und berechnen

$$\begin{aligned} U^t \mathrm{H}_F(0,2,2,2) U &= \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \\ -1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \\ -1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -6 & -3 \\ -3 & -6 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Diese Matrix ist negativ definit, da

$$\mathrm{M}_1 \left(\begin{pmatrix} -6 & -3 \\ -3 & -6 \end{pmatrix} \right) = \det(-6) = -6$$

und

$$\mathrm{M}_2 \left(\begin{pmatrix} -6 & -3 \\ -3 & -6 \end{pmatrix} \right) = \det \begin{pmatrix} -6 & -3 \\ -3 & -6 \end{pmatrix} = 27$$

gilt. Also ist $(0,2,2,2)$ eine lokale Maximalstelle von f unter der Nebenbedingung $g = 0$.

Um analog zu überprüfen, ob $(0,-2,-2,-2)$ eine Flachstelle ist, stellen wir fest, dass $g_1(0,-2,-2,-2) = g_2(0,-2,-2,-2) = 0$ ist und lösen das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 0 &= -2\rho_1 \\ 4 &= -4\rho_2 \\ 4 &= -4\rho_2 \\ 4 &= -4\rho_2 \end{aligned}$$

mit der eindeutigen Lösung $\rho_1 = 0$ und $\rho_2 = -1$. Also ist $(0,-2,-2,-2)$ eine Flachstelle von f unter der Nebenbedingung $g = 0$.

Es ist

$$F(x,y,z,w) = f(x,y,z,w) - \rho_1 g_1(x,y,z,w) - \rho_2 g_2(x,y,z,w) = x^2y + zwy + zw + zy + wy - 12$$

mit Gradientem

$$\nabla_F = \begin{pmatrix} 2xy \\ wz + x^2 + w + z \\ wy + w + y \\ zy + y + z \end{pmatrix}$$

und Hessematrix

$$\mathrm{H}_F(x,y,z,w) = \begin{pmatrix} 2y & 2x & 0 & 0 \\ 2x & 0 & w+1 & z+1 \\ 0 & w+1 & 0 & y+1 \\ 0 & z+1 & y+1 & 0 \end{pmatrix},$$

also

$$\mathrm{H}_F(0,-2,-2,-2) = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Es ist $\mathrm{N}(x,y,z,w) = \begin{pmatrix} 2x+y & 0 \\ x & w+z \\ 0 & w+y \\ 0 & y+z \end{pmatrix}$, also $\mathrm{N}(0,-2,-2,-2) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -4 \\ 0 & -4 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$ und damit ist $\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right)$ eine Basis von $\{u \in \mathbf{R}^4 : N(0,-2,-2,-2)^t u = 0\}$.

Mit $U = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \\ -1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ ist

$$\begin{aligned} U^t \mathrm{H}_F(0,-2,-2,-2)U &= \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \\ -1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \\ -1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Diese Matrix ist positiv definit, da

$$\mathrm{M}_1\left(\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}\right) = \det(6) = 6$$

und

$$\mathrm{M}_2\left(\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}\right) = \det\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} = 27$$

gilt. Also ist $(0,-2,-2,-2)$ eine lokale Minimalstelle von f unter der Nebenbedingung $g = 0$.

Es bleibt noch, die Stelle $(1,-1,-1,-\frac{11}{2})$ zu überprüfen: Hier wird das Gleichungssystem zu

$$\begin{aligned} -2 &= \rho_1 \\ \frac{13}{2} &= \rho_1 - \frac{13}{2}\rho_2 \\ \frac{11}{2} &= -\frac{13}{2}\rho_2 \\ 1 &= -2\rho_2 \end{aligned}$$

Aus der 3. Gleichung folgt $\rho_2 = -\frac{11}{13}$, aber aus der 4. Gleichung folgt $\rho_2 = -\frac{1}{2}$, ein Widerspruch. Damit ist die Stelle $(1,-1,-1,-\frac{11}{2})$ keine Flachstelle von f unter der Nebenbedingung $g = 0$.