Gottwald, Künzer, Ritter

Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler

Lösung 1

Lösungen zu den Hausaufgaben

Hausaufgabe 1

(1) Seien $a, b \in \mathbf{Z}$ und $0 \leqslant b \leqslant a$ gegeben. Berechnen Sie $(a-b)!\binom{a}{b}\frac{(b-1)!}{(a-1)!} - \frac{a-1}{b}$.

(2) Sei $x \in \mathbf{R}$. Berechnen Sie $(x+2)^5 - \sum_{i=0}^{5} \frac{120}{(5-i)!\,i!}\, x^{5-i}\, 2^i$.

Lösung.

(1) Es ist

$$\begin{aligned}(a-b)!\binom{a}{b}\frac{(b-1)!}{(a-1)!} - \frac{a-1}{b} &= (a-b)!\frac{a!}{(a-b)!b!}\frac{(b-1)!}{(a-1)!} - \frac{a-1}{b}\\ &= (a-b)!\frac{a(a-1)!}{(a-b)!b(b-1)!}\frac{(b-1)!}{(a-1)!} - \frac{a-1}{b}\\ &= \frac{a}{b} - \frac{a-1}{b}\\ &= \frac{1}{b}.\end{aligned}$$

(2) Es gilt

$$\begin{aligned}(x+2)^5 - \sum_{i=0}^{5}\frac{120}{(5-i)!i!}x^{5-i}\,2^i &= (x+2)^5 - \sum_{i=0}^{5}\frac{5!}{(5-i)!i!}x^{5-i}\,2^i\\ &= (x+2)^5 - \sum_{i=0}^{5}\binom{5}{i}x^{5-i}\,2^i\\ &= (x+2)^5 - (x+2)^5\\ &= 0.\end{aligned}$$

Hausaufgabe 2 Wir betrachten folgende Funktion.

$$f : \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ x \mapsto f(x) := x^2 - 2x + 2\ .$$

(1) Skizzieren Sie den Graphen von f.

(2) Berechnen Sie $f([1,5])$ und $f(\mathbf{R})$.

(3) Untersuchen Sie $f|_{[1,5]}^{\mathbf{R}}$ auf Injektivität, Surjektivität und Bijektivität.

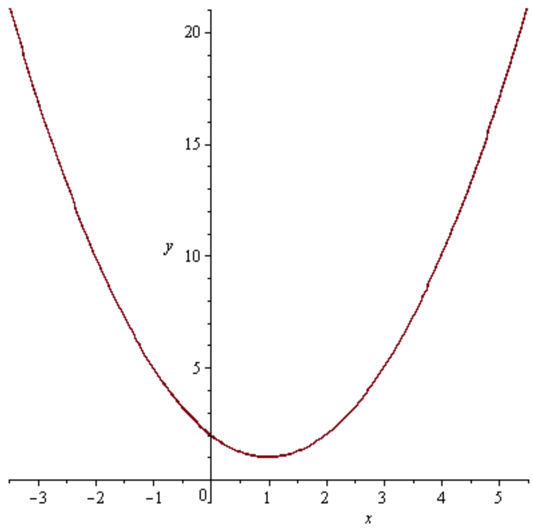
(4) Untersuchen Sie $f|_{\mathbf{R}}^{\mathbf{R}_{\geqslant 1}}$ auf Injektivität, Surjektivität und Bijektivität.

Lösung.

(1) Die quadratische Funktion f hat die Scheitelpunktsform

$$f(x) = (x-1)^2 + 1.$$

Damit ergibt sich die folgende Skizze:



(2) Zu $f([1,5])$: Es ist $f(1) = 1$ und $f(5) = 17$. Wie z.B. aus dem Graphen in (1) ersichtlich, nimmt f über dem Intervall $[1,5]$ jeden reellen Wert zwischen 1 und 17 an. Damit ist $f([1,5]) = [1,17]$.

Zu $f(\mathbf{R})$: Aus der Scheitelpunktsform und dem Graphen in (1) lässt sich ablesen, dass $f(x) \geqslant 1$ für alle $x \in \mathbf{R}$ gilt und dass jeder Wert in dem Intervall $[1,\infty)$ ein Urbild hat. Alternativ lässt sich zu jedem $y \in \mathbf{R}_{\geqslant 1}$ ein Urbild angeben, nämlich z. B. $\sqrt{y-1}+1$: da $y \geqslant 1$ ist, ist $y-1 \geqslant 0$ und $\sqrt{y-1}$ existiert. Es ist

$$f(\sqrt{y-1}+1) = (\sqrt{y-1}+1-1)^2 + 1 = (\sqrt{y-1})^2 + 1 = y - 1 + 1 = y.$$

Es ist auch klar, dass $f(x) = (x-1)^2 + 1 \geqslant 1$ gelten muss, da $(x-1)^2 \geqslant 0$ ist. Damit ist $f(\mathbf{R}) = [1,\infty)$.

(3) Aus dem Graphen in (1) lässt sich ablesen, dass $f|_{[1,5]}^{\mathbf{R}}$ injektiv ist. Diese Funktion ist jedoch nicht surjektiv, da das Bild von $f|_{[1,5]}^{\mathbf{R}}$ nach (2) das Intervall $[1,17]$ ist und somit z. B. 0 kein Urbild hat. Also ist $f|_{[1,5]}^{\mathbf{R}}$ auch nicht bijektiv.

(4) Die Funktion $f|_{\mathbf{R}}^{\mathbf{R}_{\geqslant 1}}$ ist nicht injektiv und damit auch nicht bijektiv, da beispielsweise $f(0) = 2 = f(2)$ ist. Sie ist allerdings surjektiv, da nach (2) das Bild $f(\mathbf{R}) = [1,\infty) = \mathbf{R}_{\geqslant 1}$ ist.

Hausaufgabe 3 Skizzieren Sie die Graphen der folgenden Funktionen.
Untersuchen Sie die folgenden Funktionen auf Injektivität, Surjektivität und Bijektivität.

(1) $f_1 : \mathbf{R} \to \mathbf{R}_{>0}\,,\ x \mapsto f_1(x) := x^2 + x + 1$

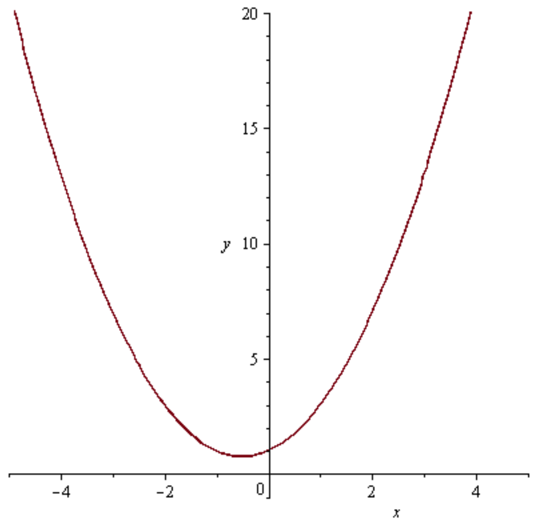
(2) $f_2 : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \mapsto f_2(x) := x^5$

(3) $f_3 : \mathbf{R} \to [-1, 1]$, $x \mapsto f_3(x) := \cos(2x)$

(4) $f_4 : [0, \frac{1}{2}\pi] \to \mathbf{R}$, $x \mapsto f_4(x) := \cos(2x)$

Lösung.

(1) Für f_1 ergibt sich die folgende Skizze:



f_1 ist nicht injektiv, da z. B. $f_1(0) = 1 = f_1(-1)$ gilt.

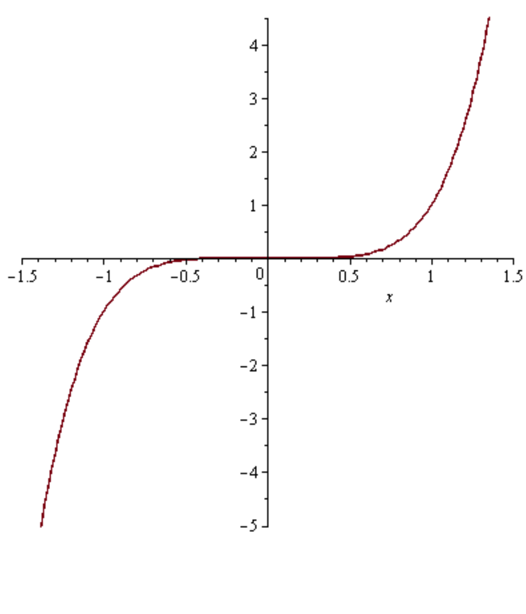
Aus der Skizze lässt sich erkennen, dass z. B. 0 kein Urbild hat und die Funktion nicht surjektiv und damit auch nicht bijektiv ist.

Alternativ kann man benutzen, dass mit der p-q-Formel für die Nullstellen von f_1 die Gleichung

$$x = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - 1} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{-\frac{3}{4}}$$

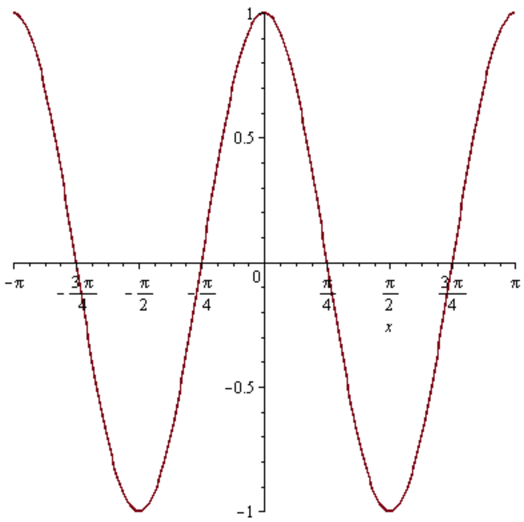
gilt, die keine reelle Lösung hat. Also folgt, dass $f(x) \neq 0$ für alle $x \in \mathbf{R}$ gilt.

(2) Für f_2 ergibt sich die folgende Skizze:



Daraus kann man erkennen, dass f_2 sowohl injektiv als auch surjektiv und damit bijektiv ist.

(3) Für f_3 ergibt sich die folgende Skizze:

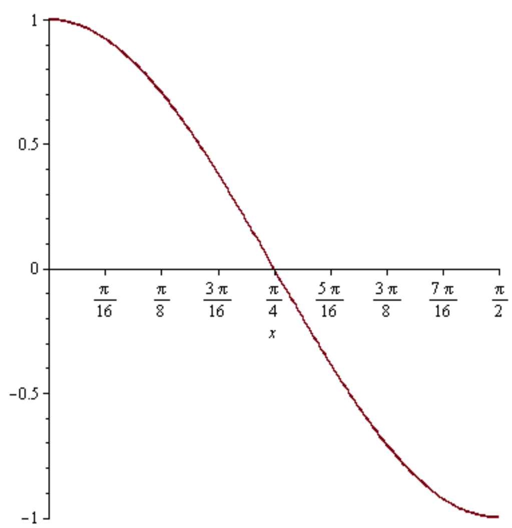


Die Funktion ist nicht injektiv und damit auch nicht bijektiv, da z. B.

$$f_3(0) = \cos(0) = 1 = \cos(2\pi) = f_3(\pi)$$

ist. Am Graphen sieht man, dass f_3 mit dem Wertebereich $[-1, 1]$ surjektiv ist, da $\cos(2x)$ über $\mathbf{R}$ jeden Wert zwischen -1 und +1 annimmt.

(4) Für f_4 ergibt sich die folgende Skizze:



Es ist ersichtlich, dass f_4 injektiv ist. Allerdings ist f_4 nicht bijektiv, da z. B. $2 \in \mathbf{R}$ kein Urbild unter f_4 hat.

Hausaufgabe 4 Wir betrachten folgende Funktionen.

$$f: \mathbf{R}_{>0} \to \mathbf{R}_{>0}, \quad x \mapsto f(x) := \frac{1}{2x}$$

$$g: \mathbf{R}_{>0} \to \mathbf{R}_{>2}, \quad x \mapsto g(x) := \frac{1}{x^2} + 2$$

(1) Bestimmen Sie die Umkehrfunktion f^{-1}.

(2) Bestimmen Sie die Umkehrfunktion g^{-1}.

(3) Ist $f(g(x)) = g(f(x))$ für alle $x \in \mathbf{R}_{>0}$?

Lösung.

(1) Es ist $f^{-1} : \mathbf{R}_{>0} \to \mathbf{R}_{>0}$ mit
$$f^{-1}(x) = \frac{1}{2x} = (2x)^{-1},$$
denn
$$f\left(\frac{1}{2x}\right) = \frac{1}{2(2x)^{-1}} = \frac{1}{x^{-1}} = x.$$

(2) Es ist $g^{-1} : \mathbf{R}_{>2} \to \mathbf{R}_{>0}$ mit
$$g^{-1}(x) = \frac{1}{\sqrt{x-2}} = (x-2)^{-\frac{1}{2}},$$
denn
$$g\left(\frac{1}{\sqrt{x-2}}\right) = \frac{1}{\left((x-2)^{-\frac{1}{2}}\right)^2} + 2 = \frac{1}{(x-2)^{-1}} + 2 = x - 2 + 2 = x.$$

(3) Es ist z. B.
$$f(g(1)) = f(3) = \frac{1}{6} \neq 6 = g\left(\frac{1}{2}\right) = g(f(1)).$$
Also ist $f(g(x)) \neq g(f(x))$ für mindestens ein $x \in \mathbf{R}_{>0}$.