Gottwald, Künzer, Ritter Wintersemester 2018/19

Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler

Lösung 7

Lösungen zu den Hausaufgaben

Hausaufgabe 25 Beschreibe

$$f : \mathbf{R}_{>0} \to \mathbf{R},\ x \to 200 \cdot 0{,}45^{x-1}$$

die Nachfrage nach einem Produkt in Abhängigkeit vom Stückgewinn x.

(1) Ist $f'(x) < 0$ für $x \in \mathbf{R}_{>0}$?

(2) Berechnen Sie die Elastizität von f und von f'.

(3) Gibt es ein $x \in \mathbf{R}_{>0}$ mit $\mathrm{E}_{f'}(x) \leqslant -2$ und zugleich $\mathrm{E}_f(x) \geqslant -1$?

(4) Bestimmen Sie, für welches $x \in \mathbf{R}_{>0}$ der Gesamtgewinn $G(x)$ maximal wird.

Lösung.

(1) Für $x \in \mathbf{R}_{>0}$ ist

$$f(x) = 200 \cdot 0{,}45^{x-1} = 200 \cdot \mathrm{e}^{\ln(0{,}45)\cdot(x-1)}$$

und damit

$$f' : \mathbf{R}_{>0} \to \mathbf{R},\ x \to 200 \cdot \ln(0{,}45) \cdot \mathrm{e}^{\ln(0{,}45)\cdot(x-1)} = 200 \cdot \ln(0{,}45) \cdot 0{,}45^{x-1} \approx -159{,}7 \cdot 0{,}45^{x-1}.$$

Da $0{,}45 > 0$ ist, ist auch $0{,}45^{x-1} > 0$ für alle $x \in \mathbf{R}_{>0}$ und damit

$$f'(x) \approx -159{,}7 \cdot 0{,}45^{x-1} < 0.$$

(2) Die Elastizität von f bei $x \in R_{>0}$ ist

$$\mathrm{E}_f(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} \cdot x = \frac{200 \cdot \ln(0{,}45) \cdot 0{,}45^{x-1}}{200 \cdot 0{,}45^{x-1}} \cdot x = \ln(0{,}45) \cdot x.$$

Die Funktion f'' berechnen wir völlig analog zu f':

$$f'' : \mathbf{R}_{>0} \to \mathbf{R}, x \to (f'(x))' = \big(200 \cdot \ln(0{,}45) \cdot 0{,}45^{x-1}\big)' = 200 \cdot \ln(0{,}45)^2 \cdot 0{,}45^{x-1}$$

Die Elastizität von f' bei $x \in R_{>0}$ ist damit

$$\mathrm{E}_{f'}(x) = \frac{f''(x)}{f'(x)} \cdot x = \frac{200 \cdot \ln(0{,}45)^2 \cdot 0{,}45^{x-1}}{200 \cdot \ln(0{,}45) \cdot 0{,}45^{x-1}} \cdot x = \ln(0{,}45) \cdot x.$$

(3) Da nach (2) die Gleichung $\mathrm{E}_{f'}(x) = \ln(0{,}45) \cdot x = \mathrm{E}_f(x)$ gilt, kann es kein $x \in \mathbf{R}_{>0}$ geben, für das $\mathrm{E}_{f'}(x) \leqslant -2$ und zugleich $\mathrm{E}_f(x) \geqslant -1$ ist.

(4) Um diese Aufgabe mit dem Lemma aus der Vorlesung zu lösen, müssen wir zunächst überprüfen, ob die Voraussetzungen erfüllt sind:

Da $0{,}45 > 0$ ist, ist auch $200 \cdot 0{,}45^{x-1} > 0$ für alle $x \in \mathbf{R}_{>0}$. Nach (1) gilt auch $f'(x) < 0$ für $x \in \mathbf{R}_{>0}$. Nach (3) ist außerdem $\mathrm{E}_{f'}(x) > -2$ oder $\mathrm{E}_f(x) < -1$ für alle $x \in \mathbf{R}_{>0}$.

Also nimmt der Gesamtgewinn $G(x)$ ein Maximum an der Stelle x_0 mit $E_f(x_0) = -1$ an. Aus

$$-1 = E_f(x_0) = \ln(0{,}45) \cdot x_0$$

ergibt sich

$$x_0 = -\frac{1}{\ln(0{,}45)} \approx 1{,}25.$$

Der erzielte Gesamtgewinn an der Stelle x_0 ist

$$G(x_0) = f(x_0) \cdot x_0 = -\frac{200 \cdot 0{,}45^{1/\ln(0{,}45)-1}}{\ln(0{,}45)} \approx 1512{,}98.$$

Hausaufgabe 26

(1) Berechnen Sie das Taylorpolynom $t(x)$ um $x_0 := \pi$ in 4-ter Ordnung von

$$f : \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ x \mapsto \sin\left(\frac{x}{2}\right).$$

(2) Finden Sie mittels Restgliedabschätzung ein $C \in \mathbf{R}_{>0}$ mit $|f(x) - t(x)| \leqslant C \cdot |x - \pi|^5$ für $x \in [0, 2\pi]$.

(3) Sei $g : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R},\ (x, y) \mapsto x^2 \mathrm{e}^y$.
Berechnen Sie die Näherung zweiter Ordnung von g um die Stelle $(1, 0) \in \mathbf{R}^2$.

Lösung.

(1) Zuerst müssen wir die 1. bis 4. Ableitung von f berechnen:

$$f' : \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ x \mapsto \frac{1}{2}\cos\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$f'' : \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ x \mapsto (f'(x))' = \left(\frac{1}{2}\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right)' = -\frac{1}{4}\sin\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$f^{(3)} : \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ x \mapsto (f''(x))' = \left(-\frac{1}{4}\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right)' = -\frac{1}{8}\cos\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$f^{(4)} : \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ x \mapsto \left(f^{(3)}(x)\right)' = \left(-\frac{1}{8}\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right)' = \frac{1}{16}\sin\left(\frac{x}{2}\right).$$

Insbesondere ist

$$f(\pi) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

$$f'(\pi) = \frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$
\begin{aligned}
f''(\pi) &= -\frac{1}{4}\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{4}\\
f^{(3)}(\pi) &= -\frac{1}{8}\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0\\
f^{(4)}(\pi) &= \frac{1}{16}\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{16}.
\end{aligned}
$$

Damit ist das Taylorpolynom in 4-ter Ordnung von f um $x_0 := \pi$:

$$
\begin{aligned}
t(x) &= f(\pi) + f'(\pi)(x-\pi) + \frac{1}{2!}f''(\pi)(x-\pi)^2 + \frac{1}{3!}f^{(3)}(\pi)(x-\pi)^3 + \frac{1}{4!}f^{(4)}(\pi)(x-\pi)^4\\
&= 1 - \frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{4}(x-\pi)^2 + \frac{1}{4!}\cdot\frac{1}{16}(x-\pi)^4\\
&= 1 - \frac{1}{8}(x-\pi)^2 + \frac{1}{384}(x-\pi)^4.
\end{aligned}
$$

(2) Das Restglied der Taylorentwicklung von f um $x_0 := \pi$ in 4-ter Ordnung hat die Form

$$
\frac{1}{4!}\int_\pi^x f^{(5)}(t)(x-t)^4\,\mathrm{d}t.
$$

Damit ist

$$
f(x) = t(x) + \frac{1}{4!}\int_\pi^x f^{(5)}(t)(x-t)^4\,\mathrm{d}t,
$$

also

$$
|f(x)-t(x)| = \left|\frac{1}{4!}\int_\pi^x f^{(5)}(t)(x-t)^4\,\mathrm{d}t\right|.
$$

Mit

$$
f^{(5)} : \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ x \mapsto \left(f^{(4)}(x)\right)' = \left(\frac{1}{16}\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right)) = \frac{1}{32}\cos\left(\frac{x}{2}\right)
$$

ergibt sich

$$
\begin{aligned}
|f(x)-t(x)| = \left|\frac{1}{4!}\int_\pi^x \frac{1}{32}\cos\left(\frac{t}{2}\right)(x-t)^4\,\mathrm{d}t\right| &= \frac{1}{768}\left|\int_\pi^x \cos\left(\frac{t}{2}\right)(x-t)^4\,\mathrm{d}t\right|\\
&\leqslant \frac{1}{768}|x-\pi|\max_{t\in[\pi,x]}\left|\cos\left(\frac{t}{2}\right)(x-t)^4\right|,
\end{aligned}
$$

wobei die letzte Ungleichung aus den Eigenschaften des Integrals in §6.2 folgt.
Da $\left|\cos\left(\frac{t}{2}\right)\right| \leqslant 1$ für alle $t \in \mathbf{R}$ gilt, bekommen wir

$$
\begin{aligned}
|f(x)-t(x)| &= \frac{1}{768}|x-\pi|\max_{t\in[\pi,x]}\left(\left|\cos\left(\frac{t}{2}\right)\right|\left|(x-t)^4\right|\right)\\
&\leqslant \frac{1}{768}|x-\pi|\max_{t\in[\pi,x]}\left(1\cdot\left|(x-t)^4\right|\right)\\
&= \frac{1}{768}|x-\pi|\max_{t\in[\pi,x]}\left|(x-t)^4\right|
\end{aligned}
$$

Da $|x-t|$ mit $t \in [\pi, x]$ für $t = \pi$ maximal wird, ist $\max_{t\in[\pi,x]} |(x-t)^4| = |(x-\pi)^4|$ und

$$|f(x) - t(x)| = \frac{1}{768}|x-\pi| \left|(x-\pi)^4\right| = \frac{1}{768}|x-\pi|^5.$$

Damit ist für $C = \dfrac{1}{768}$ die Ungleichung $|f(x) - t(x)| \leqslant C \cdot |x-\pi|^5$ erfüllt.

(3) Zuerst müssen wir für $g : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R},\ (x,y) \mapsto x^2 \mathrm{e}^y$ den Gradienten $\nabla_g(x,y)$ und die Hessematrix $\mathrm{H}_g(x,y)$ berechnen:

$$\nabla_g(x,y) = \begin{pmatrix} g_x(x,y) \\ g_y(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x\mathrm{e}^y \\ x^2\mathrm{e}^y \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{H}_g(x,y) = \begin{pmatrix} g_{xx}(x,y) & g_{xy}(x,y) \\ g_{yx}(x,y) & g_{yy}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\mathrm{e}^y & 2x\mathrm{e}^y \\ 2x\mathrm{e}^y & x^2\mathrm{e}^y \end{pmatrix}.$$

Damit ist die Näherung zweiter Ordnung von g um die Stelle $(1,0)$

$$\begin{aligned}
&g(1,0) + ((x,y)-(1,0)) \cdot \nabla_g(1,0) + \frac{1}{2}((x,y)-(1,0)) \cdot \mathrm{H}_g(1,0) \cdot ((x,y)-(1,0))^t \\
=&1 + (x-1,y)\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}(x-1,y)\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-1 \\ y \end{pmatrix} \\
=&1 + 2(x-1) + y + \begin{pmatrix} x-1+y & x-1+\frac{y}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-1 \\ y \end{pmatrix} \\
=&1 + 2(x-1) + y + (x-1)^2 + 2(x-1)y + \frac{1}{2}y^2
\end{aligned}$$

Hausaufgabe 27

(1) Berechnen Sie $\det\begin{pmatrix} 1&2&1&3&2 \\ 0&2&1&0&1 \\ 2&0&2&1&1 \\ 0&1&3&0&0 \\ 0&2&3&1&1 \end{pmatrix}$.

(2) Sei $A := \begin{pmatrix} -1&0&1&1 \\ 0&-3&-1&0 \\ 1&-1&-2&0 \\ 1&0&0&-3 \end{pmatrix}$. Ist A negativ definit?

Lösung.

(1) Da Addition eines Vielfachen einer Zeile zu einer anderen Zeile den Wert der Determinante nicht ändern, ist

$$\det A = \det\begin{pmatrix} 1&2&1&3&2 \\ 0&2&1&0&1 \\ 2&0&2&1&1 \\ 0&1&3&0&0 \\ 0&2&3&1&1 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1&2&1&3&2 \\ 0&2&1&0&1 \\ 0&-4&0&-5&-3 \\ 0&1&3&0&0 \\ 0&2&3&1&1 \end{pmatrix}.$$

Mit einer Laplace-Entwicklung nach der 1. Spalte bekommen wir

$$\det A = 1 \cdot \det\begin{pmatrix} 2&1&0&1 \\ -4&0&-5&-3 \\ 1&3&0&0 \\ 2&3&1&1 \end{pmatrix}.$$

Addition des 5-fachen der 4. Zeile zur 2. Zeile ergibt

$$\det A = \det\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 6 & 15 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Durch eine Laplace-Entwicklung nach der 3. Spalte sehen wir, dass

$$\det A = (-1) \cdot \det\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 6 & 15 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

gilt.

Mit der Regel von Sarrus ist

$$\det A = -(2 \cdot 15 \cdot 0 + 1 \cdot 2 \cdot 1 + 1 \cdot 6 \cdot 3 - 1 \cdot 15 \cdot 1 - 1 \cdot 6 \cdot 0 - 2 \cdot 2 \cdot 3) = 7.$$

(2) Um zu überprüfen, ob A negativ definit ist, müssen wir alle Hauptminoren von $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ ausrechnen:

$$\begin{aligned} \mathrm{M}_1(A) &= \det(-1) = -1 \\ \mathrm{M}_2(A) &= \det\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} = (-1) \cdot (-3) = 3. \end{aligned}$$

Mit der Regel von Sarrus ist

$$\begin{aligned} & \mathrm{M}_3(A) \\ = \ & \det\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \\ = \ & (-1) \cdot (-3) \cdot (-2) + 0 \cdot (-1) \cdot 1 + 1 \cdot 0 \cdot (-1) - 1 \cdot (-3) \cdot 1 - 0 \cdot 0 \cdot (-2) - (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \\ = \ & -2 \end{aligned}$$

Und schließlich gilt

$$\mathrm{M}_4(A) = \det A = \det\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix},$$

wobei wir in der letzten Gleichung das 3-fache der 1. Zeile zur 4. Zeile addiert haben. Mit einer Laplace-Entwicklung nach der 4. Spalte und der Regel von Sarrus gilt nun

$$\begin{aligned} & \mathrm{M}_4(A) \\ = \ & (-1) \cdot \begin{pmatrix} 0 & -3 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \\ = \ & -(0 \cdot (-1) \cdot 3 + (-3) \cdot (-2) \cdot (-2) + (-1) \cdot 1 \cdot 0 - (-1) \cdot (-1) \cdot (-2) - (-3) \cdot 1 \cdot 3 - 0 \cdot (-2) \cdot 0 \\ = \ & 1. \end{aligned}$$

Hausaufgabe 28 Sei

$$f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}, \ (x, y, z) \to x^2 + y^2 + z^2 - xz^2 - 2y.$$

(1) Berechnen Sie $\nabla_f(x, y, z)$ und $\mathrm{H}_f(x, y, z)$ für $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$.

(2) Berechnen Sie alle Flachstellen von f.

(3) Welche lokalen Minimalstellen, welche lokalen Maximalstellen und welche Sattelpunkte hat f?

Lösung.

(1) Es ist

$$\nabla_f(x, y, z) = \begin{pmatrix} f_x(x, y, z) \\ f_y(x, y, z) \\ f_z(x, y, z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - z^2 \\ 2y - 2 \\ 2z - 2xz \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{H}_f(x, y) = \begin{pmatrix} f_{xx}(x, y, z) & f_{xy}(x, y, z) & f_{xz}(x, y, z) \\ f_{yx}(x, y, z) & f_{yy}(x, y, z) & f_{yz}(x, y, z) \\ f_{zx}(x, y, z) & f_{zy}(x, y, z) & f_{zz}(x, y, z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2z \\ 0 & 2 & 0 \\ 2z & 0 & 2 - 2x \end{pmatrix}.$$

(2) Eine Stelle $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$ ist eine Flachstelle von f, falls $\nabla_f(x, y, z) = 0$ gilt. Wir müssen also das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 2x - z^2 \\ 2y - 2 \\ 2z - 2xz \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

lösen: Aus der 2. Zeile folgt $y = 1$. Die 1. Zeile ist äquivalent zu $x = \frac{z^2}{2}$. Einsetzen in die 3. Zeile ergibt $2z - z^3 = 0$, also $z = 0$ oder $2 - z^2 = 0$. Letztere Gleichung hat die Lösungen $z = \sqrt{2}$ und $z = -\sqrt{2}$.

Zusammengefasst sind die folgenden drei Stellen Lösungen des Gleichungssystems und damit Flachstellen von f:

$$(0, 1, 0), \quad (1, 1, \sqrt{2}), \quad (1, 1, -\sqrt{2}).$$

(3) Um zu überprüfen, welche der Flachstellen von f lokale Minimalstellen oder Maximalstellen sind, müssen wir für jede Flachstelle (x, y, z) die positive Definitheit von $\mathrm{H}(x, y, z)$ überprüfen.

Es ist $\mathrm{H}(0, 1, 0) = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{smallmatrix}\right)$. Also sind die Hauptminoren

$$\begin{aligned} M_1(\mathrm{H}(0, 1, 0)) &= \det(2) = 2 \\ M_2(\mathrm{H}(0, 1, 0)) &= \det\left(\begin{smallmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{smallmatrix}\right) = 4 \\ M_3(\mathrm{H}(0, 1, 0)) &= \det\left(\begin{smallmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{smallmatrix}\right) = 8 \end{aligned}$$

und $\mathrm{H}(0, 1, 0)$ ist positiv definit. Damit ist $(0, 1, 0)$ ist ein lokales Minimum von f.

Es ist $\mathrm{H}(1,1,\sqrt{2}) = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 0 & -2\sqrt{2} \\ 0 & 2 & 0 \\ -2\sqrt{2} & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Da einer der Einträge auf der Diagonalen dieser Matrix 0 ist, kann sie nicht definit sein.

Da $\det \mathrm{H}(1,1,\sqrt{2}) = 16 \neq 0$ ist, ist $(1,1,\sqrt{2})$ ein Sattelpunkt.

Es ist $\mathrm{H}(1,1,-\sqrt{2}) = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 0 & 2\sqrt{2} \\ 0 & 2 & 0 \\ 2\sqrt{2} & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Da einer der Einträge auf der Diagonalen dieser Matrix 0 ist, kann sie nicht definit sein.

Da $\det \mathrm{H}(1,1,-\sqrt{2}) = 16 \neq 0$ ist, ist $(1,1,-\sqrt{2})$ ein Sattelpunkt.