Gottwald, Künzer, Ritter Wintersemester 2018/19

Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler

Lösung 3

Lösungen zu den Hausaufgaben

Hausaufgabe 9 Berechnen Sie jeweils die erste und die zweite Ableitung der folgenden Funktionen.

(1) $f_1 : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \mapsto x^2 \sin(x) + \mathrm{e}^{2x}$

(2) $f_2 : \mathbf{R} \setminus \{-2\} \to \mathbf{R}$, $x \mapsto \dfrac{4x+3}{x+2}$

Lösung.

(1) Mit der Produktregel, der Kettenregel und der Additionsregel ist

$$f_1' : \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ x \mapsto (x^2)' \sin(x) + x^2(\sin(x))' + (\mathrm{e}^{2x})' = 2x\sin(x) + x^2\cos(x) + 2\,\mathrm{e}^{2x}\,.$$

und

$$\begin{aligned} f_1'' : \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ x \mapsto\ & (2x\sin(x) + x^2\cos(x) + 2\,\mathrm{e}^{2x})' \\ &= 2((x)'\sin(x) + x(\sin(x))') + (x^2)'\cos(x) + x^2(\cos(x))' + 2(\mathrm{e}^{2x})' \\ &= 2(\sin(x) + x\cos(x)) + 2x\cos(x) - x^2\sin(x) + 2\cdot 2\,\mathrm{e}^{2x} \\ &= 2\sin(x) + 4x\cos(x) - x^2\sin(x) + 4\,\mathrm{e}^{2x}\,. \end{aligned}$$

(2) Mit der Quotientenregel ist

$$f_2' : \mathbf{R}\setminus\{-2\} \to \mathbf{R},\ x \mapsto \frac{(4x+3)'(x+2) - (4x+3)(x+2)'}{(x+2)^2} = \frac{4(x+2) - (4x+3)}{(x+2)^2} = \frac{5}{(x+2)^2}$$

und mit der Kettenregel ergibt sich

$$\begin{aligned} f_2' : \mathbf{R} \setminus \{-2\} \to \mathbf{R},\ x \mapsto \left(\frac{5}{(x+2)^2}\right)' &= -5\left(\frac{1}{(x+2)^2}\right)^2 ((x+2)^2)' \\ &= \frac{-5}{(x+2)^4} \cdot 2(x+2) \\ &= -\frac{10}{(x+2)^3}. \end{aligned}$$

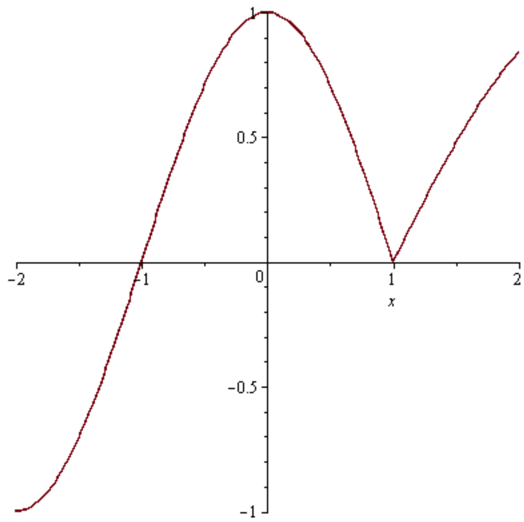
Hausaufgabe 10 Skizzieren Sie die Graphen der Funktionen.
Welche der Funktionen sind an der Stelle 1 differenzierbar? Entscheiden Sie dies anhand der skizzierten Graphen.

(1) $f_1 : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \mapsto \begin{cases} \cos(\frac{1}{2}\pi x), & \text{falls } x \leqslant 1 \\ \sin(x-1), & \text{falls } x > 1 \end{cases}$

(2) $f_2 : \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ x \mapsto \begin{cases} x^2 - 2x + 3, & \text{falls } x \leqslant 1 \\ -x^2 + 2x + 1, & \text{falls } x > 1 \end{cases}$

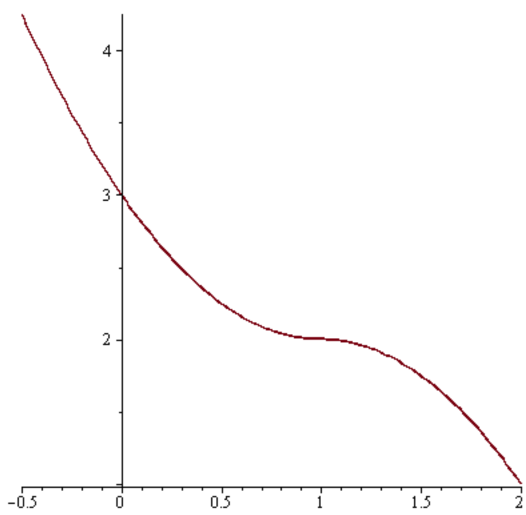
Lösung.

(1) Eine Skizze des Graphen von f_1 hat die folgende Form:



Offensichtlich existiert an der Stelle 1 keine eindeutige Tangente und f_1 ist somit an dieser Stelle nicht differenzierbar.

(2) Eine Skizze des Graphen von f_2 hat die folgende Form:



Da f_2 an der Stelle 1 eine eindeutige Tangente mit der Steigung 0 hat, ist die Funktion an dieser Stelle differenzierbar (und es gilt $f'(1) = 0$).

Hausaufgabe 11

Welche Nullstellen haben die folgenden Funktionen?

Welche lokalen Extremstellen haben die folgenden Funktionen?

Geben Sie jeweils ein Intervall $I \neq \emptyset$ an, für welches die Einschränkung der Funktion auf I streng monoton wachsend ist.

Skizzieren Sie die Graphen der Funktionen.

(1) $f_1 : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \mapsto -x^4 - \frac{4}{3}x^3 + 4x^2$

(2) $f_2 : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \mapsto x^4 - 4x$

Lösung.

(1) Es gilt für $x \in \mathbf{R}$

$$f_1(x) = -x^4 - \frac{4}{3}x^3 + 4x^2 = -x^2(x^2 + \frac{4}{3}x - 4) = -x^2\left(x + \frac{2+2\sqrt{10}}{3}\right)\left(x - \frac{2\sqrt{10}-2}{3}\right).$$

(Dies kann man z. B. mit der p-q-Formel ausrechnen.) Also hat f_1 die Nullstellen 0, $-\dfrac{2+2\sqrt{10}}{3}$ und $\dfrac{2\sqrt{10}-2}{3}$.

Auerdem ist

$$f_1' : \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ x \mapsto -4x^3 - 4x^2 + 8x = -4x(x^2 + x - 2) = -4x(x+2)(x-1)$$

und

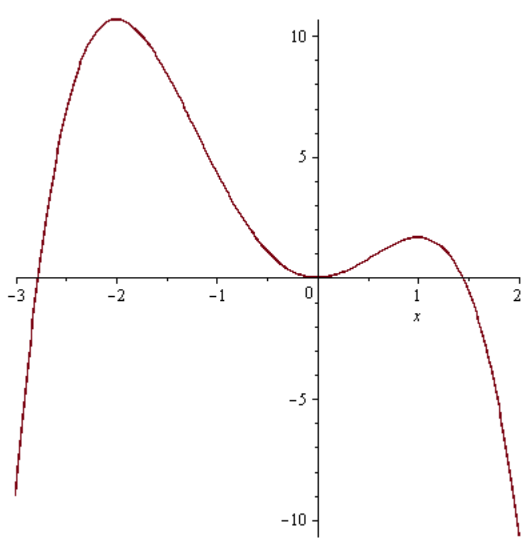
$$f_1'' : \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ x \mapsto -12x^2 - 8x + 8.$$

Da $f_1''(-2) = -24$, $f''(0) = 8$ und $f''(1) = -12$ gilt, hat f die lokalen Maximalstellen -2 und 1 und die lokale Minimalstelle 0.

Die Funktion f_1' ist auf den Intervallen I streng monoton wachsend, auf denen $f'(x) > 0$ für alle $x \in I$ gilt. Die maximalen Intervalle, für die dies der Fall ist, sind $(-\infty, -24)$ und $(0, 1)$.

(Denn für $x \in (-\infty, -24)$ gelten die Ungleichungen $x < 0$, $x + 2 < 0$ und $x - 1 < 0$, also auch $f_1'(x) = -4x(x+2)(x-1) < 0$, während für $x \in (0, 1)$ die Ungleichungen $x > 0$, $x + 2 > 0$ und $x - 1 < 0$ und damit wieder $f_1'(x) = -4x(x+2)(x-1) < 0$ gelten.)

Eine Skizze des Graphen von f_1 hat die folgende Form:



(2) Es gilt für $x \in \mathbf{R}$

$$f_2(x) = x^4 - 4x = x(x^3 - 4).$$

Also hat f_1 die Nullstellen 0 und $\sqrt[3]{4}$, da $\sqrt[3]{4}$ die einzige reelle Lösung der Gleichung $x^3 = 4$ ist.

Mit

$$f_2'(x) = 4x^3 - 4$$

und

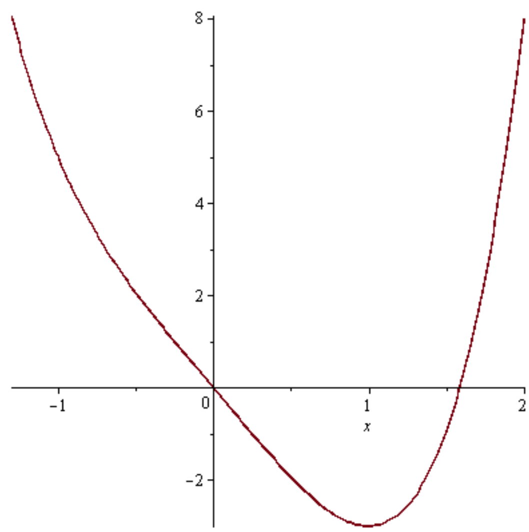
$$f_2''(x) = 12x^2$$

ist

$$f_2'(x) = 4x^3 - 4 = 0 \iff x^3 = 1 \iff x = 1$$

und $f_2''(1) = 12$. Also hat f_2 als einzige lokale Extremstelle ein lokales Minimum an der Stelle 1.

Eine Skizze des Graphen von f_2 hat die folgende Form:



Hausaufgabe 12 Berechnen Sie jeweils die erste Ableitung der folgenden Funktionen.

(1) $f_1 : \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ x \mapsto (\sin(x^2 + 3))^2$

(2) $f_2 : \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ x \mapsto 2\,\mathrm{e}^{x\cos(x)}$

(3) $f_3 : \mathbf{R} \setminus \{-3\} \to \mathbf{R},\ x \mapsto \dfrac{x^2 + 2x - 1}{x + 3}$

(4) $f_4 : (1, 3) \to \mathbf{R},\ x \mapsto \dfrac{1}{(x-1)^3} - x\,\mathrm{e}^x + 2$

Lösung.

(1) Es ist mit der Kettenregel

$$\begin{aligned} f_1' : \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ \ x \mapsto\ & 2(\sin(x^2 + 3))\sin(x^2 + 3)' \\ &= 2(\sin(x^2 + 3))\cos(x^2 + 3)(x^2 + 3)' \\ &= 2(\sin(x^2 + 3))\cos(x^2 + 3)2x \\ &= 4x(\sin(x^2 + 3))\cos(x^2 + 3). \end{aligned}$$

(2) Es ist mit der Kettenregel und der Produktregel

$$f_2' : \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ x \mapsto 2\left(\mathrm{e}^{x\cos(x)}\right)' = 2\,\mathrm{e}^{x\cos(x)}(x\cos(x))' = 2\,\mathrm{e}^{x\cos(x)}(\cos(x) - x\sin(x)).$$

(3) Es ist mit der Quotientenregel

$$\begin{aligned} f_3' : \mathbf{R}\setminus\{-3\} \to \mathbf{R},\ x \mapsto\ & \frac{(x^2+2x-1)'(x+3) - (x^2+2x-1)(x+3)'}{(x+3)^2} \\ =\ & \frac{(2x-2)(x+3) - (x^2+2x-1)}{(x+3)^2} \\ =\ & \frac{x^2+2x-5}{(x+3)^2}. \end{aligned}$$

(4) Mit der Kettenregel, der Produktregel und der Additionsregel gilt

$$\begin{aligned} f_4 : (1,3) \to \mathbf{R},\ x \mapsto\ & \left(\frac{1}{(x-1)^3}\right)' - (x\,\mathrm{e}^x)' \\ =\ & -\left(\frac{1}{(x-1)^3}\right)^2\left((x-1)^3\right)' - (x'\,\mathrm{e}^x + x(\mathrm{e}^x)') \\ =\ & -\frac{3(x-1)^2}{(x-1)^6} - (1+x)\,\mathrm{e}^x \\ =\ & -\frac{3}{(x-1)^4} - (1+x)\,\mathrm{e}^x \end{aligned}$$