Gottwald, Künzer, Ritter Wintersemester 2018/19

Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler

Lösung 10

Lösungen zu den Hausaufgaben

Hausaufgabe 36 Berechnen Sie die folgenden Integrale:

(1) $\displaystyle\int_0^2 \frac{9}{(x^2+2)(x+1)^2}\,\mathrm{d}x$

(2) $\displaystyle\int_0^2 \frac{-4x^2+x-4}{(x^2+2)(x+1)^2}\,\mathrm{d}x$

Lösung.

(1) Um das Integral $\displaystyle\int_0^2 \frac{9}{(x^2+2)(x+1)^2}\,\mathrm{d}x$ zu berechnen, benötigt man als erstes die komplexe Partialbruchzerlegung von $\displaystyle\frac{9}{(x^2+2)(x+1)^2}$.

Mit dem Ansatz

$$\frac{9}{(x^2+2)(x+1)^2} = \frac{A}{x+\mathrm{i}\sqrt{2}} + \frac{B}{x-\mathrm{i}\sqrt{2}} + \frac{C}{x+1} + \frac{D}{(x+1)^2}$$

erhält man

$$\begin{aligned}9 &= A(x^3+(2-\mathrm{i}\sqrt{2})x^2+(1-\mathrm{i}\sqrt{2})x-\mathrm{i}\sqrt{2}) + B(x^3+(2+\mathrm{i}\sqrt{2})x^2+(1+\mathrm{i}\sqrt{2})x+\mathrm{i}\sqrt{2})\\ &\quad + C(x^3+x^2+2x+2) + D(x^2+2).\end{aligned}$$

Wir müssen also die folgende Matrix auf Zeilenstufenform bringen, wobei wir zunächst die 1. Zeile von der 3. Zeile und das Doppelte der 1. Zeilen von der 2. Zeile abziehen, um die Rechnung zu vereinfachen:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -\mathrm{i}\sqrt{2} & \mathrm{i}\sqrt{2} & 2 & 2 & 9 \\ 1-2\mathrm{i}\sqrt{2} & 1+2\mathrm{i}\sqrt{2} & 2 & 0 & 0 \\ 2-\mathrm{i}\sqrt{2} & 2+\mathrm{i}\sqrt{2} & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} -\mathrm{i}\sqrt{2} & \mathrm{i}\sqrt{2} & 2 & 2 & 9 \\ 1 & 1 & -2 & -4 & -18 \\ 2 & 2 & -1 & -1 & -9 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & -4 & -18 \\ 2 & 2 & -1 & -1 & -9 \\ -\mathrm{i}\sqrt{2} & \mathrm{i}\sqrt{2} & 2 & 2 & 9 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -4 & -18 \\ 0 & 0 & -3 & -1 & -9 \\ 0 & 2\mathrm{i}\sqrt{2} & 2+\mathrm{i}\sqrt{2} & 2 & 9 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2\mathrm{i}\sqrt{2} & 2+\mathrm{i}\sqrt{2} & 2 & 9 \\ 0 & 0 & -3 & -4 & -18 \\ 0 & 0 & -3 & -1 & -9 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2}-\mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2} & -\mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2} & -\mathrm{i}\frac{9\sqrt{2}}{4} \\ 0 & 0 & -3 & -4 & -18 \\ 0 & 0 & -3 & -1 & -9 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2} & \mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2} & \mathrm{i}\frac{9\sqrt{2}}{4} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2}-\mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2} & -\mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2} & -\mathrm{i}\frac{9\sqrt{2}}{4} \\ 0 & 0 & -3 & -4 & -18 \\ 0 & 0 & -3 & -1 & -9 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{2}{3}-\mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{6} & -3-\mathrm{i}\frac{3\sqrt{2}}{4} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{3}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{6} & -3+\mathrm{i}\frac{3\sqrt{2}}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4}{3} & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 9 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -1-\mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{4} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1+\mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right).$$

Also lautet die Partialbruchzerlegung

$$\frac{9}{(x^2+2)(x+1)^2} = \frac{-1-\mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{4}}{x+\mathrm{i}\sqrt{2}} + \frac{-1+\mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{4}}{x-\mathrm{i}\sqrt{2}} + \frac{2}{x+1} + \frac{3}{(x+1)^2}.$$

Damit ist

$$
\begin{aligned}
&\int_0^2 \frac{9}{(x^2+2)(x+1)^2}\,\mathrm{d}x \\
={}& \int_0^2 \frac{-1}{x+\mathrm{i}\sqrt{2}} + \frac{-1}{x-\mathrm{i}\sqrt{2}}\,\mathrm{d}x + \int_0^2 \frac{\mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{4}}{x-\mathrm{i}\sqrt{2}} - \frac{\mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{4}}{x+\mathrm{i}\sqrt{2}}\,\mathrm{d}x + \int_0^2 \frac{2}{x+1}\,\mathrm{d}x + \int_0^2 \frac{3}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x \\
={}& -\left[\ln\left(x^2+2\right)\right]_{x=0}^2 + \mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{4}\left[2\mathrm{i}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)\right]_{x=0}^2 + 2[\ln(x+1)]_{x=0}^2 - 3\left[\frac{1}{(x+1)}\right]_{x=0}^2 \\
={}& -\ln(6) + \ln(2) - \frac{\sqrt{2}}{2}(\arctan(\sqrt{2}) - \arctan(0)) + 2\ln(3) - 2\ln(1) - 1 + 3 \\
={}& -\ln(3) - \ln(2) + \ln(2) - \frac{\sqrt{2}}{2}\arctan(\sqrt{2}) + 2\ln(3) + 2 \\
={}& \ln(3) - \frac{\sqrt{2}}{2}\arctan(\sqrt{2}) + 2.
\end{aligned}
$$

(2) Die Partialbruchzerlegung von $\dfrac{-4x^2+x-4}{(x^2+2)(x+1)^2}$ berechnet man vollkommen analog zu der Partialbruchzerlegung in (1); da der Nenner des Bruchs derselbe ist wie in (1), bleibt sogar der größte Teil der Rechnung derselbe: Der Ansatz

$$
\frac{-4x^2+x-4}{(x^2+2)(x+1)^2} = \frac{A}{x+\mathrm{i}\sqrt{2}} + \frac{B}{x-\mathrm{i}\sqrt{2}} + \frac{C}{x+1} + \frac{D}{(x+1)^2}
$$

führt auf

$$
\begin{aligned}
&-4x^2+x-4 \\
={}& A(x^3+(2-\mathrm{i}\sqrt{2})x^2+(1-\mathrm{i}\sqrt{2})x-\mathrm{i}\sqrt{2}) + B(x^3+(2+\mathrm{i}\sqrt{2})x^2+(1+\mathrm{i}\sqrt{2})x+\mathrm{i}\sqrt{2}) \\
&+ C(x^3+x^2+2x+2) + D(x^2+2).
\end{aligned}
$$

und das Gleichungssystem

$$
\left(\begin{array}{cccc|c}
-\mathrm{i}\sqrt{2} & \mathrm{i}\sqrt{2} & 2 & 2 & -4 \\
1-2\mathrm{i}\sqrt{2} & 1+2\mathrm{i}\sqrt{2} & 2 & 0 & 1 \\
2-\mathrm{i}\sqrt{2} & 2+\mathrm{i}\sqrt{2} & 1 & 1 & -4 \\
1 & 1 & 1 & 0 & 0
\end{array}\right)
\rightsquigarrow
\left(\begin{array}{cccc|c}
-\mathrm{i}\sqrt{2} & \mathrm{i}\sqrt{2} & 2 & 2 & -4 \\
1 & 1 & -2 & -4 & 9 \\
2 & 2 & -1 & -1 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 0 & 0
\end{array}\right)
$$

$$
\rightsquigarrow
\left(\begin{array}{cccc|c}
1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 1 & -2 & -4 & 9 \\
2 & 2 & -1 & -1 & 0 \\
-\mathrm{i}\sqrt{2} & \mathrm{i}\sqrt{2} & 2 & 2 & -4
\end{array}\right)
$$

$$
\rightsquigarrow
\left(\begin{array}{cccc|c}
1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -3 & -4 & 9 \\
0 & 0 & -3 & -1 & 0 \\
0 & 2\mathrm{i}\sqrt{2} & 2+\mathrm{i}\sqrt{2} & 2 & -4
\end{array}\right)
$$

$$
\rightsquigarrow
\left(\begin{array}{cccc|c}
1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 2\mathrm{i}\sqrt{2} & 2+\mathrm{i}\sqrt{2} & 2 & -4 \\
0 & 0 & -3 & -4 & 9 \\
0 & 0 & -3 & -1 & 0
\end{array}\right)
$$

$$
\rightsquigarrow
\left(\begin{array}{cccc|c}
1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & \frac{1}{2}-\mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2} & -\mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2} & \mathrm{i}\sqrt{2} \\
0 & 0 & -3 & -4 & 9 \\
0 & 0 & -3 & -1 & 0
\end{array}\right)
$$

$$
\rightsquigarrow
\left(\begin{array}{cccc|c}
1 & 0 & \frac{1}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2} & \mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2} & -\mathrm{i}\sqrt{2} \\
0 & 1 & \frac{1}{2}-\mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2} & -\mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2} & \mathrm{i}\sqrt{2} \\
0 & 0 & -3 & -4 & 9 \\
0 & 0 & -3 & -1 & 0
\end{array}\right)
$$

$$
\rightsquigarrow
\left(\begin{array}{cccc|c}
1 & 0 & 0 & -\frac{2}{3}-\mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{6} & \frac{3}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2} \\
0 & 1 & 0 & -\frac{2}{3}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{6} & \frac{3}{2}-\mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2} \\
0 & 0 & 1 & \frac{4}{3} & -3 \\
0 & 0 & 0 & 3 & -9
\end{array}\right)
$$

$$
\rightsquigarrow
\left(\begin{array}{cccc|c}
1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\
0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & -3
\end{array}\right).
$$

Also lautet die Partialbruchzerlegung

$$
\frac{-4x^2+x-4}{(x^2+2)(x+1)^2} = -\frac{1}{2(x+\mathrm{i}\sqrt{2})} - \frac{1}{2(x-\mathrm{i}\sqrt{2})} + \frac{1}{x+1} - \frac{3}{(x+1)^2}
$$

und es ist

$$
\begin{aligned}
&\int_0^2 \frac{-4x^2+x-4}{(x^2+2)(x+1)^2}\,\mathrm{d}x \\
={}& -\frac{1}{2}\int_0^2 \frac{1}{x+\mathrm{i}\sqrt{2}} + \frac{1}{x-\mathrm{i}\sqrt{2}}\,\mathrm{d}x + \int_0^2 \frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x - \int_0^2 \frac{3}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x \\
={}& -\frac{1}{2}\left[\ln\!\left(x^2+2\right)\right]_{x=0}^2 + \left[\ln(x+1)\right]_{x=0}^2 + 3\left[\frac{1}{(x+1)}\right]_{x=0}^2 \\
={}& -\frac{1}{2}(\ln(6)+\ln(2)) + \ln(3) - 2\ln(1) + 1 - 3 \\
={}& -\frac{1}{2}(\ln(3)-\ln(2)+\ln(2)) + \ln(3) - 2 \\
={}& \frac{1}{2}\ln(3) - 2.
\end{aligned}
$$

Hausaufgabe 37 Lösen Sie die folgenden Differentialgleichungen:

(1) Gesucht ist $y(x)$ auf $\mathbf{R}_{>0}$ mit $y' = x^2y^2$ und $y(1) = -1$.

(2) Gesucht ist $y(x)$ auf $\mathbf{R}_{>0}$ mit $y' = x^{-2}y + x^{-2}$ und $y(1) = 2$.

Lösung.

(1) Diese Differentialgleichung ist separierbar, denn sie ist der Form $y'(x) = f(x)\cdot g(y(x))$ mit $f(x) = x^2$ und $g(y) = y^2$. Aus der Anfangswertbedingung folgt $x_0 = 1$ und $y_0 = y(1) = -1$.

Wie setzen also

$$F(x) = \int_{x_0}^x f(x)\,\mathrm{d}t = \int_1^x t^2\,\mathrm{d}t = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3}$$

und für $w < 0$

$$H(w) = \int_{y_0}^w \frac{1}{g(t)}\,\mathrm{d}t = \int_{-1}^w \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t = -w^{-1} + (-1)^{-1} = -w^{-1} - 1.$$

Dabei haben wir $w < 0$ angenommen, damit das Integral definiert ist. Also hat die Funktion g den Definitionsbereich $E = \mathbf{R}_{<0}$ und wir müssen am Ende der Rechnung überprüfen, ob das gefundene y nur Werte in E annimmt.

Als nächstes müssen wir $H^{-1}(w)$ finden. Dafür setzen wir $z := H(w) = -w^{-1} - 1$ an. Dies ist äquivalent zu $-z - 1 = w^{-1}$ und damit zu $w = \dfrac{1}{-z-1}$. Also ist $H^{-1}(z) = \dfrac{1}{-z-1}$.

Wir bekommen

$$y(x) = H^{-1}(F(x)) = H^{-1}\left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{-\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{3} - 1} = -\frac{3}{x^3+2}.$$

Wie gewünscht, ist diese Funktion auf $\mathbf{R} > 0$ definiert und der Wertebereich ist in $\mathbf{R}_{<0}$ enthalten.

(2) Diese Differentialgleichung ist linear, denn sie ist der Form $y'(x) = a(x)y(x) + b(x)$ mit $a(x) = b(x) = x^{-2}$. Aus der Anfangswertbedingung folgt $x_0 = 1$ und $y_0 = y(1) = 2$.

Um die Gleichung zu lösen, setzen wir also

$$A(x) = \int_{x_0}^{x} a(t)\,\mathrm{d}t = \int_{1}^{x} t^{-2}\,\mathrm{d}t = -x^{-1} + 1^{-1} = -x^{-1} + 1$$

und

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} b(t)\mathrm{e}^{-A(t)}\,\mathrm{d}t = \int_{1}^{x} t^{-2}\mathrm{e}^{t^{-1}-1}\,\mathrm{d}t = \int_{0}^{x^{-1}-1} -\mathrm{e}^{u}\,\mathrm{d}u = -\mathrm{e}^{x^{-1}-1} + 1,$$

wobei wir $u := t^{-1} - 1$ substituiert haben, um das Integral zu berechnen (siehe Skript, §6.3.1).

Also ist

$$y(x) = \mathrm{e}^{A(x)}(F(x) + y_0) = \mathrm{e}^{-x^{-1}+1}(-\mathrm{e}^{x^{-1}-1} + 1 + 2) = -1 + 3\mathrm{e}^{-x^{-1}+1}.$$

Hausaufgabe 38 Lösen Sie die folgenden Differentialgleichungen:

(1) Gesucht ist $y(x)$ auf $\mathbf{R}$ mit $y'' + 4y' + 3y = 0$, mit $y(1) = 1$ und $y'(1) = 1$.

(2) Gesucht ist $y(x)$ auf $\mathbf{R}$ mit $y'' + 4y' + 3y = 10\cos(x) + 10\sin(x)$, mit $y(0) = 0$ und mit $y'(0) = 0$.

Lösung.

(1) Dies ist eine homogene Differentialgleichung zweiter Ordnung der Form

$$y''(x) + 2ay'(x) + by = 0$$

mit $a = 2$ und $b = 1$. Es ist also $4 = a^2 > b = 1$.

Mit der Formel aus dem Skript ist mit $v = \sqrt{a^2 - b} = \sqrt{1} = 1$ und $r, s \in \mathbf{R}$ jede Lösung der Form

$$y(x) = \mathrm{e}^{-ax}(r\mathrm{e}^{vx} + s\mathrm{e}^{-vx}) = \mathrm{e}^{-2x}(r\mathrm{e}^{x} + s\mathrm{e}^{-x}) = r\mathrm{e}^{-x} + s\mathrm{e}^{-3x}.$$

Um r und s so zu bestimmen, dass die Anfangswertbedingungen $y(1) = 1$ und $y'(1) = 1$ erfüllt sind, lösen wir das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} y(1) &= \quad r\mathrm{e}^{-1} + s\mathrm{e}^{-3} &= 1 \\ y'(1) &= -r\mathrm{e}^{-1} - s\cdot 3\mathrm{e}^{-3} &= 1. \end{aligned}$$

Also bekommen wir $s = -\mathrm{e}^3$, $r = 2e$ und $y(x) = 2\mathrm{e}^{1-x} - \mathrm{e}^{3-3x}$.

(2) Dies ist eine inhomogene Differentialgleichung zweiter Ordnung der Form

$$y''(x) + 2ay'(x) + by = c(x)$$

mit $a = 2$, $b = 1$ und $c(x) = 10\cos(x) + 10\sin(x)$. Aus (1) wissen wir, dass die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung $y''(x) + 4y'(x) + 3y = 0$

$$y(x) = r\mathrm{e}^{-x} + s\mathrm{e}^{-3x}$$

ist.

Wir müssen also nur noch eine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung finden, die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung aufaddieren und r und s so anpassen, dass die Anfangswertbedingungen erfüllt sind.

Es ist

$$c(x) = 10\cos(x) + 10\sin(x) = 10\cdot\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}) + 10\cdot\frac{1}{2\mathrm{i}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}) = (5-5\mathrm{i})\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}+(5+5\mathrm{i})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}.$$

Also können wir eine solche Lösung der inhomogenen Differentialgleichung finden, indem wir unseren Ansatz wie in der Bemerkung im Skript wählen: Mit $\lambda = \mathrm{i}$ ist

$$\lambda^2 + 2a\lambda + b = \mathrm{i}^2 + 4\mathrm{i} + 1 = 4\mathrm{i} \neq 0$$

und wir setzen $y(x) = \nu\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$ in die Differentialgleichung

$$y'' + 4y' + 3y = (5 - 5\mathrm{i})\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$$

ein:

$$\mathrm{i}^2\nu\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + 4\mathrm{i}\nu\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + 3\nu\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} = (5 - 5\mathrm{i})\mathrm{e}^{\mathrm{i}x},$$

also

$$(2 + 4\mathrm{i})\nu\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} = (5 - 5\mathrm{i})\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$$

und damit

$$\nu = \frac{5 - 5\mathrm{i}}{2 + 4\mathrm{i}} = \frac{(5 - 5\mathrm{i})(2 - 4\mathrm{i})}{20} = \frac{-10 - 30\mathrm{i}}{20} = -\frac{1}{2} - \frac{3}{2}\mathrm{i}.$$

Analog setzen wir $y(x) = \nu'\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}$ in die Differentialgleichung

$$y'' + 4y' + 3y = (5 + 5\mathrm{i})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}$$

ein:

$$(-\mathrm{i})^2\nu'\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x} - 4\mathrm{i}\nu'\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x} + 3\nu'\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x} = (5 + 5\mathrm{i})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x},$$

also

$$(2 - 4\mathrm{i})\nu\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x} = (5 + 5\mathrm{i})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}$$

und damit

$$\nu' = \frac{5 + 5\mathrm{i}}{2 - 4\mathrm{i}} = \frac{(5 + 5\mathrm{i})(2 + 4\mathrm{i})}{20} = \frac{-10 + 30\mathrm{i}}{20} = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\mathrm{i}.$$

Also ist

$$\begin{aligned} y(x) = \nu\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \nu'\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x} &= \left(-\frac{1}{2} - \frac{3}{2}\mathrm{i}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\mathrm{i}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x} \\ &= \left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2\mathrm{i}}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \left(-\frac{1}{2} - \frac{3}{2\mathrm{i}}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x} \\ &= -\cos(x) + 3\sin(x) \end{aligned}$$

eine Lösung der Differentialgleichung

$$y'' + 4y' + 3y = (5 - 5\mathrm{i})\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + (5 + 5\mathrm{i})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x} = 10\cos(x) + 10\sin(x).$$

Indem wir die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung, die wir in (1) berechnet haben, aufaddieren, bekommen wir eine allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung:

$$y(x) = -\cos(x) + 3\sin(x) + r\mathrm{e}^{-x} + s\mathrm{e}^{-3x}$$

mit $r, s \in \mathbf{R}$. Um die Lösung zu bestimmen, die die Anfangswertbedingungen $y(0) = 0$ und $y'(0) = 0$ erfüllt, lösen wir das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcl} y(0) = & -\cos(0) + 3\sin(0) + r\mathrm{e}^0 + s\mathrm{e}^0 & = & -1 + r + s & = 0 \\ y'(0) = & \sin(0) + 3\cos(0) - r\mathrm{e}^0 - 3s\mathrm{e}^0 & = & 3 - r - 3s & = 0 \end{array},$$

also $s = 1$ und $r = 0$.
Die Lösung

$$y(x) = -\cos(x) + 3\sin(x) + \mathrm{e}^{-3x}$$

der Differentialgleichung $y'' + 4y' + 3y = 10\cos(x) + 10\sin(x)$ erfüllt also die Anfangswertbedingungen $y(0) = 0$ und $y'(0) = 0$.

Hausaufgabe 39 Lösen Sie die folgenden Differenzengleichungen:

(1) Bestimmen Sie eine reelle Folge $(x_n)_{n\geqslant 0}$ mit $x_{n+1} = x_n + 3 \cdot 2^n$ und $x_0 = 1$.

(2) Bestimmen Sie eine reelle Folge $(x_n)_{n\geqslant 0}$ mit $x_{n+2} = 2x_{n+1} + x_n$, mit $x_0 = 0$ und mit $x_1 = 1$.

Lösung.

(1) Dies ist eine lineare Differenzengleichung der Form $x_{n+1} = ax_n + b \cdot c^n$ für alle $n \in \mathbf{Z}_{\geqslant 0}$ mit $a = 1$, $b = 3$ und $c = 2$ und Anfangswert $x_0 = 1$. Da $a \neq c$ gilt, ist

$$(x_n)_{n\geqslant 0} = \left(\frac{b}{c-a}c^n + ra^n\right)_{n\geqslant 0} = (3 \cdot 2^n + r)_{n\geqslant 0}$$

mit

$$r = x_0 - \frac{b}{c-a} = 1 - 3 = -2.$$

Also ist $(x_n)_{n\geqslant 0} = (3 \cdot 2^n - 2)_{n\geqslant 0}$.

(2) Dies ist eine lineare Differenzengleichung zweiter Ordnung der Form

$$x_{n+2} = 2ax_{n+1} + bx_n + cd^n$$

mit $a = b = 1$, $c = 0$ und $d \neq 0$ beliebig. Es ist

$$\lambda_1 = a + \sqrt{a^2 + b} = 1 + \sqrt{2}$$

und

$$\lambda_2 = a - \sqrt{a^2 + b} = 1 - \sqrt{2}.$$

Aufgrund von $a^2 + b = 2 \neq 0$, können wir die Aufgabe mit der Formel aus Teil (1) oder Teil (2) aus dem Lemma im Skript lösen, je nachdem, welchen Wert wir für d wählen.

Da $c = 0$ gilt, ergibt Einsetzen der Werte in die Formel

$$(x_n)_{n \geqslant 0} = r\lambda_1^n + s\lambda_2^n = r(1+\sqrt{2})^n + s(1-\sqrt{2})^n$$

mit $r, s \in \mathbf{C}$, unabhängig davon, welchen Wert d hat.
Die Anfangswertbedingungen ergeben

$$0 = x_0 = r + s$$

und

$$1 = x_1 = r(1+\sqrt{2}) + s(1-\sqrt{2}).$$

Aus der 1. Gleichung folgt $s = -r$ und damit wird die 2. Gleichung zu

$$1 = 2r\sqrt{2},$$

also $-s = r = \frac{\sqrt{2}}{4}$ und damit

$$(x_n)_{n \geqslant 0} = \frac{\sqrt{2}}{4}(1+\sqrt{2})^n - \frac{\sqrt{2}}{4}(1-\sqrt{2})^n.$$