Gottwald, Künzer, Ritter Wintersemester 2018/19

Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler

Lösung 5

Lösungen zu den Hausaufgaben

Hausaufgabe 17 Sei $A := \begin{pmatrix} 3 & 3 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & -3 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ und $b := \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(1) Formen Sie $(A|b)$ um, bis A in Zeilenstufenform ist.

(2) Bestimmen Sie eine Basis von $\{x \in \mathbf{R}^6 : Ax = 0\}$.

(3) Bestimmen Sie $\{x \in \mathbf{R}^6 : Ax = b\}$.

Lösung.

(1) Da die Rechnung dadurch einfacher wird, vertauschen wir zunächst die erste und die dritte Zeile, um dann die erste Spalte zu säubern:

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 3 & 3 & -1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & -3 & 3 & 1 & 1 & 1 & -4 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccccc|c} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & -3 & 3 & 1 & 1 & 1 & -4 \\ 3 & 3 & -1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 3 & -3 & 3 & 1 & 1 & 1 & -4 \\ 3 & 3 & -1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$
$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & -9/2 & 3 & -1/2 & 1 & 1 & -11/2 \\ 0 & 3/2 & -1 & -1/2 & 1 & 1 & 1/2 \end{array}\right).$$

Danach vertauschen wir die zweite und dritte Zeile, bevor wir die zweite Spalte säubern (ebenfalls, da die Rechnung dadurch einfacher wird):

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & -9/2 & 3 & -1/2 & 1 & 1 & -11/2 \\ 0 & 3/2 & -1 & -1/2 & 1 & 1 & 1/2 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 3/2 & -1 & -1/2 & 1 & 1 & 1/2 \\ 0 & -9/2 & 3 & -1/2 & 1 & 1 & -11/2 \end{array}\right)$$
$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & -2/3 & -1/3 & 2/3 & 2/3 & 1/3 \\ 0 & -9/2 & 3 & -1/2 & 1 & 1 & -11/2 \end{array}\right)$$
$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 1/3 & 2/3 & -1/3 & -1/3 & 1/3 \\ 0 & 1 & -2/3 & -1/3 & 2/3 & 2/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 4/3 & 4/3 & -4 \end{array}\right).$$

Zuletzt säubern wir die vierte Spalte:

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 1/3 & 2/3 & -1/3 & -1/3 & 1/3 \\ 0 & 1 & -2/3 & -1/3 & 2/3 & 2/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 4 & 4 & -4 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 1/3 & 2/3 & -1/3 & -1/3 & 1/3 \\ 0 & 1 & -2/3 & -1/3 & 2/3 & 2/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -2 & 2 \end{array}\right)$$
$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 1/3 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2/3 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -2 & 2 \end{array}\right).$$

(2) Die nicht gesäuberten Spalten von A sind die 3., 5. und 6. Spalte. Also besteht eine Basis von $\{x \in \mathbf{R}^6 : Ax = 0\}$ aus drei Vektoren, bei denen an der 3., 5. und 6. Position jeweils einmal eine 1 und zweimal eine 0 steht, wobei die 1 in jedem Vektor an einer anderen Position steht.

Die restlichen Einträge der Vektoren füllen wir so auf, dass die Vektoren in der Menge $\{x \in \mathbf{R}^6 : Ax = 0\}$ liegen. Dazu tragen wir in dem Vektor, in dem an der i-ten Position eine 1 steht, das Negative der Einträge in der i-ten Spalte der Zeilenstufenform von A ein.

Damit hat die Basis die folgende Form:

$$\left(\begin{pmatrix}-1/3\\2/3\\\boxed{1}\\0\\\boxed{0}\\\boxed{0}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\\\boxed{0}\\2\\\boxed{1}\\\boxed{0}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\\\boxed{0}\\2\\\boxed{0}\\\boxed{1}\end{pmatrix}\right).$$

(3) An der Basis aus (2) und der Transformation von b in (1) kann man ablesen, dass

$$\{x\in\mathbf{R}^6 : Ax=b\}=\left\{\begin{pmatrix}-1\\1\\\boxed{0}\\2\\\boxed{0}\\\boxed{0}\end{pmatrix}+\lambda_1\begin{pmatrix}-1/3\\2/3\\\boxed{1}\\0\\\boxed{0}\\\boxed{0}\end{pmatrix}+\lambda_2\begin{pmatrix}-1\\0\\\boxed{0}\\2\\\boxed{1}\\\boxed{0}\end{pmatrix}+\lambda_2\begin{pmatrix}-1\\0\\\boxed{0}\\2\\\boxed{0}\\\boxed{1}\end{pmatrix} : \lambda_i\in\mathbf{R} \text{ für } 1\right\}$$

ist.

Hausaufgabe 18 Falls A invertierbar ist, berechnen Sie A^{-1}.

(1) $A := \begin{pmatrix}1&2&1\\2&-3&1\\2&1&1\end{pmatrix}$

(2) $A := \begin{pmatrix}1&0&2&3\\0&1&1&-1\\0&1&-1&-2\\1&2&1&0\end{pmatrix}$

Lösung.

(1) Um zu überprüfen, ob A^{-1} existiert und gegebenenfalls A^{-1} zu berechnen, muss man $(A|E_3)$ umformen, bis A in Zeilenstufenform ist:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&1&1&0&0\\2&-3&1&0&1&0\\2&1&1&0&0&1\end{array}\right)\rightsquigarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&1&1&0&0\\0&-7&-1&-2&1&0\\0&-3&-1&-2&0&1\end{array}\right)\rightsquigarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&1&1&0&0\\0&1&1/7&2/7&-1/7&0\\0&-3&-1&-2&0&1\end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&5/7&3/7&2/7&0\\0&1&1/7&2/7&-1/7&0\\0&0&-4/7&-8/7&-3/7&1\end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-1&-1/4&5/4\\0&1&0&0&-1/4&1/4\\0&0&1&2&3/4&-7/4\end{array}\right).$$

Damit ist $A^{-1}=\begin{pmatrix}-1&-1/4&5/4\\0&-1/4&1/4\\2&3/4&-7/4\end{pmatrix}$.

(2) In diesem Fall lässt sich $(A|E_4)$ folgendermaßen in Zeilenstufenform umformen:

$$\left(\begin{array}{rrrr|rrrr} 1 & 0 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{rrrr|rrrr} 1 & 0 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -3 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{rrrr|rrrr} 1 & 0 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -1 & -1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{rrrr|rrrr} 1 & 0 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 0 & 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -1 & -1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{rrrr|rrrr} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3/2 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 0 & 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & -1 & -1/2 & -3/2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{rrrr|rrrr} 1 & 0 & 0 & 0 & 5 & 1 & 7 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3 & -1 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & -3 & 2 \end{array}\right).$$

Damit ist $A^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 7 & -4 \\ -3 & -1 & -4 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$.

Hausaufgabe 19 Wir betrachten den Vektorraum $\mathbf{R}^{\mathbf{R}}$, die Funktionen $g_1 : \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ x \mapsto x^2$, $g_2 : \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ x \mapsto \sin(\pi x)$, $g_3 : \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ x \mapsto 1$ und $h : \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ x \mapsto \cos(\pi x)$, sowie den Unterraum $U := \langle g_1, g_2, g_3 \rangle$ von $\mathbf{R}^{\mathbf{R}}$.

(1) Ist (g_1, g_2, g_3) linear unabhängig?

Hinweis: $\lambda_1 g_1(x) + \lambda_2 g_2(x) + \lambda_3 g_3(x) = 0$ ansetzen und verschiedene Werte für x einsetzen.

(2) Ist (g_1, g_2, g_3) eine Basis von U?

(3) Ist $h \in U$? Ist (g_1, g_2, g_3) eine Basis von $\mathbf{R}^{\mathbf{R}}$?

Lösung

(1) Hierfür überprüfen wir, für welche $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbf{R}$ die Gleichung $\lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2 + \lambda_3 g_3 = 0$ gilt. Dies bedeutet, dass für alle $x \in \mathbf{R}$ die Gleichung $\lambda_1 g_1(x) + \lambda_2 g_2(x) + \lambda_3 g_3(x) = 0$ gilt. Nun ist

$$\lambda_1 g_1(x) + \lambda_2 g_2(x) + \lambda_3 g_3(x) = \lambda_1 x^2 + \lambda_2 \sin(\pi x) + \lambda_3,$$

also muss insbesondere für $x = 0$

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 \sin(\pi x) + \lambda_3 = \lambda_1 \cdot 0^2 + \lambda_2 \sin(\pi \cdot 0) + \lambda_3 = \lambda_3 = 0$$

gelten.

Damit ist aber für $x = 2$

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 \sin(\pi x) + \lambda_3 = \lambda_1 \cdot 2^2 + \lambda_2 \sin(\pi \cdot 2) + 0 = 4\lambda_1 = 0$$

und damit $\lambda_1 = 0$.

Z. B. mit $x = \frac{1}{2}$ folgt jetzt

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 \sin(\pi x) + \lambda_3 = 0 + \lambda_2 \sin(\pi \cdot \frac{1}{2}) + 0 = \lambda_2 = 0.$$

Also folgt aus $\lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2 + \lambda_3 g_3 = 0$, dass $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ gilt und (g_1, g_2, g_3) linear unabhängig ist.

(2) Nach der Definition von U wird U von (g_1, g_2, g_3) erzeugt. Da (g_1, g_2, g_3) nach (1) auch linear unabhängig ist, ist (g_1, g_2, g_3) eine Basis von U.

(3) Wenn $h \in U$ wäre, so müsste es $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbf{R}$ geben, sodass $\lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2 + \lambda_3 g_3 = h$ gilt.
Für $x = 0$ ist wie in (1)

$$\lambda_1 g_1(x) + \lambda_2 g_2(x) + \lambda_3 g_3(x) = \lambda_1 x^2 + \lambda_2 \sin(\pi x) + \lambda_3 = \lambda_1 \cdot 0^2 + \lambda_2 \sin(\pi \cdot 0) + \lambda_3 = \lambda_3$$

und damit muss

$$\lambda_3 = \lambda_1 g_1(0) + \lambda_2 g_2(0) + \lambda_3 g_3(0) = h(0) = \cos(0) = 1$$

gelten.
Für $x = 2$ bekommen wir

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 \sin(\pi x) + \lambda_3 = \lambda_1 \cdot 2^2 + \lambda_2 \sin(\pi \cdot 2) + 1 = 4\lambda_1 + 1$$

und damit

$$4\lambda_1 + 1 = h(2) = \cos(\pi \cdot 2) = 1,$$

also $\lambda_1 = 0$.
Mit $x = \frac{1}{2}$ bekommen wir

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 \sin(\pi x) + \lambda_3 = 0 + \lambda_2 \sin\left(\pi \cdot \frac{1}{2}\right) + 1 = \lambda_2 + 1$$

also

$$\lambda_2 + 1 = h\left(\frac{1}{2}\right) = \cos\left(\pi \cdot \frac{1}{2}\right) = 0$$

und damit $\lambda_2 = -1$.
Aber für $x = 1$ bekommen wir dann

$$2 = -\sin(\pi) + 1 = \lambda_1 g_1(1) + \lambda_2 g_2(1) + \lambda_3 g_3(1) = h(1) = \cos(\pi) = 0,$$

ein Widerspruch. Also gibt es keine $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbf{R}$, sodass $\lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2 + \lambda_3 g_3 = h$ gilt.
Damit ist $h \notin U$. Also erzeugt (g_1, g_2, g_3) den Vektorraum $\mathbf{R}^{\mathbf{R}}$ nicht und ist damit auch keine Basis von $\mathbf{R}^{\mathbf{R}}$.

Hausaufgabe 20 Für die Unterräume T und U von $\mathbf{R}^5$ mit

$$T := \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \text{ und } U := \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

(1) Dazu berechnen wir die Zeilenstufenform der Matrix, deren Spalten die Vektoren sind, die T erzeugen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 4 & -4 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Also sind alle vier Vektoren von einander linear unabhängig und

$$\left(\begin{pmatrix}1\\3\\1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\2\\-1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\4\\0\\1\\0\end{pmatrix}\right)$$

ist eine Basis von T.

(2) Dazu berechnen wir die Zeilenstufenform der Matrix, deren Spalten die Vektoren sind, die U erzeugen:

$$\begin{pmatrix}1&0&-1&1\\-2&2&4&0\\1&2&1&0\\0&1&1&0\\2&4&2&0\end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix}1&0&-1&1\\0&2&2&2\\0&2&2&0\\0&1&1&0\\0&4&4&-2\end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix}1&0&-1&1\\0&1&1&1\\0&2&2&0\\0&1&1&0\\0&4&4&-2\end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix}1&0&-1&1\\0&1&1&1\\0&0&0&-2\\0&0&0&-1\\0&0&0&-4\end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix}1&0&-1&0\\0&1&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

Wir haben die 1., 2. und 4. Spalte gesäubert. Also bilden der 1., 2. und 4. Vektor eine Basis von U:

$$\left(\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\2\\1\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}\right).$$

(3) Hier müssen wir die Zeilenstufenform einer Matrix berechnen, deren Spalten sich aus den Vektoren einer Basis von T und einer Basis von U zusammensetzen:

$$\begin{pmatrix}1&0&2&0&1&0&1\\3&1&1&4&-2&2&0\\1&0&2&0&1&2&0\\0&1&-1&1&0&1&0\\1&1&1&0&2&4&0\end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix}1&0&2&0&1&0&1\\0&1&-5&4&-5&2&-3\\0&0&0&0&0&2&-1\\0&1&-1&1&0&1&0\\0&1&-1&0&1&4&-1\end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix}1&0&2&0&1&0&1\\0&1&-5&4&-5&2&-3\\0&0&0&0&0&2&-1\\0&0&4&-3&5&-1&3\\0&0&4&-4&6&2&2\end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix}1&0&2&0&1&0&1\\0&1&-5&4&-5&2&-3\\0&0&4&-4&6&2&2\\0&0&4&-3&5&-1&3\\0&0&0&0&0&2&-1\end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix}1&0&2&0&1&0&1\\0&1&-5&4&-5&2&-3\\0&0&1&-1&3/2&1/2&1/2\\0&0&4&-3&5&-1&3\\0&0&0&0&0&2&-1\end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix}1&0&0&2&-2&-1&0\\0&1&0&-1&5/2&9/2&-1/2\\0&0&1&-1&3/2&1/2&1/2\\0&0&0&1&-1&-3&1\\0&0&0&0&0&2&-1\end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix}1&0&0&0&0&5&-2\\0&1&0&0&3/2&3/2&1/2\\0&0&1&0&1/2&-5/2&3/2\\0&0&0&1&-1&-3&1\\0&0&0&0&0&2&-1\end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix}1&0&0&0&0&5&-2\\0&1&0&0&3/2&3/2&1/2\\0&0&1&0&1/2&-5/2&3/2\\0&0&0&1&-1&-3&1\\0&0&0&0&0&1&-1/2\end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix}1&0&0&0&0&0&1/2\\0&1&0&0&3/2&0&5/4\\0&0&1&0&1/2&0&1/4\\0&0&0&1&-1&0&-1/2\\0&0&0&0&0&1&-1/2\end{pmatrix}$$

Damit ist

$$\left(\begin{pmatrix}1\\3\\1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\2\\-1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\4\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\2\\1\\4\end{pmatrix}\right)$$

eine Basis von $T+U$. Insbesondere ist $T+U \subset \mathbf{R}^5$ fünfdimensional und es gilt $T+U = \mathbf{R}^5$. (Also könnte man als Basis von $T+U$ auch z. B. die Einheitsbasis von $\mathbf{R}^5$ angeben.)

(4) Für

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 4 & -2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

ist mit der Rechnung in (2)

$$\left(\begin{pmatrix} 0 \\ -3/2 \\ -1/2 \\ 1 \\ \boxed{1} \\ 0 \\ \boxed{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1/2 \\ -5/4 \\ -1/4 \\ 1/2 \\ \boxed{0} \\ 1/2 \\ \boxed{1} \end{pmatrix} \right).$$

eine Basis von $\{x \in \mathbf{R}^7 : Ax = b\}$.

Also ist eine Basis von $T \cap U$ gegeben durch

$$\left(0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{3}{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, -\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{5}{4} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

$$= \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1/2 \\ -2 \end{pmatrix} \right).$$