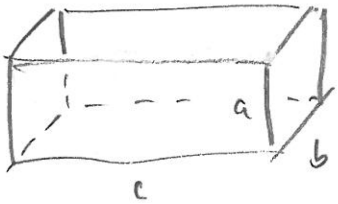
<u>Bsp</u> Kiste ohne Deckel
mit verstärkten Kanten

Volumen: $f(a,b,c) := abc = \text{Max}!$

wobei $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3_{>0}$



Oberfläche $= 49$: $g_1(a,b,c) := 2ab + 2ac + bc - 49 = 0$

Gesamtkantenlänge $= 56$: $g_2(a,b,c) := 4a + 4b + 4c - 56 = 0$

$$\nabla_f(a,b,c) = \begin{pmatrix} bc \\ ac \\ ab \end{pmatrix}$$

$$\nabla_{g_1}(a,b,c) = \begin{pmatrix} 2b+2c \\ 2a+c \\ 2a+b \end{pmatrix} \qquad \nabla_{g_2}(a,b,c) = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad N(a,b,c) = \left(\begin{array}{c|c} 2b+2c & 4 \\ \hline 2a+c & 4 \\ \hline 2a+b & 4 \end{array}\right)$$

Gleichungssystem für Flächeninhalt

$$\begin{cases} \nabla_f(a,b,c) = \rho_1 \nabla_{g_1}(a,b,c) + \rho_2 \nabla_{g_2}(a,b,c) \\ g_1(a,b,c) = 0 \\ g_2(a,b,c) = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} bc = \rho_1 (2b+2c) + 4\rho_2 & \mathrm{I} \\ ac = \rho_1 (2a+c) + 4\rho_2 & \mathrm{II} \\ ab = \rho_1 (2a+b) + 4\rho_2 & \mathrm{III} \\ 2ab + 2ac + bc = 49 & \mathrm{IV} \\ a+b+c = 14 & \mathrm{V} \end{cases}$$

Differenz $\mathrm{II} - \mathrm{III}$:

$$ac - ab = \rho_1 c - \rho_1 b$$

$$\iff (a-\rho_1)(c-b) = 0$$

ist versehentlich zu schwungvoll geraten

Fall 1: $c \neq b$ (und also $a = \rho_1$)

Fall 2: $c = b$

Fall 1: $c \neq b$ und also $\rho_1 = a$. Zu lösen:

$$\begin{cases} bc = a(2b+2c) + 4\rho_2 & \text{I} \\ \cancel{ac} = a(2a+\cancel{c}) + 4\rho_2 & \text{II} \quad (\Leftrightarrow \text{III}) \\ 2ab + 2ac + bc = 49 & \text{IV} \\ a+b+c = 14 & \text{V} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 49 - 2ab - 2ac = a(2b+2c) - 2a^2 \\ \rho_2 = -\dfrac{a^2}{2} \\ 2ab + 2ac + bc = 49 \\ b+c = 14-a \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 49 = 4a(14-a) - 2a^2 \\ \rho_2 = -\dfrac{a^2}{2} \\ 2a(14-a) + bc = 49 \\ b+c = 14-a \end{cases}$$

Die erste Gleichung gibt

$$6a^2 - 56a + 49 = 0,$$

weiterhin $\quad a = \dfrac{+56 \pm \sqrt{56^2 - 4 \cdot 6 \cdot 49}}{2 \cdot 6}$

$$= \frac{7}{12}\left(8 \pm \sqrt{8^2 - 4 \cdot 6}\right)$$

$$= \frac{7}{12}\left(8 \pm 2\sqrt{10}\right)$$

$$= \frac{7}{6}\left(4 \pm \sqrt{10}\right)$$

$$0 < bc = 49 - 2a(14-a)$$

schließt $a = \frac{7}{6}(4 + \sqrt{10}) \in [8, 10]$ aus,

da $\quad 49 - \underbrace{2a}_{\geq 8}\underbrace{(14-a)}_{\geq 4} < 0$

Also $\quad a = \frac{7}{6}(4 - \sqrt{10}) = \frac{14}{3} - \frac{7}{6}\sqrt{10} =: v$

Also $\quad c = 14 - v - b = \frac{28}{3} + \frac{7}{6}\sqrt{10} - b$

$$bc = 49 - 2v(14-v)$$

gibt

$$b \cdot \left(\frac{28}{3} + \frac{7}{6}\sqrt{10} - b\right) = 49 - 2\left(\frac{14}{3} - \frac{7}{6}\sqrt{10}\right)\left(\frac{28}{3} + \frac{7}{6}\sqrt{10}\right)$$

i.e. $\quad -b^2 + \left(\frac{28}{3} + \frac{7}{6}\sqrt{10}\right)b + \left(-\frac{98}{9} - \frac{98}{9}\sqrt{10}\right) = 0$

was auf

$$b = \frac{7}{12}\sqrt{10} + \frac{14}{3} - \frac{7}{12}\sqrt{106 - 16\sqrt{10}} =: u_-$$

und

$$c = \frac{7}{12}\sqrt{10} + \frac{14}{3} + \frac{7}{12}\sqrt{106 - 16\sqrt{10}} =: u_+$$

führt, oder auf

$$b = u_+ \quad \text{und} \quad c = u_- .$$

$\Rightarrow$ Flachstellen

$$(v, u_-, u_+) \quad \text{und} \quad (v, u_+, u_-),$$

beide mit $\rho_1 = a = v$, $\rho_2 = \frac{1}{4}\left(bc - \rho_1(2b+2c)\right) = -\frac{637}{36} + \frac{49}{9}\sqrt{10} =: w$

<u>Fall 2</u>: $c = b$. Zu lösen:

$$\begin{cases} b^2 = 4b\rho_1 + 4\rho_2 & \mathrm{I} \\ ab = \rho_1(2a+b) + 4\rho_2 & \mathrm{III} \quad (\Leftrightarrow \mathrm{II}) \\ 4ab + b^2 = 49 & \mathrm{IV} \\ a + 2b = 14 & \mathrm{V} \end{cases}$$

$\boxed{V}$: $a = 14 - 2b$

in $\underline{IV}$: $4(14-2b)b + b^2 = 49$

$$-7b^2 + 56b - 49 = 0$$

$$b^2 - 8b + 7 = 0$$

$$\Rightarrow b = \frac{8 \pm \sqrt{8^2 - 4 \cdot 7}}{2}$$

$\Rightarrow$ $b = 7$ oder $b = 1$

$b = 7 \Rightarrow a = 14 - 2b = 0$,

was nicht gilt.

Also $b = 1$, $c = b = 1$,

$a = 14 - 2b = 12$

$\Rightarrow$ Flachstelle $(12, 1, 1)$

mit Lagrangemultiplikatoren:

$\underline{I}$: $1 = 4\rho_1 + 4\rho_2$

$\underline{II}$: $12 = 25\rho_1 + 4\rho_2$

Differenz : $11 = 21\rho_1 \Rightarrow \rho_1 = \frac{11}{21}$,

$$\rho_2 = \frac{1}{4} - \rho_1 = -\frac{23}{21}$$

Diskussion der Flachstellen:

Wir haben die Flachstellen

$[(v, u_-, u_+), (v, u_+, u_-)], (12, 1, 1)$

$\rho_1 = v$, $\rho_2 = w$ $\qquad$ $\rho_1 = v$, $\rho_2 = w$ $\qquad$ $\rho_1 = \frac{11}{21}$, $\rho_2 = -\frac{23}{21}$

Lagrange - Multiplikatoren

Es ist allgemein $F = f - \rho_1 g_1 - \rho_2 g_2$,

also $\nabla_F(a,b,c) = \nabla_{f - \rho_1 g_1 - \rho_2 g_2}(a,b,c)$

$$= \begin{pmatrix} bc - \rho_1(2b+2c) - 4\rho_2 \\ ac - \rho_1(2a+c) - 4\rho_2 \\ ab - \rho_1(2a+b) - 4\rho_2 \end{pmatrix}$$

$$H_F(a,b,c) = \left(\begin{array}{c|c|c} 0 & c-2\rho_1 & b-2\rho_1 \\ \hline c-2\rho_1 & 0 & a-\rho_1 \\ \hline b-2\rho_1 & a-\rho_1 & 0 \end{array}\right)$$

• (v, u_-, u_+) hat $N(v,u_-,u_+) = \begin{pmatrix} 2u_- + 2u_+ & 4 \\ 2v + u_+ & 4 \\ 2v + u_- & 4 \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2u_- + 2u_+ & 2v+u_+ & 2v+u_- & 0 \\ 4 & 4 & 4 & 0 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2v-u_+-2u_- & 2v-2u_+-u_- & 0 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 - \frac{2v-2u_+-u_-}{2v-u_+-2u_-} & 0 \\ 0 & 1 & \underbrace{\frac{2v-2u_+-u_-}{2v-u_+-2u_-}}_{=:t} & 0 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow u = \begin{pmatrix} t-1 \\ -t \\ 1 \end{pmatrix}$$

also $t = \dfrac{8+7\sqrt{10}+\sqrt{106-16\sqrt{10}}}{8+7\sqrt{10}-\sqrt{106-16\sqrt{10}}}$

$$\rightsquigarrow u^t H_F(v,u_-,u_+)\, u = \underbrace{\left(\frac{(-5936+896\sqrt{10})\sqrt{10}}{(8+7\sqrt{10}-\sqrt{106-16\sqrt{10}})^2}\right)}_{\approx -19{,}05} < 0$$

Also ist (v, u_-, u_+) ein lokales Maximum von f unter Nb $(g_1, g_2) = 0$.

- (v, u_+, u_-) hat $N(v, u_+, u_-) = \begin{pmatrix} 2u_+ + 2u_- & 4 \\ 2v + u_- & 4 \\ 2v + u_+ & 4 \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2u_+ + 2u_- & 2v + u_+ & 2v + u_- & 0 \\ 4 & 4 & 4 & 0 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2v - u_- - 2u_+ & 2v - 2u_- - u_+ & 0 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 - t^{-1} & 0 \\ 0 & 1 & \underbrace{\frac{2v - 2u_- - u_+}{2v - u_- - 2u_+}}_{= t^{-1}} & 0 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow u = \begin{pmatrix} t^{-1} - 1 \\ -t^{-1} \\ 1 \end{pmatrix}$$

nochmal: (v, u_-, u_+) und (v, u_+, u_-) sind verschiedlich zu schwierig gewesen

$$\rightsquigarrow u^t H_f(v, u_+, u_-)\, u = \Bigg(\underbrace{\frac{(-5936 + 896\sqrt{10})\sqrt{10}}{\left(8 + 7\sqrt{10} + \sqrt{106 - 16\sqrt{10}}\right)^2}}_{\approx -5{,}75 \, < \, 0} \Bigg)$$

Also ist (v, u_+, u_-) ein lokales Maximum von f unter Nb $(g_1, g_2) = 0$

• $(12,1,1)$ liefert $N(12,1,1) = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 25 & 4 \\ 25 & 4 \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 25 & 25 & 0 \\ 4 & 4 & 4 & 0 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 21 & 21 & 0 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\sim u = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$H_F(12,1,1) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{21} & -\frac{1}{21} \\ -\frac{1}{21} & 0 & 12-\frac{11}{21} \\ -\frac{1}{21} & 12-\frac{11}{21} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sim u^t H_F(12,1,1)\, u = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 12-\frac{11}{21} \\ -\left(12-\frac{11}{21}\right) \end{pmatrix}$$

$$= \left(\underbrace{-2\left(12-\frac{11}{21}\right)}_{<0} \right)$$

$\sim (12,1,1)$ ist ein lokales Maximum von f unter NB $(g_1, g_2) = 0$