Gottwald, Künzer, Ritter Wintersemester 2018/19

Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler

Lösung 6

Lösungen zu den Hausaufgaben

Hausaufgabe 21 Berechnen Sie die folgenden Integrale.
Skizzieren Sie die Flächen, deren Inhalte durch die Integrale berechnet werden.

(1) $\displaystyle\int_1^4 f(x)\,\mathrm{d}x$ mit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ x \mapsto \begin{cases} x & \text{für } x < \frac{1}{2}\pi \\ \cos(x^2)x & \text{für } \frac{1}{2}\pi \leqslant x < \pi \\ 2 & \text{für } \pi \leqslant x \end{cases}$

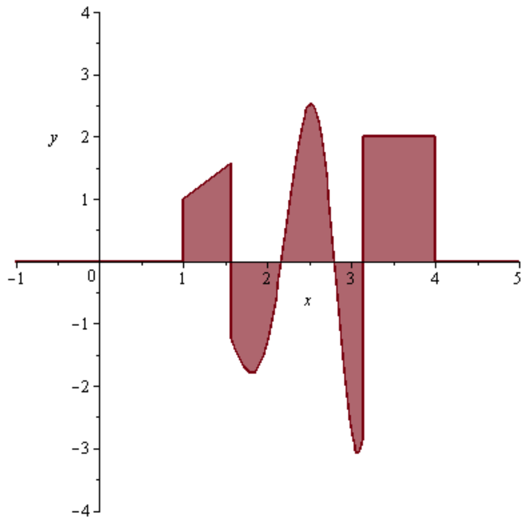
(2) $\displaystyle\int_2^4 (x-2)^{-1/3}\,\mathrm{d}x$

Lösung.

(1) Da die Funktion f stückweise definiert ist, muss man ihr Integral auch stückweise berechnen. Das Integral von $\cos(x^2)x$ berechnet man dabei mithilfe einer Substitution von $u := x^2$.

$$\begin{aligned}
\int_1^4 f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_1^{\frac{1}{2}\pi} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{\frac{1}{2}\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{\pi}^{4} f(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_1^{\frac{1}{2}\pi} x\,\mathrm{d}x + \int_{\frac{1}{2}\pi}^{\pi} \cos\left(x^2\right) x\,\mathrm{d}x + \int_{\pi}^{4} 2\,\mathrm{d}x \\
&= \left[\frac{1}{2}x^2\right]_{x=1}^{\frac{1}{2}\pi} + \int_{\left(\frac{1}{2}\pi\right)^2}^{(\pi)^2} \frac{1}{2}\cos\left(u\right)\,\mathrm{d}u + \left[2x\right]_{x=\pi}^{4} \\
&= \frac{1}{8}\pi^2 - \frac{1}{2} + \left[\frac{1}{2}\sin(x)\right]_{u=\left(\frac{1}{2}\pi\right)}^{(\pi)} + 8 - 2\pi \\
&= \frac{1}{8}\pi^2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sin(\pi^2) - \frac{1}{2}\sin\left(\frac{1}{4}\pi^2\right) + 8 - 2\pi \\
&= \frac{1}{8}\pi^2 + \frac{15}{2} - 2\pi + \frac{1}{2}\sin(\pi^2) - \frac{1}{2}\sin\left(\frac{1}{4}\pi^2\right) \\
&\approx 1{,}92323
\end{aligned}$$

Eine Skizze der Fläche, deren Inhalt durch das Integral berechnet wird, hat die folgende Form. Dabei ist der Flächeninhalt unterhalb der x-Achse negativ, der Flächeninhalt oberhalb der x-Achse positiv.



(2) Da $(2-2)^{-1/3} = 0^{-1/3} = \frac{1}{0}$ nicht definiert ist, ist $\displaystyle\int_2^4 (x-2)^{-1/3}\,\mathrm{d}x$ ein uneigentliches Integral und es gilt

$$\int_2^4 (x-2)^{-1/3}\,\mathrm{d}x = \lim_{a\to 2}\int_a^4 (x-2)^{-1/3}\,\mathrm{d}x.$$

Mit der Substitution $u := x-2$ bekommen wir

$$\int_2^4 (x-2)^{-1/3}\,\mathrm{d}x = \lim_{a\to 2}\int_{a-2}^{4-2} (u)^{-1/3}\,\mathrm{d}u = \lim_{a\to 2}\int_{a-2}^{2} (u)^{-1/3}\,\mathrm{d}u.$$

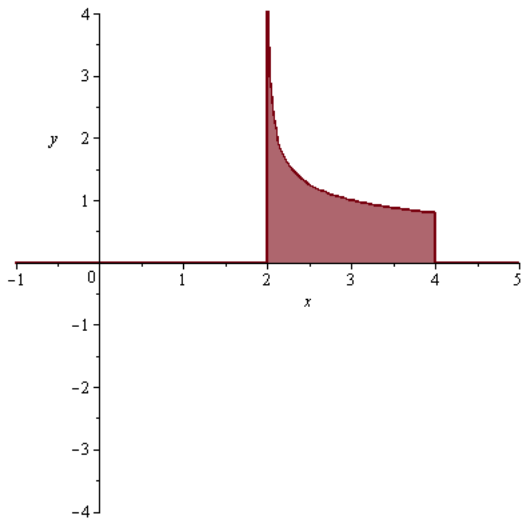
Wegen $\lim_{a\to 2}(a-2) = \lim_{a\to 0}(a)$ können wir dies als

$$\int_2^4 (x-2)^{-1/3}\,\mathrm{d}x = \lim_{a\to 0}\int_0^2 (u)^{-1/3}\,\mathrm{d}u$$

schreiben. Also ist

$$\begin{aligned}\int_2^4 (x-2)^{-1/3}\,\mathrm{d}x = \lim_{a\to 0}\left[\frac{3}{2}(u)^{1-1/3}\right]_{u=a}^{2} = \lim_{a\to 0}\left(\frac{3}{2}\cdot 2^{2/3} - \frac{3}{2}a^{2/3}\right) &= \frac{3}{2}\left(2^{2/3} - 0^{2/3}\right)\\ &= 3\cdot 2^{-1/3}\\ &\approx 2{,}38110\end{aligned}$$

Eine Skizze der Fläche, deren Inhalt durch das Integral berechnet wird, hat die folgende Form.



Hausaufgabe 22 Berechnen Sie die folgenden Integrale.

(1) $\displaystyle\int_3^4 \frac{3x^4}{(x+1)(x-2)(x+2)}\,\mathrm{d}x$

(2) $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\sin(\ln(x^2))}{x}\,\mathrm{d}x$

Lösung.

(1) Das Integral

$$\int_3^4 \frac{3x^4}{(x+1)(x-2)(x+2)}\,\mathrm{d}x$$

lässt sich mithilfe einer Partialbruchzerlegung berechnen. Da der Nenner einen kleineren Grad hat als der Zähler, müssen wir $(x+1)(x-2)(x+2)$ zunächst ausmultiplizieren, damit wir eine Polynomdivision durchführen können:

$$(x+1)(x-2)(x+2) = (x^2-x-2)(x+2) = x^3+x^2-4x-4$$

und

$$\begin{array}{rrrrr}
x^4 & & & & = \left(x^3+x^2-4x-4\right)(x-1)+5x^2-4 \\
-x^4 & -x^3 & +4x^2 & +4x & \\
\hline
 & -x^3 & +4x^2 & +4x & \\
 & x^3 & +x^2 & -4x & -4 \\
\hline
 & & 5x^2 & & -4
\end{array}.$$

Also ist

$$\int_3^4 \frac{3x^4}{(x+1)(x-2)(x+2)}\,\mathrm{d}x = 3\left(\int_3^4 x-1\,\mathrm{d}x + \int_3^4 \frac{5x^2-4}{(x+1)(x-2)(x+2)}\,\mathrm{d}x\right).$$

Es ist

$$\int_3^4 x-1\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}x^2 - x\right]_{x=3}^4 = \frac{1}{2}4^2 - 4 - \frac{1}{2}3^2 + 3 = \frac{5}{2}.$$

Für die weitere Rechnung benötigen wir die Partialbruchzerlegung von $\dfrac{5x^2-4}{(x+1)(x-2)(x+2)}$.

Also suchen wir $A, B, C \in \mathbf{R}$ mit

$$\frac{5x^2-4}{(x+1)(x-2)(x+2)} \stackrel{!}{=} \frac{A}{(x+1)} + \frac{B}{(x-2)} + \frac{C}{(x+2)}.$$

Wir multiplizieren die Gleichung mit $(x+1)(x-2)(x+2)$ und erhalten

$$\begin{aligned} 5x^2-4 &\stackrel{!}{=} A(x-2)(x+2) + B(x+1)(x+2) + C(x+1)(x-2) \\ &= A(x^2-4) + B(x^2+3x+2) + C(x^2-x-2). \end{aligned}$$

Also müssen wir das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} -4 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

lösen, um A, B und C zu finden:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} -4 & 2 & -2 & -4 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \\ -4 & 2 & -2 & -4 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 6 & 2 & 16 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 4/3 & 5 \\ 0 & 1 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 16 \end{array}\right)$$
$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & -1/3 \\ 0 & 1 & 0 & 4/3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

Also ist $A = -1/3$, $B = 4/3$ und $C = 4$ und damit

$$\frac{5x^2-4}{(x+1)(x-2)(x+2)} = -\frac{1}{3(x+1)} + \frac{4}{3(x-2)} + \frac{4}{(x+2)}.$$

Mit der obigen Rechnung ist

$$\begin{aligned} \int_3^4 \frac{3x^4}{(x+1)(x-2)(x+2)}\,\mathrm{d}x &= 3\left(\tfrac{5}{2} + \int_3^4 \frac{5x^2-4}{(x+1)(x-2)(x+2)}\right) \\ &= 3\left(\tfrac{5}{2} + \int_3^4 -\tfrac{1}{3(x+1)} + \tfrac{4}{3(x-2)} + \tfrac{4}{(x+2)}\,\mathrm{d}x\right) \\ &= 3\left(\tfrac{5}{2} + \left[-\tfrac{1}{3}\ln(x+1) + \tfrac{4}{3}\ln(x-2) + 4\ln(x+2)\right]_{x=3}^{4}\right) \\ &= 3\left(\tfrac{5}{2} - \tfrac{\ln(5)-\ln(4)}{3} + \tfrac{4(\ln(2)-\ln(1))}{3} + 4(\ln(6)-\ln(5))\right) \\ &= \tfrac{15}{2} - 13\ln(5) + 18\ln(2) + 12\ln(3) \\ &\approx 12{,}23730, \end{aligned}$$

wobei wir für die Vereinfachung in der vorletzten Zeile benutzt haben, dass $\ln(1) = 0$, $\ln(4) = 2\ln(2)$ und $\ln(6) = \ln(2) + \ln(3)$ ist.

(2) Es ist $\ln(x^2) = 2\ln(x)$ und damit $(\ln(x^2))' = \frac{2}{x}$. Also können wir die Aufgabe mit einer Substitution von $u := \ln(x^2)$ lösen:

$$\begin{aligned}\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\sin(\ln(x^2))}{x} = \int_{\ln(1^2)}^{\ln\left(e^2\right)} \frac{\sin(u)}{2}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\int_0^2 \sin(u)\,\mathrm{d}u &= \frac{1}{2}\left[-\cos(u)\right]_0^2 \\ &= \frac{1-\cos(2)}{2} \\ &\approx 0{,}70807.\end{aligned}$$

Hausaufgabe 23 Berechnen Sie die folgenden Integrale.

(1) $\displaystyle\int_1^3 \frac{\ln(x)}{x^3}\,\mathrm{d}x$

(2) $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \sin(2x)\cos(2x)\,\mathrm{d}x$

Lösung.

(1) Dieses Integral lässt sich mit der Produktregel berechnen: Die Funktion

$$f : \mathbf{R}_{>0} \to \mathbf{R},\ x \mapsto \frac{1}{x^3}$$

hat eine Stammfunktion

$$F : \mathbf{R}_{>0} \to \mathbf{R},\ x \mapsto -\frac{1}{2x^2}$$

und die Funktion

$$g : \mathbf{R}_{>0} \to \mathbf{R},\ x \mapsto \ln(x)$$

hat die Ableitung

$$g' : \mathbf{R}_{>0} \to \mathbf{R},\ x \mapsto \frac{1}{x}.$$

Damit ist

$$\begin{aligned}\int_1^3 \frac{\ln(x)}{x^3}\,\mathrm{d}x = \int_1^3 f(x)g(x)\,\mathrm{d}x &= \left[F(x)\cdot g(x)\right]_{x=1}^3 - \int_1^3 F(x)\cdot g'(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \left[-\frac{1}{2x^2}\cdot\ln(x)\right]_{x=1}^3 - \int_1^3 -\frac{1}{2x^2}\cdot\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \\ &= -\frac{\ln(3)}{2\cdot 3^2} + \frac{\ln(1)}{2\cdot 1^2} + \frac{1}{2}\int_1^3 \frac{1}{x^3}\,\mathrm{d}x \\ &= -\frac{\ln(3)}{18} - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2x^2}\right]_{x=1}^3 \\ &= -\frac{\ln(3)}{18} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\cdot 3^2} - \frac{1}{2\cdot 1^2}\right) \\ &= \frac{2}{9} - \frac{\ln(3)}{18} \\ &\approx 0{,}16119\end{aligned}$$

(2) Das Integral

$$\int_0^{\pi/4} \sin(2x)\cos(2x)\,\mathrm{d}x$$

lässt sich am leichtesten durch Substitution von $u := \sin(2x)$ berechnen. Denn es ist $(\sin(2x))' = 2\cos(2x)$. Damit ist

$$\int_0^{\pi/4} \sin(2x)\cos(2x)\,\mathrm{d}x = \int_{\sin(2\cdot 0)}^{\sin(2\cdot\pi/4)} \frac{u}{2}\,\mathrm{d}u = \int_0^1 \frac{u}{2}\,\mathrm{d}u = \left[\frac{u^2}{4}\right]_{x=0}^1 = \frac{1^2}{4} - \frac{0^2}{4} = \frac{1}{4}.$$

Hausaufgabe 24 Berechnen Sie die folgenden Integrale.

(1) $\displaystyle\int_1^2 \frac{8}{x^3(x+2)}\,\mathrm{d}x$

(2) $\displaystyle\int_0^2 x^2 \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$

Lösung.

(1) Das Integral

$$\int_1^2 \frac{8}{x^3(x+2)}\,\mathrm{d}x$$

lässt sich mithilfe einer Partialbruchzerlegung berechnen: wir suchen $A, B, C, D \in \mathbf{R}$ mit

$$\frac{8}{x^3(x+2)} \stackrel{!}{=} \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3} + \frac{D}{x+2}.$$

Multiplikation mit $x^3(x+2)$ liefert die Bedingung

$$8 \stackrel{!}{=} Ax^2(x+2) + Bx(x+2) + C(x+2) + Dx^3 = x^3A + 2x^2A + x^2B + 2xB + Cx + 2C + x^3D.$$

Wir müssen also das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

lösen:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 2 & 0 & 8 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 8 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccr|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 8 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccr|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 8 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccr|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -8 & 8 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|r} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right).$$

Damit ist $A = 1$, $B = -2$, $C = 4$ und $D = -1$. Also ist

$$\begin{aligned} \int_1^2 \frac{8}{x^3(x+2)} \,\mathrm{d}x &= \int_1^2 \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{4}{x^3} - \frac{1}{x+2} \,\mathrm{d}x \\ &= \left[\ln(x) + \frac{2}{x} - \frac{2}{x^2} - \ln(x+2) \right]_{x=1}^2 \\ &= \ln(2) + 1 - \frac{1}{2} - \ln(4) - \ln(1) - 2 + 2 + \ln(3) \\ &= \ln(3) - \ln(2) + \frac{1}{2} \\ &\approx 0{,}90547 \end{aligned}$$

(2) Um dieses Integral zu berechnen, muss man zweimal die Produktregel anwenden. Dabei benutzt man, dass die Stammfunktion von e^x wieder e^x ist und dass $(x^2)' = 2x$ und $(2x)' = 2$ gilt.

Also ist

$$\begin{aligned} \int_0^2 x^2 \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x = \left[x^2 \mathrm{e}^x \right]_{x=0}^2 - \int_0^2 2x\mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x &= 2^2 \cdot \mathrm{e}^2 - 0^2 \cdot \mathrm{e}^0 - \left([2x\mathrm{e}^x]_{x=0}^2 - \int_0^2 2\mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x \right) \\ &= 4\mathrm{e}^2 - 2 \cdot 2\mathrm{e}^2 + 2 \cdot 0\mathrm{e}^0 + [2\mathrm{e}^x]_{x=0}^2 \\ &= 2\mathrm{e}^2 - 2\mathrm{e}^0 \\ &= 2\mathrm{e}^2 - 2 \\ &\approx 12{,}77811. \end{aligned}$$