$a, b \in \mathbb{Z}$

$a! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot a$

$$\underbrace{\binom{a}{b}}_{\text{Binomialkoeffizient}} = \begin{cases} \dfrac{a!}{b!(a-b)!} & \text{falls } 0 \leq b \leq a \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Pascalsches Dreieck:

$$\underbrace{\binom{0}{-1}}_{0} \quad \underbrace{\binom{0}{0}}_{1} \quad \underbrace{\binom{0}{1}}_{0}$$

$$\underbrace{\binom{1}{-1}}_{0} \quad \underbrace{\binom{1}{0}}_{1} \quad \underbrace{\binom{1}{1}}_{1} \quad \underbrace{\binom{1}{2}}_{0}$$

$$\underbrace{\binom{2}{-1}}_{0} \quad \underbrace{\binom{2}{0}}_{1} \quad \underbrace{\binom{2}{1}}_{2} \quad \underbrace{\binom{2}{2}}_{1} \quad \underbrace{\binom{2}{3}}_{0}$$

$$\underbrace{\binom{3}{-1}}_{0} \quad \underbrace{\binom{3}{0}}_{1} \quad \underbrace{\binom{3}{1}}_{3} \quad \underbrace{\binom{3}{2}}_{3} \quad \underbrace{\binom{3}{3}}_{1} \quad \underbrace{\binom{3}{4}}_{0}$$

$$\underbrace{\binom{4}{-1}}_{0} \quad \underbrace{\binom{4}{0}}_{1} \quad \underbrace{\binom{4}{1}}_{4} \quad \underbrace{\binom{4}{2}}_{6} \quad \underbrace{\binom{4}{3}}_{4} \quad \underbrace{\binom{4}{4}}_{1} \quad \underbrace{\binom{4}{5}}_{0}$$

$$\underbrace{\binom{5}{-1}}_{0} \quad \underbrace{\binom{5}{0}}_{1} \quad \underbrace{\binom{5}{1}}_{5} \quad \underbrace{\binom{5}{2}}_{10} \quad \underbrace{\binom{5}{3}}_{10} \quad \underbrace{\binom{5}{4}}_{5} \quad \underbrace{\binom{5}{5}}_{1} \quad \underbrace{\binom{5}{6}}_{0}$$

$\vdots$

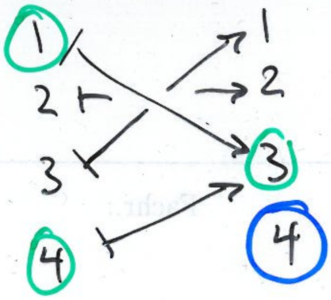
$\rightsquigarrow$

			0	1	0			
			0	1	1	0		
		0	1	2	1	0		
		0	1	3	3	1	0	
	0	1	4	6	4	1	0	
0	1	5	10	10	5	1	0	

$\vdots$

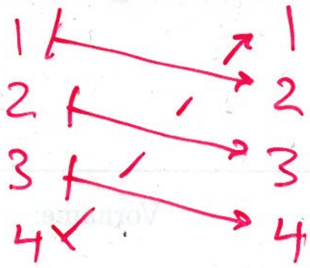
(Bsp aus Vortrags-übung)

f



nicht injektiv
nicht surjektiv

g

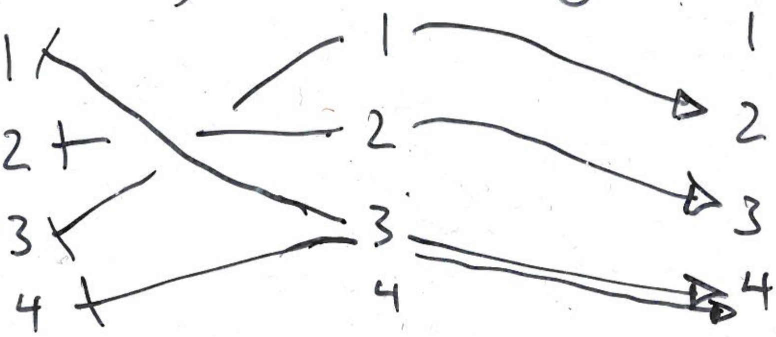


bijektiv: injektiv und surjektiv

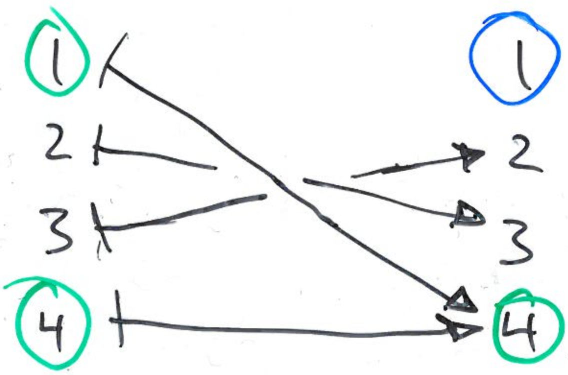
$$k: \{1,2,3,4\} \longrightarrow \{1,2,3,4\}, \quad i \longmapsto g(f(i))$$

$k = g \circ f$, $\quad g(f(i)) = (g \circ f)(i)$

f g



$\Rightarrow$



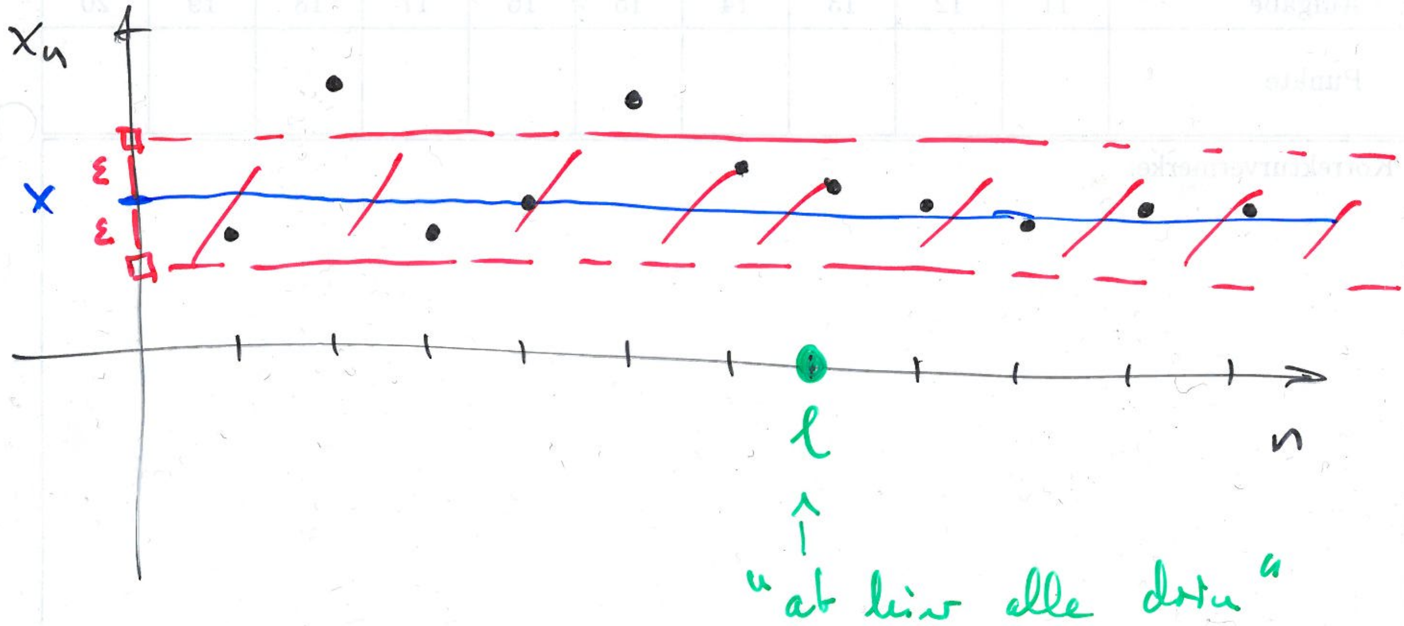
k

nicht injektiv
nicht surjektiv

$\lim_{n\to\infty} x_n = x$ heißt:

Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es ein l mit:

$$|x_n - x| < \varepsilon \quad \text{für } n \geq l$$



$$\sum_{i=k}^{\infty} a_i := \lim_{n\to\infty} \sum_{i=k}^{n} a_i$$

Grenzwert der <u>Reihe</u>

$n \geq 1$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : D \to \mathbb{R}$

$\underline{x} \longmapsto f(\underline{x}) = f(x_1, \dots, x_n)$

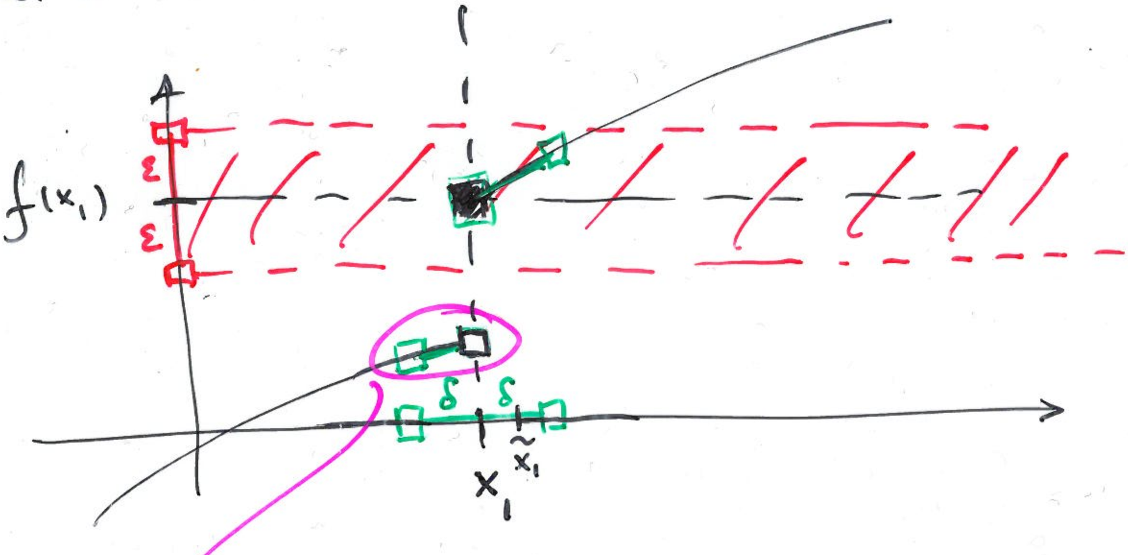
f heißt stetig in $\underline{x} \in D$,

falls für alle $\varepsilon > 0$ es ein $\delta > 0$ gibt mit:

für $\tilde{\underline{x}} \in D$ mit $\underbrace{\| \tilde{\underline{x}} - \underline{x} \|}_{\text{Abstand von } \tilde{\underline{x}} \text{ und } \underline{x} \text{ in } \mathbb{R}^n} < \delta$

ist auch $| f(\tilde{\underline{x}}) - f(\underline{x}) | < \varepsilon$

Fall $n = 1$:



Problem: egal, wie klein δ gewählt, das ist nie innerhalb des ε-Streifens

Konsequenz: f ist nicht stetig in x_1

Anschaulicher Grund: Sprung bei x_1

$u: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \ (x,y) \longmapsto x + \sin(y)$

ist stetig : Summe stetiger Fkt.

$v: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \ t \mapsto \exp(t) \cdot t$

ist stetig : Produkt stetiger Fkt.

Also ist auch das Kompositum

$v \circ u : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},$

"nach"

$(x,y) \longmapsto \underbrace{\exp(x+\sin(y)) \cdot (x+\sin(y))}$

$= (v \circ u)(x,y)$

$= v(u(x,y))$

eine stetige Funktion.

$f : D \to \mathbb{R}$

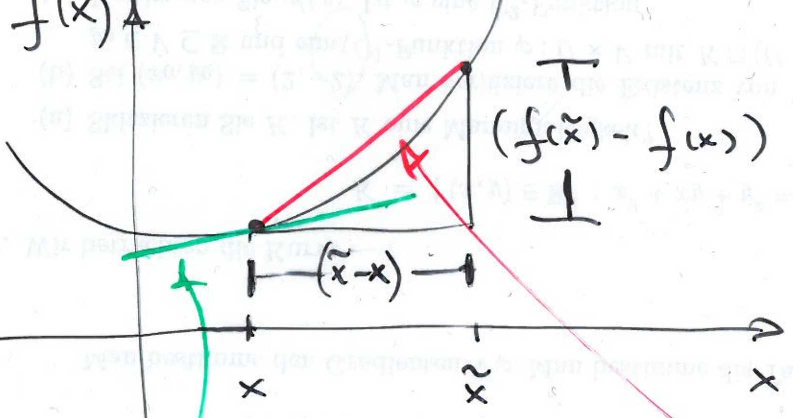
$x \in D$: innerer Punkt

$$f'(x) := \lim_{\tilde{x} \to x} \frac{f(\tilde{x}) - f(x)}{\tilde{x} - x}$$

falls existent, dann f differenzierbar in x

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

(eindeutige endliche Tangentensteigung, kein Knick, keine vertikale Tangente)



Steigung

$$\frac{f(\tilde{x}) - f(x)}{\tilde{x} - x}$$

Steigung

$$\lim_{\tilde{x} \to x} \frac{f(\tilde{x}) - f(x)}{\tilde{x} - x}$$

(Tangente)

Produktregel:

$$\left(f(x)\cdot g(x)\right)' = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)$$

Quotientenregel:

Zähler zuerst

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)\,g(x) - f(x)\,g'(x)}{g(x)^2}$$

Kettenregel:

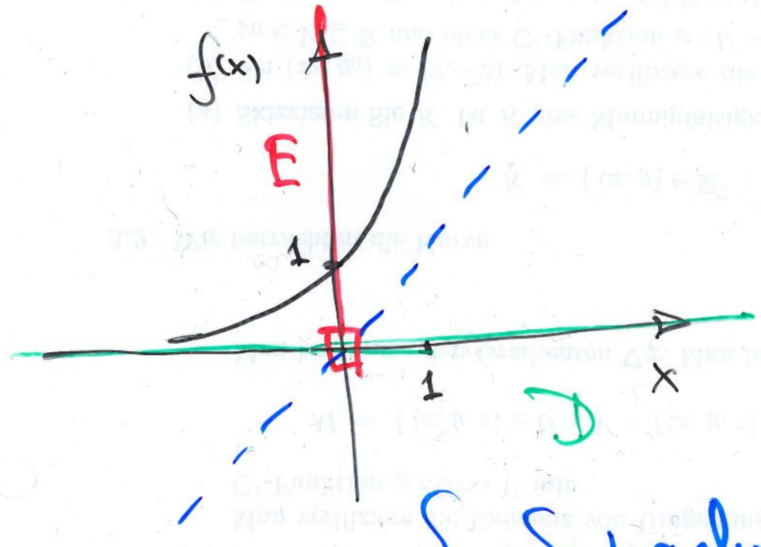
$$\left(g\left(f(x)\right)\right)' = \underbrace{g'\left(f(x)\right)}_{\text{äußere Ableitung}} \cdot \underbrace{f'(x)}_{\text{innere Ableitung}}$$

f : bijektiv, diff'bar

g : Umkehrfunktion zu f

$$g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))}$$

$$f(x) = \exp(x) = e^x$$



$D = \mathbb{R}$

$E = \mathbb{R}_{>0}$

Spiegeln um Graph der Umkehrfunktion zu erhalten

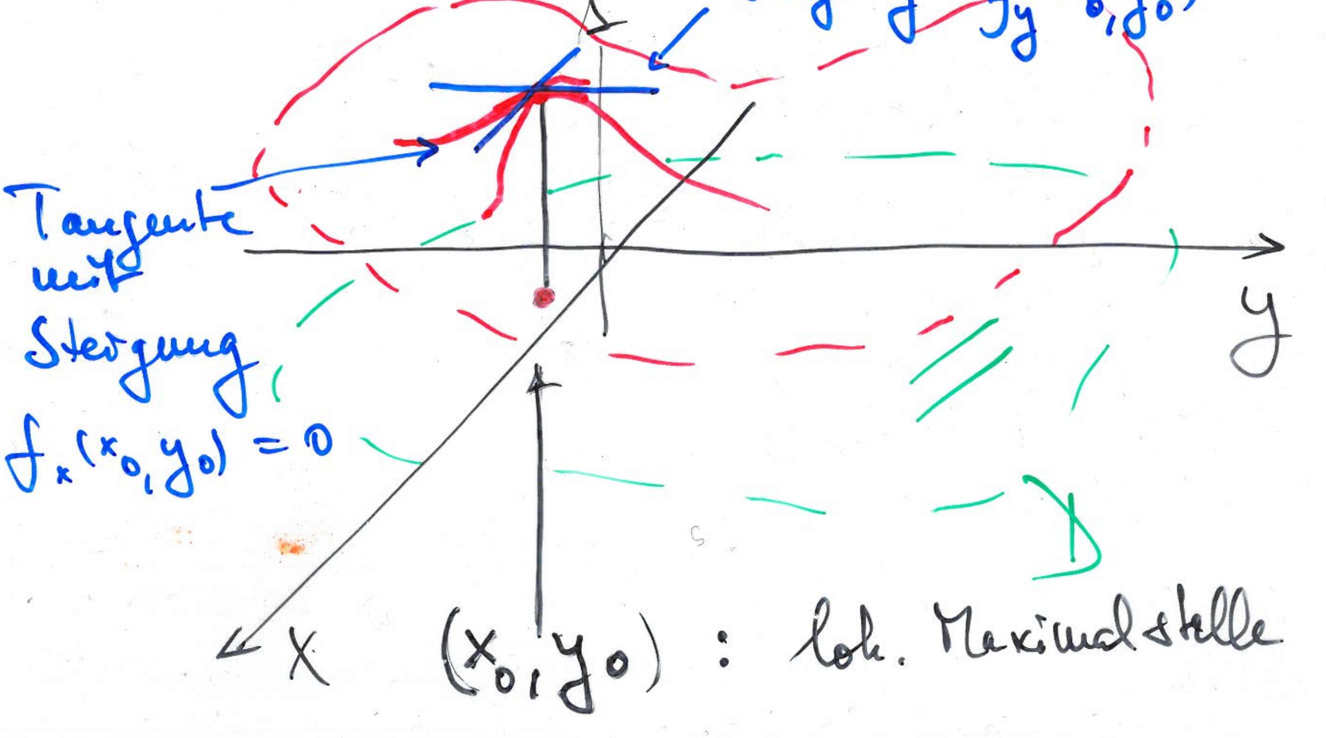
$f : D \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto f(x,y)$

Sei $(x_0, y_0) \in D$ betrachtet.

Ist (x_0, y_0) eine lokale Extremstelle von f, dann ist $f_x(x_0,y_0) = 0$ und $f_y(x_0,y_0) = 0$,

d.h. (x_0, y_0) ist dann eine

Flachstelle.



„Zeilenzähler zuerst – Spaltenzähler später“

$$A = (\alpha_{i,j})_{i,j} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} \phantom{\alpha_{1,1}} & \phantom{\alpha_{1,2}} & \text{Spalte 3} & & \phantom{\alpha_{1,n}} \end{array} \\ \begin{array}{c} \\ \text{Zeile 2} \\ \\ \\ \end{array} & \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & \alpha_{1,3} & \cdots & \alpha_{1,n} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} & \alpha_{2,3} & \cdots & \alpha_{2,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m,1} & \alpha_{m,2} & \alpha_{m,3} & \cdots & \alpha_{m,n} \end{pmatrix} \end{array} \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

Matrix

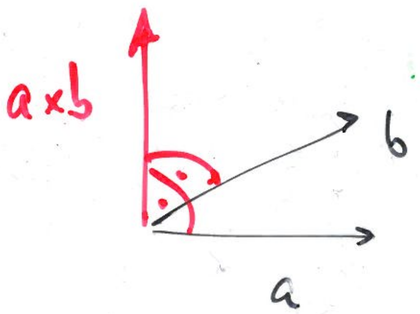
Menge aller $m \times n$ – Matrizen mit Einträgen in $\mathbb{R}$

Bsp
$$A = \begin{pmatrix} 3 & \boxed{7} \\ -2 & 5 \\ \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 2}$$

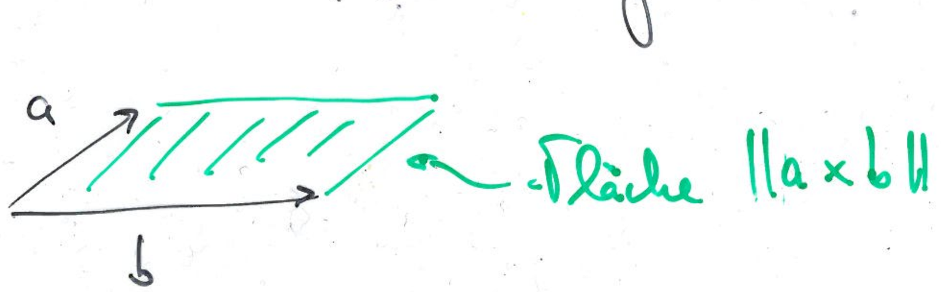
Eintrag 7 an Position $(1,2)$

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2 \\ \alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3 \\ \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 \end{pmatrix}$$

$a \times b$: senkrecht auf a, b



$\|a \times b\|$: Fläche des von a, b aufgespannten Parallelogramms



$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 5 & 10 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -4 \\ 1 & -1 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\{ x \in \mathbb{R}^{5 \times 1} : Ax = b \} = \; ?$$ (Lösungsmenge von LGS)

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} \boxed{1} & -1 & 2 & 5 & 10 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -4 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 3 & 2 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \\ \cdot(-1) \end{array} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 2 & 5 & 10 & 2 \\ 0 & 0 & \boxed{+1} & +1 & +4 & +1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -8 & -2 \end{array}\right) \begin{array}{c} \cdot(-2) \\ \\ \cdot(+2) \end{array}$$

unmöglich

also weiter

$$\rightsquigarrow \begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array} \begin{array}{cccccc} & ② & & ④ & ⑤ & \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \text{Zeilenstufenform fertig}$$

unmöglich

auch unmöglich

Stufen

$$\rightsquigarrow \{ x \in \mathbb{R}^{5 \times 1} : Ax = b \} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ \boxed{0} \\ 1 \\ \boxed{0} \\ \boxed{0} \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ \boxed{1} \\ 0 \\ \boxed{0} \\ \boxed{0} \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ \boxed{0} \\ -1 \\ \boxed{1} \\ \boxed{0} \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} -2 \\ \boxed{0} \\ -4 \\ \boxed{0} \\ \boxed{1} \end{pmatrix} : s, t, u \in \mathbb{R} \right\}$$

V **Vektorraum** : • $v+w$ für $v, w \in V$

• λv für $\lambda \in \mathbb{R}$, $v \in V$

• übliche Regeln (V 1-7)

Bsp • $V = \mathbb{R}^{m\times 1}$

• $V = \{ f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \; : \; f$ Abbildung $\}$

$= \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$

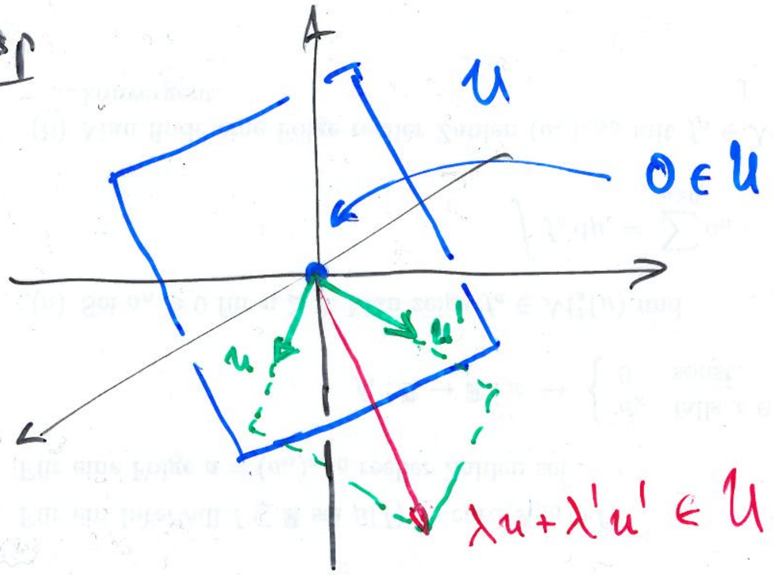
$U \subseteq V$ **Unterraum** : • $0 \in U$

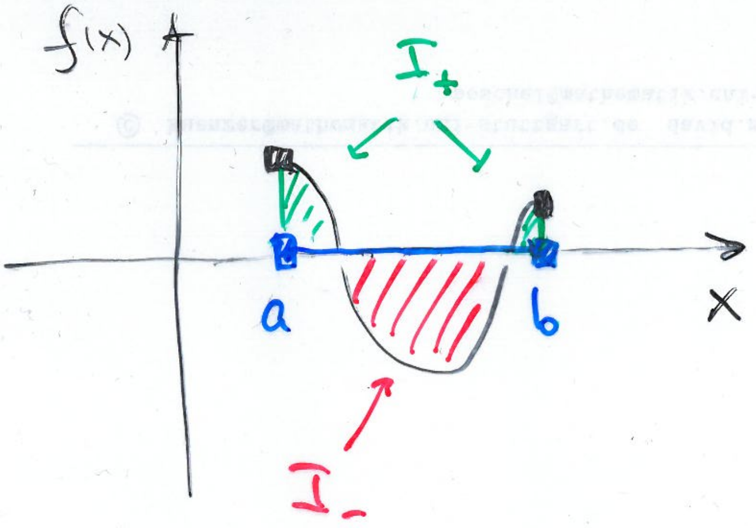
• $\lambda u + \lambda' u' \in U$

für $\lambda, \lambda' \in \mathbb{R}$, $u, u' \in U$

Linearkombination

Bsp





$$\int_a^b f(x)\,dx := I_+ - I_-$$

$f : D \to \mathbb{R}$ stetig

$F : D \to \mathbb{R}$ differenzierbar

F heißt eine **Stammfunktion**

oder eine **Aufleitung** von f

falls $F' = f$.

Partialbruchzerlegung (PBZ)

Bsp. für Ansatz:

$$\frac{x-2}{(x+1)^{3}\,x^{1}\,(x-2)^{2}} = \frac{A}{(x+1)} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{(x+1)^{3}}$$

$$+ \frac{D}{x^{1}}$$

$$+ \frac{E}{(x-2)} + \frac{F}{(x-2)^{2}}$$

Bsp aus Vorlesung, fortgesetzt:

Grad = 3

$$\int \frac{x^3}{(x-1)(x+2)}\,dx = ?$$

Grad = 2

Problem: $3 \geq 2$

Lösung: Polynomdivision voranstellen!

$$\frac{x^3}{(x-1)(x+2)} = x-1 + \frac{3x-2}{(x-1)(x+2)}$$

jetzt PBZ möglich

$$f : \mathbb{R}_{\geq 0} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto f(x)$$

mit $f(x) > 0$ stets

Def. Elastizität $E_f(x) := \frac{f'(x)}{f(x)} \cdot x$.

Interpretation von x und $f(x)$:

x : Stückgewinn für Produkt

$f(x)$: Nachfrage nach Produkt

Bsp: • Bei 140 ct/l ist $x = 40$ ct/l
und Nachfrage $f(x) = 1500$ l Benzin.
• Bei 160 ct/l ist $x = 60$ ct/l
und Nachfrage $f(x) = 900$ l Benzin.

$G(x) := x \cdot f(x)$: Gewinn

Bsp: • Bei $x = 40$ ct/l ist
$G(x) = 40 \, \text{ct/l} \cdot 1500 \, \text{l} = 600$ €
• Bei $x = 60$ ct/l ist
$G(x) = 60 \, \text{ct/l} \cdot 900 \, \text{l} = 540$ €

$$f: D \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad x_0 \in D$$

k-te Ableitung von f, ausgewertet bei x_0

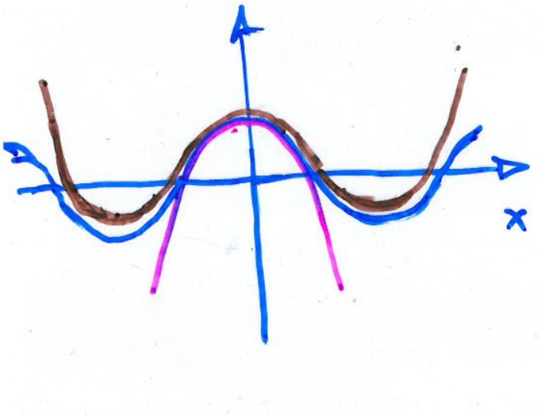
$$f(x) = \underbrace{\frac{f^{(0)}(x_0)}{0!}\cdot(x-x_0)^0 + \frac{f^{(1)}(x_0)}{1!}\cdot(x-x_0)^1 + \frac{f^{(2)}(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k}_{\text{Taylorpolynom von Ordnung } k \text{ in } x_0} + \underbrace{\boxed{\frac{1}{k!}\int_{x_0}^{x} f^{(k+1)}(t)\,(x-t)^k\,dt}}_{\text{Restglied}}$$

Falls $\lim_{k\to\infty}\left(\frac{1}{k!}\int_{x_0}^{x} f^{(k+1)}(t)\,(x-t)^k\,dt\right) = 0,$

dann $f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k}_{\text{Taylorentwicklung in } x_0}$

Bsp $\cos(x) = \frac{x^0}{0!} - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \dots$

$x_0 = 0$



$$= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{(2j)!}\, x^j$$

Determinante:

$$A=\begin{pmatrix}\boxed{2}&0&1\\3&1&2\\2&2&1\end{pmatrix}\overset{2}{\rightsquigarrow}\begin{pmatrix}\boxed{1}&0&\frac{1}{2}\\3&1&2\\2&2&1\end{pmatrix}\begin{matrix}\\ \leftarrow -3\\ \leftarrow -2\end{matrix}\rightsquigarrow\begin{pmatrix}1&0&\frac{1}{2}\\0&1&\frac{1}{2}\\0&\boxed{2}&0\end{pmatrix}$$

$$\overset{2}{\rightsquigarrow}\begin{pmatrix}1&0&\frac{1}{2}\\0&1&\frac{1}{2}\\0&\boxed{1}&0\end{pmatrix}\overset{(-1)^{1}}{\rightsquigarrow}\begin{pmatrix}1&0&\frac{1}{2}\\0&\boxed{1}&0\\0&1&\frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{matrix}\\ \\ \leftarrow -1\end{matrix}$$

eine Zeile nach oben tauschen

$$\rightsquigarrow\begin{pmatrix}1&0&\frac{1}{2}\\0&1&0\\0&0&\boxed{\frac{1}{2}}\end{pmatrix}\overset{\frac{1}{2}}{\rightsquigarrow}\begin{pmatrix}1&0&\frac{1}{2}\\0&1&0\\0&0&\boxed{1}\end{pmatrix}\begin{matrix}\leftarrow -\frac{1}{2}\\ \\ \\ \end{matrix}$$

$$\rightsquigarrow\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \det(A) = 2\cdot 2\cdot (-1)^{1}\cdot \frac{1}{2} = -2$$

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

A symmetrisch, falls $A = A^t$

Sei A symmetrisch.

A positiv definit, falls

$$\underset{1\times n}{x^t} \underset{n\times n}{A} \underset{n\times 1}{x} > 0$$

für $x \in \mathbb{R}^{n\times 1} \setminus \{0\}$

A negativ definit, falls

$$x^t A x < 0$$

für $x \in \mathbb{R}^{n\times 1} \setminus \{0\}$.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & & \\ \cup\!\shortmid & & \\ D & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \underline{x} & \longmapsto & f(\underline{x}) = f(x_1, \dots, x_n) \end{array}$$

$\hat{\underline{x}} \in D$ Flachstelle, falls $\nabla_f(\hat{\underline{x}}) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

Ist $\hat{\underline{x}}$ eine Flachstelle von f,

dann:

- $H_f(\hat{\underline{x}})$ positiv definit
  $\implies \hat{\underline{x}}$ lok. Minimum

- $H_f(\hat{\underline{x}})$ negativ definit
  $\implies \hat{\underline{x}}$ lok. Maximum

- $H_f(\hat{\underline{x}})$ weder pos. noch neg. def.
  und $\det H_f(\hat{\underline{x}}) \neq 0$
  $\implies$ Sattelpunkt

($\det H_f(\hat{\underline{x}}) = 0$: Spezialfall, behandeln wir nicht)

$$f(x_1,\dots,x_n) = \text{Extr.}!$$

$$\left.\begin{aligned} g_1(x_1,\dots,x_n) &= 0 \\ &\vdots \\ g_\ell(\underbrace{x_1,\dots,x_n}_{=\underline{x}}) &= 0 \end{aligned}\right\} \text{Nebenbedingungen}$$

1. Bestimmung der Flachstellen:

Sei $N(\underline{x}) := \left(\boxed{\nabla_{g_1}(\underline{x})} \cdots \boxed{\nabla_{g_\ell}(\underline{x})} \right) \in \mathbb{R}^{n\times\ell}$

Sei $r = \begin{pmatrix} \rho_1 \\ \vdots \\ \rho_\ell \end{pmatrix}$ Lagrangemultiplikatoren

Löse: $\begin{cases} \nabla_f(\underline{x}) = N(\underline{x}) \cdot r \\ g_1(\underline{x}) = 0 \\ \vdots \\ g_\ell(\underline{x}) = 0 \end{cases}$

Unbekannte $x_1,\dots,x_n,$ $\rho_1,\dots,\rho_\ell$

2. Diskussion der Flachstelle $\hat{\underline{x}}$.

- Basis von $\{ u \in \mathbb{R}^{n\times 1} : N(\hat{\underline{x}})^t \cdot u = 0 \}$ in die Spalten der Matrix U

- $F(\underline{x}) := f(\underline{x}) - \rho_1 g_1(\underline{x}) - \dots - \rho_\ell g_\ell(\underline{x})$

Lagrangemult. zu $\hat{\underline{x}}$

$U^t H_F(\hat{\underline{x}}) U$
- pos. def $\Rightarrow$ lok Min
- neg. def $\Rightarrow$ lok Max
- weder noch und det $\neq 0$ $\Rightarrow$ Sattelp.

$$\mathbb{C} = \{a+bi : a, b \in \mathbb{R}\}$$

$$i^2 = -1$$

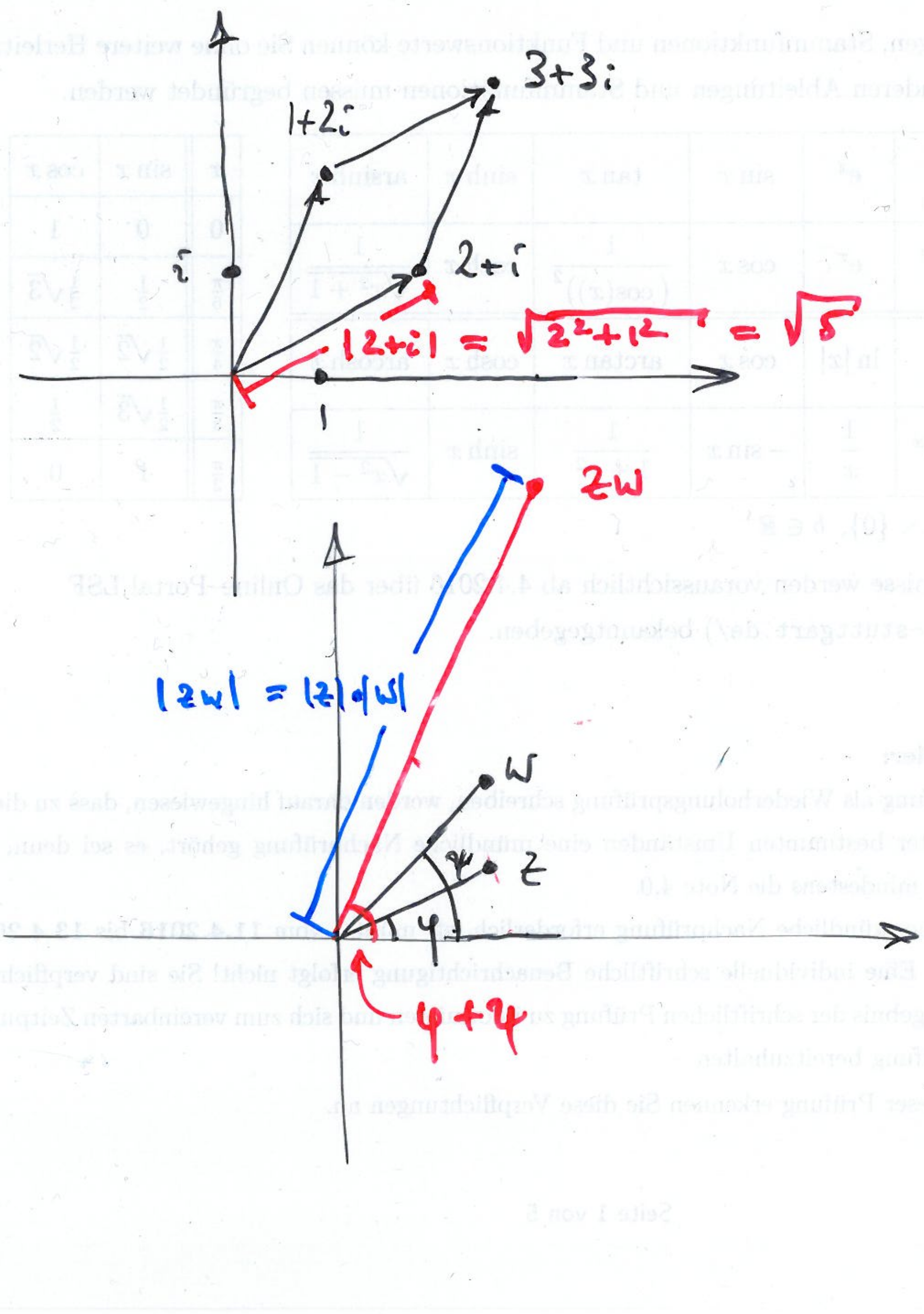
komplex konjugiert Zahl

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{a+bi} = \frac{1 \cdot (a-bi)}{(a+bi)(a-bi)} = \frac{a-bi}{a^2+b^2} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$$

$$|z| = \sqrt{a^2+b^2}$$

Betrag

Komplexe Zahlenebene



$z \in \mathbb{C}, \quad x, y \in \mathbb{R}$

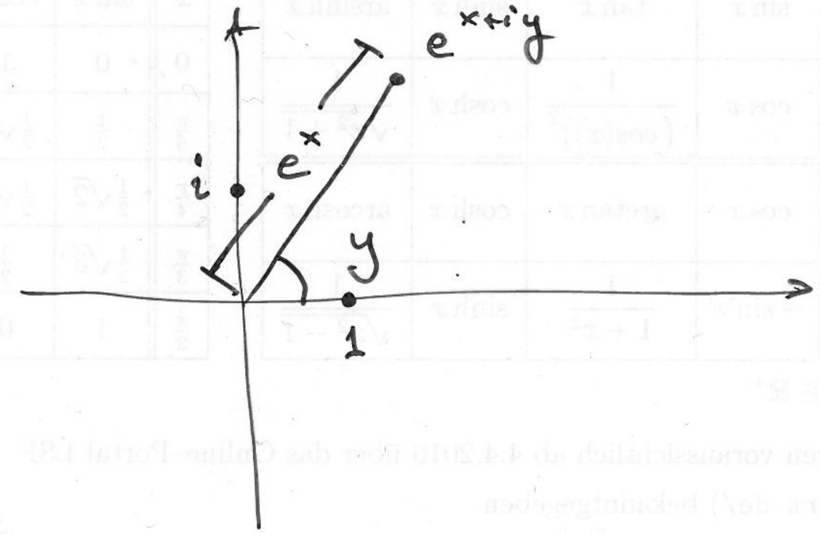
$$e^z := \frac{z^0}{0!} + \frac{z^1}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \ldots$$

$$\sin(z) := \frac{z^1}{1!} - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + - \ldots$$

$$\cos(z) := \frac{z^0}{0!} - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + - \ldots$$

Dann: $e^{iz} = \cos(z) + i\sin(z)$

Speziell: $e^{x+iy} = e^x(\cos(y) + i\sin(y))$



Folgerung: $\sin(z) = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})$

$$\cos(z) = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz})$$

„komplexer ln muß vermieden werden":

$s \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$

- $\displaystyle\int \frac{1}{x-s} + \frac{1}{x-\bar{s}}\, dx$

$$= \ln\Big(\underbrace{(x-\mathrm{Re}(s))^2 + \mathrm{Im}(s)^2}_{\in \mathbb{R}}\Big) + \text{konst}$$

- $\displaystyle\int \frac{1}{x-s} - \frac{1}{x-\bar{s}}\, dx$

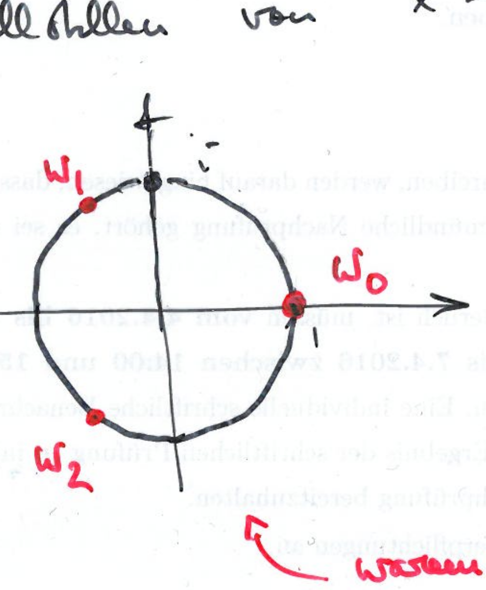
$$= 2i \arctan\left(\frac{x-\mathrm{Re}(s)}{\mathrm{Im}(s)}\right) + \text{konst}$$

Bsp: $\displaystyle\int \frac{1}{x^3-1}\, dx$

Nullstellen von x^3-1: $w_0 = 1$,

$w_1 = -\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\sqrt{3}$,

$w_2 = -\frac{1}{2} - \frac{i}{2}\sqrt{3}$



warum alle auf Kreis?

Gesucht: Funktion $y(x)$

mit: • $y'(x) = f(x) \cdot g(y)$ Differentialgleichung

• $y(x_0) = y_0$ Anfangswertbedingung

Vorgehen:

$$F(x) := \int_{x_0}^{x} f(t)\, dt$$

$$H(w) := \int_{y_0}^{w} \frac{1}{g(t)}\, dt \quad \text{invertierbar}$$

$$\Rightarrow \boxed{y(x) := H^{-1}(F(x))}$$

ist die Lösung des Problems

Homogener Fall:

DGL

$$\boxed{y''(x) + 2a\,y'(x) + b\,y(x) = 0}$$

mit $y(x_0) = y_0$ und $y'(x_0) = y'_0$.

Anfangswertbedingungen

Fall $a^2 > b$. Sei $v := \sqrt{a^2-b}$.

Für alle $r, s \in \mathbb{R}$ ist

$$y(x) = e^{-ax}\left(r e^{vx} + s e^{-vx}\right)$$

eine Lösung der DGL.

Fall $a^2 < b$. Sei $w := \sqrt{b-a^2}$

Für alle $r, s \in \mathbb{R}$ ist

$$y(x) = e^{-ax}\left(r \sin(wx) + s \cos(wx)\right)$$

eine Lösung der DGL.

Fall $a^2 = b$.

Für alle $r, s \in \mathbb{R}$ ist

$$y(x) = e^{-ax}(r + sx)$$

eine Lösung der DGL.

Bestimmung der Konstanten r und s durch Einsetzen der Anfangswertbedingungen.

$$y''(x) + 2a\,y'(x) + b\,y(x) = c(x) \quad : \text{DGL}$$

$\hat{u}(x)$: Lösung von $y'' + ay + by = 0$,
mit $\hat{u}(x) \neq 0$ überall

$$G(x) := \int_{x_0}^{x} c(t)\, \hat{u}(t)\, e^{2at}\, dt$$

aufwendig!

$$H(x) := \int_{x_0}^{x} \hat{u}(t)^{-2}\, e^{-2at}\, G(t)\, dt$$

Fall: $a^2 > b$. Sei $v := \sqrt{a^2 - b}$. Für $r, s \in \mathbb{R}$ löst

$$y(x) = e^{-ax}\left(r e^{vx} + s e^{-vx}\right) + \hat{u}(x)\, H(x)$$

die DGL

Fall: $a^2 < b$. Sei $w := \sqrt{b - a^2}$. Für $r, s \in \mathbb{R}$ löst

$$y(x) = e^{-ax}\left(r \sin(wx) + s \cos(wx)\right) + \hat{u}(x)\, H(x)$$

die DGL

Fall: $a^2 = b$. Für $r, s \in \mathbb{R}$ löst

$$y(x) = e^{-ax}\left(r + sx\right) + \hat{u}(x)\, H(x)$$

die DGL

Abkürzung im Spezialfall $c(x) = \mu e^{\lambda x}$:

Falls $\lambda^2 + 2a\lambda + b \neq 0$, dann suche man

Hauptfall)

$$\hat{y}(x) = \nu e^{\lambda x}$$

derart, daß

$$\hat{y}''(x) + 2a\,\hat{y}'(x) + b\,\hat{y}(x) = c(x)$$

ist.

Dann ersetze man oben $\hat{u}(x)\, H(x)$ durch $\hat{y}(x)$.

Beispiel: $y'' + 2y' + 3y = 2\cos(x)$: DGL

mit $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$

Aufteilen! $2\cos(x) = \underbrace{e^{ix}}_{1} + \underbrace{e^{-ix}}_{2}$

1. $y'' + 2y' + 3y = e^{ix}$

führt mit dem Ansatz $\hat{y}_1(x) = v e^{ix}$

auf $\hat{y}_1(x) = \frac{1-i}{4} e^{ix}$

2. $y'' + 2y' + 3y = e^{-ix}$

führt mit dem Ansatz $\hat{y}_2(x) = v e^{-ix}$

auf $\hat{y}_2(x) = \frac{1+i}{4} e^{-ix}$

Zusammensetzen! $\hat{y}(x) = \hat{y}_1(x) + \hat{y}_2(x)$

$$= \frac{1}{2}\cos(x) + \frac{1}{2}\sin(x)$$

Also löst für $r, s \in \mathbb{R}$

$$y(x) = e^{-x}\left(r \sin(\sqrt{2}\,x) + s\cos(\sqrt{2}\,x)\right) + \frac{1}{2}\cos(x) + \frac{1}{2}\sin(x)$$

bei Lösung von $y'' + 2y' + 3y = 0$ bereits ermittelt

die DGL.

Bestimmung von r und s: Einsetzen der Anfangswerte! ...