Gottwald, Künzer, Ritter Wintersemester 2018/19

Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler

Lösung 4

Lösungen zu den Hausaufgaben

Hausaufgabe 13

(1) Berechnen Sie $\lim_{x\to 0} \dfrac{2^x - 1}{x}$.

(2) Sei $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \mapsto x + \mathrm{e}^x$. Bestimmen Sie $f(0)$, $f^{-1}(1)$ und $(f^{-1})'(1)$.

Lösung.

(1) Für $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ x \mapsto 2^x - 1$ und $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ x \mapsto x$ gilt $f(0) = g(0) = 0$. Also kann man $\lim_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ mit dem Satz von l'Hôpital berechnen.

Aufgrund von $2^x = \mathrm{e}^{x\ln(2)}$ ergibt sich $(2^x - 1)' = (e^{x\ln(2)} - 1)' = \ln(2) \cdot e^{x\ln(2)} = \ln(2) \cdot 2^x$ und es ist

$$\lim_{x\to 0} \frac{2^x - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{(2^x - 1)'}{x'} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(2) \cdot 2^x}{1} = \ln(2) \cdot 2^0 = \ln(2).$$

(2) Es ist $f(0) = e^0 = 1$. Also ist $f^{-1}(1) = 0$.

Außerdem ist $f' : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \mapsto 1 + \mathrm{e}^x$ und es ergibt sich mit der Ableitungsregel für die Umkehrfunktion

$$(f^{-1})'(1) = \frac{1}{f'(f^{-1}(1))} = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{2}.$$

Hausaufgabe 14 Betrachten Sie die Funktion $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R},\ (x, y) \mapsto x^2 y - xy + \dfrac{y^2}{4}$.

(1) Berechnen Sie die partiellen Ableitungen $f_x,\ f_y,\ f_{xx},\ f_{xy}$ und f_{yy} .

(2) Welche Flachstellen hat f ?

Welche davon sind lokale Maximalstellen? Welche davon sind lokale Minimalstellen?

Lösung.

(1) Es ist

$$\begin{aligned}
f_x &: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R},\ (x, y) \mapsto 2xy - y \\
f_y &: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R},\ (x, y) \mapsto x^2 - x + \frac{y}{2} \\
f_{xx} &: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R},\ (x, y) \mapsto 2y \\
f_{xy} &: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R},\ (x, y) \mapsto 2x - 1 \\
f_{yy} &: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R},\ (x, y) \mapsto \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

(2) Die Flachstellen von f sind die Punkte (x_0, y_0), an denen $f_x(x_0, y_0) = 0 = f_y(x_0, y_0)$ gilt.

Es ist $f_x(x_0, y_0) = 2x_0y_0 - y_0 = y_0(2x_0 - 1)$. Also gilt $f_x(x_0, y_0) = 0$ genau dann, wenn $x_0 = \frac{1}{2}$ oder $y_0 = 0$ gilt.

Mit $f_y\left(\frac{1}{2}, y_0\right) = -\dfrac{1}{4} + \dfrac{y_0}{2}$, ist $f_y\left(\frac{1}{2}, y_0\right) = 0$ äquivalent zu $y_0 = \frac{1}{2}$.

Da $f_y(x_0, 0) = x_0^2 - x_0 = x_0(x_0 - 1)$ ist, gilt $f_y(x_0, 0) = 0$ genau dann, wenn $x_0 = 0$ oder $x_0 = 1$ ist.

Damit sind die Flachstellen von f die Punkte $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $(0, 0)$ und $(1, 0)$.

Um zu überprüfen, ob die Flachstelle (x_0, y_0) eine Maximal- oder Minimalstelle ist, muss zunächst $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2$ berechnet werden.

Es ist

$$(f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2)\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} - \left(2 \cdot \frac{1}{2} - 1\right)^2 = \frac{1}{2} > 0$$

und

$$(f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2)(0, 0) = 2 \cdot 0 \cdot \frac{1}{2} - (2 \cdot 0 - 1)^2 = -1 < 0.$$

$$(f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2)(0, 1) = 2 \cdot 0 \cdot \frac{1}{2} - (2 \cdot 1 - 1)^2 = -1 < 0$$

Also sind $(0, 0)$ und $(0, 1)$ Sattelpunkte und damit weder lokale Minimal- noch lokale Maximalstellen.

Da $f_{xx}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = 1 > 0$ ist, ist $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ eine lokale Minimalstelle von f.

Hausaufgabe 15

(1) Es sei $K_0 = 1000$ Euro mit einem Monatszins von 0,2% angelegt mit vereinbarter Einzahlung einer vorschüssigen monatlichen Rate von 50 Euro. Wie hoch ist das entstandene Kapital nach einem halben Jahr?

(2) Es sei ein Kredit von $K_0 = 500$ Euro mit einem Monatszins von 0,5% aufgenommen mit vereinbarter Abzahlung einer nachschüssigen monatlichen Rate von R Euro. Wie hoch muss die Rate R sein, damit der Kredit nach einem Jahr getilgt ist?

Lösung.

(1) Eine Verzinsung von 0,2% ergibt einen Zinsfaktor von $q = 1 + \frac{0{,}2}{100} = 1{,}002$. Da ein halbes Jahr sechs Monate lang ist, muss K_6 berechnet werden. Mit einer vorschüssigen Rate von $R = 50$ ergibt sich

$$K_6 = q^6 \cdot K_0 + q \cdot \frac{q^6 - 1}{q - 1} \cdot R = 1{,}002^6 \cdot 1000 + 1{,}002 \cdot \frac{1{,}002^6 - 1}{1{,}002 - 1} \cdot 50 \approx 1314,17.$$

(2) Ein Zins von 0,5% ergibt einen Zinsfaktor von $q = 1{,}005$. Wenn der Kredit nach einem Jahr getilgt wurde, muss $K_{12} = 0$ gelten.

Also muss die Rate

$$R = \frac{q - 1}{q^{12} - 1}(0 - q^{12}K_0) = \frac{1{,}005 - 1}{1{,}005^{12} - 1}(-1{,}005^{12} \cdot 500) \approx -43,033$$

sein.

Pro Monat müssen also etwa 43,033 Euro abbezahlt werden; in ganzzahligen Euro - und Centbetrgen müssen mindestens 43 Euro und 4 Cent pro Monat abbezahlt werden, damit der Kredit nach einem Jahr vollständig getilgt ist.

Hausaufgabe 16

(1) Berechnen Sie $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 6 \\ 2 & 0 & 3 & 4 \\ 5 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \\ 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

(2) Berechnen Sie den Cosinus des Winkels zwischen $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Stehen die beiden Vektoren orthogonal aufeinander?

(3) Seien $a := \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $b := \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$ und $c_t := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ t \end{pmatrix}$, wobei $t \in \mathbf{R}$.

Berechnen Sie das Volumen des von a, b und c_t aufgespannten Parallelepipeds in Abhängigkeit von t.

Lösung.

(1) Es ist

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 6 \\ 2 & 0 & 3 & 4 \\ 5 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \\ 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 & 14 \\ 10 & 14 \\ 13 & 18 \\ 18 & 22 \end{pmatrix}$$

(2) Der von $a = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $b = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ eingeschlossene Winkel ist $\varphi := \arccos\left(\frac{a^t b}{||a|| \cdot ||b||}\right)$.

Damit ist

$$\cos\varphi = \frac{a^t b}{||a|| \cdot ||b||} = \frac{\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}}{||\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}|| \cdot ||\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}||} = \frac{12}{\sqrt{26}\sqrt{26}} = \frac{12}{26}$$

und die beiden Vektoren stehen nicht orthogonal aufeinander, da $a^t b = 12 \neq 0$ gilt.

(3) Das Volumen des von a, b und c_t aufgespannten Parallelepipeds ist

$$|a^{\mathrm{t}}(b \times c_t)| = \left|\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ t \end{pmatrix}\right)\right| = \left|\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5t-12 \\ 6-4t \\ 3 \end{pmatrix}\right| = |12 - 7t|.$$