Topologie

Matthias Künzer

Universität Koblenz-Landau

20. April 2010

Inhalt

Verzeichnis der Sätze

Vorwort

Topologie ist die Lehre von Räumen und stetigen, also "sprungfreien" Abbildungen zwischen diesen. Wir werden uns die formalen Grundlagen erarbeiten.

Wir folgen in manchem der Vorlesung *Topologie* von Gerd Blind, gehalten in Stuttgart im Wintersemester 1993/94 [**1**].

Auf Übungen und Lösungen wird im Skript manchmal Bezug genommen, sie sind daher als Bestandteil des Skripts anzusehen.

Vorausgesetzt werden die Begriffe und Methoden der elementaren Mengentheorie, wobei vieles davon wiederholt wird. In den Spezialfällen der normierten und der euklidschen Räume findet der Begriff des Vektorraums über $\mathbf{R}$ aus der Linearen Algebra Verwendung. In Beispielen und Aufgaben werden auch Kenntnisse der Analysis gebraucht, wie etwa der Begriff des Integrals oder die Funktion $\sin x$. Wir werden die Eigenschaft der reellen Zahlen benötigen, daß darin jede nach oben beschränkte nichtleere Teilmenge ein Supremum besitzt.

Für Hinweise auf Fehler und Unklarheiten bin ich dankbar.

Koblenz, den 08.04.2009

Matthias Künzer

Konventionen.

- Ist $X \xrightarrow{f} Y$ eine Abbildung von Mengen, und sind $X' \subseteq X$ und $Y' \subseteq Y$ derart, daß $f(X') \subseteq Y'$, dann schreiben wir $f|_{X'}^{Y'} : X' \longrightarrow Y'$ für die im Urbild- und Bildbereich eingeschränkte Abbildung, die ein $x' \in X'$ nach $f(x') \in Y'$ schickt. Falls $Y' = Y$, dann schreiben wir auch $f|_{X'} := f|_{X'}^{Y}$. Falls $X' = X$, dann schreiben wir auch $f|^{Y'} = f|_X^{Y'}$.
- Seien X und Y Mengen. Wir schreiben $\mathrm{Abb}(X,Y) = \{f : X \longrightarrow Y\}$ für die Menge der Abbildungen von X nach Y.
- Sei X eine Menge. Wir schreiben $X \xrightarrow{\mathrm{id}_X} X$, $x \longmapsto x$ für die *identische* Abbildung, und kurz auch $\mathrm{id} = \mathrm{id}_X$.
- Ist $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ eine endliche, und wie angegeben durchnumerierte Menge, und ist $X \xrightarrow{f} Y$ eine Abbildung, so notieren wir auch

$$f = \left(\begin{smallmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ f(x_1) & f(x_2) & \cdots & f(x_n) \end{smallmatrix}\right) .$$

- Es stehe "für $x \in X$" auch kurz statt "für alle $x \in X$". Dagegen wird "für ein $x \in X$" nicht abgekürzt.
- Die disjunkte Vereinigung von Mengen X und Y werde $X \sqcup Y$ geschrieben.
- Gelegentlich wird eine injektive Abbildung $X \longrightarrow Y$ auch $X \hookrightarrow Y$ notiert.
- Eine *Indexmenge* ist schlicht eine Menge, endlich oder unendlich.
- Ein aus einem Element bestehendes Tupel wird zuweilen mit diesem Element identifiziert.
- Seien a, $b \in \mathbf{R}$. Wir schreiben

$$\begin{array}{rcl} [a,b] & := & \{x \in \mathbf{R} \;:\; a \leqslant x \leqslant b\} \\ (a,b] & := & \{x \in \mathbf{R} \;:\; a < x \leqslant b\} \\ [a,b) & := & \{x \in \mathbf{R} \;:\; a \leqslant x < b\} \\ (a,b) & := & \{x \in \mathbf{R} \;:\; a < x < b\} \end{array}$$

- Wir schreiben $\mathbf{R}_{>0} := \{x \in \mathbf{R} \;:\; x > 0\}$. Etc.
- Ist A eine Matrix, so ist A^{t} ihre Transponierte.
- Sei $n \geqslant 0$. Elemente in $\mathbf{R}^n$ sind Spaltenvektoren, i.e. Matrizen mit nur einer Spalte. Schreibe $x = (x_i)_i \in \mathbf{R}^n$.
- Für $x \in \mathbf{R}$ schreiben wir

$$\lceil x \rceil \;:=\; \min\{z \in \mathbf{Z} \;:\; z \geqslant x\}$$

Kapitel 1

Topologische Räume

1.1 Grundbegriffe

1.1.1 Potenzmenge

Sei X eine Menge. Wir erinnern daran, daß die *Potenzmenge* $\operatorname{Pot}(X) := \{Y : Y \subseteq X\}$ die Menge aller Teilmengen von X ist.

Beispiel.

(1) Es besteht $\operatorname{Pot}(\{1,2\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$ aus $2^2 = 4$ Elementen.

(2) Es besteht $\operatorname{Pot}(\emptyset) = \{\emptyset\}$ aus einem Element.

1.1.2 Definition eines topologischen Raums

Definition. Ein *topologischer Raum* ist ein Paar (X, T) aus einer Menge X und einer Teilmenge $T \subseteq \operatorname{Pot}(X)$ derart, daß die Axiome (Top 1, 2, 3) gelten.

(Top 1) Es ist $\emptyset \in T$. Es ist $X \in T$.

(Top 2) Sei I eine Indexmenge. Seien $U_i \in T$ für $i \in I$ gegeben. Dann ist auch

$$\bigcup_{i \in I} U_i \;=\; \{x \in X \;:\; \text{es gibt ein } i \in I \text{ mit } x \in U_i\} \;\in\; T\,.$$

(Top 3) Seien $U,\, V \;\in\; T$. Dann ist auch

$$U \cap V \;\in\; T$$

Es heißt T auch *Topologie* auf der Menge X.

Unter Mißbrauch der Bezeichnung schreibt man oft kurz

$$X = (X, T) .$$

Dies ist mit Vorsicht zu genießen, da auf derselben Menge X zuweilen mehrere Topologien T, T', etc. zu betrachten sind. Diesenfalls sind (X,T), (X,T'), etc. verschiedene topologische Räume. Ein einfaches Beispiel hierfür findet sich unten in §1.2.3.

1.1.3 Offen und abgeschlossen

Sei $X = (X,T)$ ein topologischer Raum.

Definition.

(1) Eine Teilmenge U von X, welche in T liegt, wird auch als *offene* Teilmenge bezeichnet. Diesenfalls schreiben wir auch $U \overset{\text{off.}}{\subseteq} X$.

(2) Eine Teilmenge A von X mit $X \smallsetminus A \in T$ wird auch als *abgeschlossene* Teilmenge bezeichnet. Diesenfalls schreiben wir auch $A \overset{\text{abg.}}{\subseteq} X$.

Es ist also $Y \overset{\text{abg.}}{\subseteq} X \iff X \smallsetminus Y \overset{\text{off.}}{\subseteq} X$.

Beispiel. Es ist $X \overset{\text{off.}}{\subseteq} X$ und $X \overset{\text{abg.}}{\subseteq} X$. Ersteres, da $X \in T$ nach (Top 1), zweiteres, da $X \smallsetminus X = \emptyset \in T$ nach (Top 1).

In Worten besagen die Axiome aus §1.1.2 nun folgendes.

(Top 1) Die leere Teilmenge und die volle Teilmenge sind offen.

(Top 2) Beliebige Vereinigungen offener Teilmengen sind offen.

(Top 3) Der Schnitt zweier offener Teilmengen ist offen.

Bemerkung. *Sei $Y \subseteq X$. Es gebe für alle $y \in Y$ eine offene Teilmenge $U \overset{\text{off.}}{\subseteq} X$ mit $y \in U \subseteq Y$. Dann ist $Y \overset{\text{off.}}{\subseteq} X$.*

Beweis. Wähle für $y \in Y$ ein $U_y \overset{\text{off.}}{\subseteq} X$ mit $y \in U_y \subseteq Y$.

Wir *behaupten,* daß $Y \overset{!}{=} \bigcup_{y \in Y} U_y$.

Zu $\overset{!}{\subseteq}$. Sei $y' \in Y$. Dann ist $y' \in U_{y'} \subseteq \bigcup_{y \in Y} U_y$.

Zu $\overset{!}{\supseteq}$. Es ist $Y \supseteq U_y$ für alle $y \in Y$. Also ist $Y \supseteq \bigcup_{y \in Y} U_y$.

Dies zeigt die *Behauptung.*

Da $U_y \overset{\text{off.}}{\subseteq} Y$ für $y \in Y$, folgt aus dieser Behauptung mit (Top 2), daß $Y = \bigcup_{y \in Y} U_y \overset{\text{off.}}{\subseteq} X$. □

1.2 Erste Beispiele

1.2.1 Die reelle Gerade

Folgendes Beispiel ist eine Blaupause für das recht allgemeine Verfahren, auf den unten in §1.3.1 eingeführten prämetrischen Räumen eine Topologie zu definieren.

Betrachte die Menge $\mathbf{R}$ der reellen Zahlen. Setze

$$T \ := \ \{U \subseteq \mathbf{R} \ : \ \text{für alle } x \in U \text{ gibt es ein } \varepsilon \in \mathbf{R}_{>0} \text{ mit } (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subseteq U\} \ .$$

Bemerkung. *Es ist* $(\mathbf{R}, T)$ *ein topologischer Raum.*

Im weiteren sei $\mathbf{R}$ mit dieser Topologie ausgestattet, so nichts anderes gesagt wird.

Beweis.

Zu (Top 1). Es ist $\emptyset \in T$, da es kein Element gibt, für welches ein ε gefunden werden muß.

Es ist $\mathbf{R} \in T$, da für jedes $x \in \mathbf{R}$ auch $(x-1, x+1) \subseteq \mathbf{R}$.

Zu (Top 2). Sei I eine Indexmenge. Seien $U_i \in T$ für $i \in I$. Wir haben zu zeigen, daß $\bigcup_{i\in I} U_i \in T$. Sei $x \in \bigcup_{i\in I} U_i$. Dann gibt es ein $j \in I$ mit $x \in U_j$. Da $U_j \in T$, gibt es ein $\varepsilon \in \mathbf{R}_{>0}$ mit $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subseteq U_j$. Insbesondere ist auch

$$(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \ \subseteq \ U_j \ \subseteq \ \bigcup_{i\in I} U_i \ .$$

Zu (Top 3). Seien $U,\, V \ \in \ T$. Wir haben zu zeigen, daß $U \cap V \ \in \ T$. Sei $x \in U \cap V$. Da $U \in T$, gibt es ein $\varepsilon' \in \mathbf{R}_{>0}$ mit $(x-\varepsilon', x+\varepsilon') \subseteq U$. Da $V \in T$, gibt es ein $\varepsilon'' \in \mathbf{R}_{>0}$ mit $(x-\varepsilon'', x+\varepsilon'') \subseteq V$. Setze $\varepsilon := \min\{\varepsilon', \varepsilon''\} \in \mathbf{R}_{>0}$. Es wird

$$(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \ = \ (x-\varepsilon', x+\varepsilon') \cap (x-\varepsilon'', x+\varepsilon'') \ \subseteq \ U \cap V \ .$$

$\square$

Bemerkung. *Sei* $s \in \mathbf{R}$. *Seien* $a,\, b \ \in \ \mathbf{R}$ *mit* $a \leqslant b$.

(1) *Es ist* $\mathbf{R}_{<s} \overset{\text{off.}}{\subseteq} \mathbf{R}$ *und* $\mathbf{R}_{\geqslant s} \overset{\text{abg.}}{\subseteq} \mathbf{R}$.

(2) *Es ist* $\mathbf{R}_{>s} \overset{\text{off.}}{\subseteq} \mathbf{R}$ *und* $\mathbf{R}_{\leqslant s} \overset{\text{abg.}}{\subseteq} \mathbf{R}$.

(3) *Es ist* $(a,b) \overset{\text{off.}}{\subseteq} \mathbf{R}$.

(4) *Es ist* $[a,b] \overset{\text{abg.}}{\subseteq} \mathbf{R}$.

Beweis.

Zu (1). Zu zeigen ist nur, daß $\mathbf{R}_{<s} \overset{\text{off.!}}{\subseteq} \mathbf{R}$, denn daraus folgt, daß $\mathbf{R}_{\geqslant s} = \mathbf{R} \smallsetminus \mathbf{R}_{<s} \overset{\text{abg.}}{\subseteq} \mathbf{R}$.

Sei $x \in \mathbf{R}_{<s}$. Sei $\varepsilon := s - x$. Es ist $\varepsilon \in \mathbf{R}_{>0}$. Wir zeigen, daß $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \overset{!}{\subseteq} \mathbf{R}_{<s}$. Sei $y \in (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$. Es folgt $\; y \; < \; x+\varepsilon \; = \; x+(s-x) \; = \; s\;$, i.e. $y \in \mathbf{R}_{<s}$.

Zu (2). Zu zeigen ist nur, daß $\mathbf{R}_{>s} \overset{\text{off.!}}{\subseteq} \mathbf{R}$, denn daraus folgt, daß $\mathbf{R}_{\leqslant s} = \mathbf{R} \smallsetminus \mathbf{R}_{>s} \overset{\text{abg.}}{\subseteq} \mathbf{R}$.

Sei $x \in \mathbf{R}_{>s}$. Sei $\varepsilon := x - s$. Es ist $\varepsilon \in \mathbf{R}_{>0}$. Wir zeigen, daß $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \overset{!}{\subseteq} \mathbf{R}_{>s}$. Sei $y \in (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$. Es folgt $\; y \; > \; x-\varepsilon \; = \; x-(x-s) \; = \; s\;$, i.e. $y \in \mathbf{R}_{>s}$.

Zu (3). Mit $(1,2)$ und (Top 3) ist $(a,b) = \mathbf{R}_{>a} \cap \mathbf{R}_{<b} \overset{\text{off.}}{\subseteq} \mathbf{R}$.

Zu (4). Mit $(1,2)$ und (Top 2) ist $[a,b] = \mathbf{R} \smallsetminus (\mathbf{R}_{<a} \cup \mathbf{R}_{>b}) \overset{\text{abg.}}{\subseteq} \mathbf{R}$. ▫

1.2.2 Spurtopologie auf Teilmengen

Diese Konstruktion wird uns für einen gegebenen topologischen Raum eine Vielzahl weiterer Beispiele liefern – jede Teilmenge wird wieder ein topologischer Raum. So z.B. ist jede Teilmenge des topologischen Raums $\mathbf{R}$ aus §1.2.1 abermals ein topologischer Raum, mit einer passenden Topologie.

Sei (X, T) ein topologischer Raum.

Sei $Y \subseteq X$ eine Teilmenge.

Definition. Sei die *Spurtopologie* auf Y definiert durch

$$T' \; := \; \{U \cap Y \; : \; U \in T\}\, .$$

Weitgehend in Worten, eine Teilmenge V von Y werde für offen erklärt, falls es eine offene Teilmenge U von X gibt mit $V = U \cap Y$.

Bemerkung. *Es ist* (Y, T') *ein topologischer Raum.*

Wenn nicht anders vereinbart, trägt eine Teilmenge eines topologischen Raumes die Spurtopologie.

Beweis.

Zu (Top 1). Es ist $\emptyset = \emptyset \cap Y \in T'$. Es ist $Y = X \cap Y \in T'$.

Zu (Top 2). Sei I eine Indexmenge. Seien $V_i \in T'$ für $i \in I$ gegeben. Wir haben zu zeigen, daß $\bigcup_{i\in I} V_i \in T'$. Sei $V_i = U_i \cap Y$ mit $U_i \in T$. Dann wird

$$\textstyle\bigcup_{i\in I} V_i \; = \; \bigcup_{i\in I}(U_i \cap Y) \; = \; (\underbrace{\bigcup_{i\in I} U_i}_{\in T}) \cap Y \; \in \; T'\, .$$

Zu (Top 3). Seien $V_1,\, V_2 \, \in \, T'$. Wir haben zu zeigen, daß $V_1 \cap V_2 \in T'$. Seien $V_1 = U_1 \cap Y$ und $V_2 = U_2 \cap Y$ mit $U_1,\, U_2 \in T$. Dann wird

$$V_1 \cap V_2 \; = \; (U_1 \cap Y) \cap (U_2 \cap Y) \; = \; (\underbrace{U_1 \cap U_2}_{\in T}) \cap Y \; \in \; T'\, .$$

∎

Beispiel. Sei $X = \mathbf{R}$ mit der Topologie aus §1.2.1. Sei $Y = [0,1]$.

(1) Es ist $(1/2, 1] = \mathbf{R}_{>1/2} \cap [0,1] \overset{\text{off.}}{\subseteq} [0,1]$, da $\mathbf{R}_{>1/2} \overset{\text{off.}}{\subseteq} \mathbf{R}$.

(2) Es ist $(1/2, 1) = (1/2, 1) \cap [0,1] \overset{\text{off.}}{\subseteq} [0,1]$, da $(1/2, 1) \overset{\text{off.}}{\subseteq} \mathbf{R}$.

1.2.3 Verklumpt, diskret

Sei X eine Menge.

Es gibt eine minimale und eine maximale Topologie auf X.

1.2.3.1 Die verklumpte Topologie

Definition. Sei $T_{X,\,\text{verklumpt}} = \{\emptyset,\ X\}$ die *verklumpte Topologie* auf X.

Bemerkung. *Es ist* $(X, T_{X,\,\text{verklumpt}})$ *ein topologischer Raum.*

Beweis. Schreibe $T := T_{X,\,\text{verklumpt}}$.

Zu (Top 1). In der Tat sind $\emptyset \in T$ und $X \in T$.

Zu (Top 2). Sei I eine Indexmenge. Seien $U_i \in T$ für $i \in I$. Gibt es ein $i \in I$ mit $U_i = X$, so ist $\bigcup_{i \in I} U_i = X$, ansonsten ist $\bigcup_{i \in I} U_i = \emptyset$. In beiden Fällen ist $\bigcup_{i \in I} U_i \in T$.

Zu (Top 3). Seien $U,\ V \in T$. Ist $U = \emptyset$ oder $V = \emptyset$, so ist $U \cap V = \emptyset$. Ansonsten ist $U \cap V = X$. In beiden Fällen ist $U \cap V \in T$. ∎

1.2.3.2 Die diskrete Topologie

Definition. Sei $T_{X,\,\text{diskret}} = \mathrm{Pot}(X)$ die *diskrete Topologie* auf X.

Bemerkung. *Es ist* $(X, T_{X,\,\text{diskret}})$ *ein topologischer Raum.*

Beweis. Es sind (Top 1, 2, 3) deswegen erfüllt, da in ihnen verlangt wird, daß gewisse Teilmengen von X offen zu sein haben, und im vorliegenden Fall alle Teilmengen von X für offen erklärt wurden. ∎

1.2.4 Kein Element, ein Element

1.2.4.1 Kein Element

Es ist $(\emptyset, \{\emptyset\})$ ein topologischer Raum. Dies ist die einzige Topologie auf $\emptyset$. Beachte, daß $\{\emptyset\} = T_{\emptyset,\,\text{verklumpt}} = T_{\emptyset,\,\text{diskret}}$.

1.2.4.2 Ein Element

Sei $X = \{x\}$ eine einelementige Menge. Es ist $(\{x\}, \{\emptyset, \{x\}\})$ ein topologischer Raum. Dies ist die einzige Topologie auf $\{x\}$. Beachte, daß $\{\emptyset, \{x\}\} = T_{\{x\},\,\text{verklumpt}} = T_{\{x\},\,\text{diskret}}$.

Den zweielementigen Sierpinski-Raum findet man in Aufgabe 2.

1.3 Metrische, normierte und euklidsche Räume

Wir betrachten Spezialfälle topologischer Räume, in absteigender Allgemeinheit.

1.3.1 Prämetrische Räume

Definition. Ein *prämetrischer Raum* ist ein Paar (X, d) aus einer Menge X und einer Abbildung $X \times X \xrightarrow{d} \mathbf{R}_{\geqslant 0}$.

Die Abbildung d heißt *Prämetrik* auf X. Für $x,\, y \,\in\, X$ heißt $d(x, y)$ der *Abstand* von x und y (engl. **d**istance).

Unter Mißbrauch der Bezeichnung schreibt man oft kurz $X = (X, d)$.

Beispiel.

(1) Es ist $\mathbf{R}$, zusammen mit

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{R} & \times & \mathbf{R} & \xrightarrow{d} & \mathbf{R}_{\geqslant 0} \\ (x & , & y) & \longmapsto & |x-y| \ , \end{array}$$

ein prämetrischer Raum.

(2) Es ist $\mathbf{R}$, zusammen mit

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{R} & \times & \mathbf{R} & \xrightarrow{d'} & \mathbf{R}_{\geqslant 0} \\ (x & , & y) & \longmapsto & 0 \ , \end{array}$$

ein prämetrischer Raum.

Definition. Für $x \in X$ und $\varepsilon \in \mathbf{R}_{>0}$ sei

$$\mathrm{B}_\varepsilon(x) \;=\; \mathrm{B}_\varepsilon^{(X,d)}(x) \;:=\; \{y \in X \;:\; d(y, x) < \varepsilon\}$$

der *Ball* um x mit *Radius* ε.

Beispiel.

(1) Für $x \in \mathbf{R}$ und $\varepsilon \in \mathbf{R}_{>0}$ ist $\mathrm{B}_\varepsilon^{(\mathbf{R},d)}(x) = (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$.

(2) Für $x \in \mathbf{R}$ und $\varepsilon \in \mathbf{R}_{>0}$ ist $\mathrm{B}_\varepsilon^{(\mathbf{R},d')}(x) = \mathbf{R}$.

Wir werden nun das Konstruktionsprinzip einer Topologie auf der reellen Geraden in §1.2.1 auf beliebige prämetrische Räume verallgemeinern. Auch der dortige Beweis läßt sich übertragen.

Sei (X,d) ein prämetrischer Raum. Setze

$$T^{(X,d)} \;:=\; \{U \subseteq X \;:\; \text{für alle } x \in U \text{ gibt es ein } \varepsilon \in \mathbf{R}_{>0} \text{ mit } \mathrm{B}_\varepsilon(x) \subseteq U\}\;.$$

Lemma. *Es ist* $(X, T^{(X,d)})$ *ein topologischer Raum.*

Ein prämetrischer Raum wird mit dieser Topologie ausgestattet, solange nichts anderes gesagt wird.

Beweis. Schreibe $T := T^{(X,d)}$.

Zu (Top 1). Es ist $\emptyset \in T$, da es kein Element gibt, für welches ein ε gefunden werden muß.

Es ist $X \in T$, da für jedes $x \in X$ auch $\mathrm{B}_1(x) \subseteq X$.

Zu (Top 2). Sei I eine Indexmenge. Seien $U_i \in T$ für $i \in I$. Wir haben zu zeigen, daß $\bigcup_{i\in I} U_i \in T$. Sei $x \in \bigcup_{i\in I} U_i$. Dann gibt es ein $j \in I$ mit $x \in U_j$. Da $U_j \in T$, gibt es ein $\varepsilon \in \mathbf{R}_{>0}$ mit $\mathrm{B}_\varepsilon(x) \subseteq U_j$. Insbesondere ist auch

$$\mathrm{B}_\varepsilon(x) \;\subseteq\; U_j \;\subseteq\; \textstyle\bigcup_{i\in I} U_i\;.$$

Zu (Top 3). Seien $U, V \in T$. Wir haben zu zeigen, daß $U \cap V \in T$. Sei $x \in U \cap V$. Da $U \in T$, gibt es ein $\varepsilon' \in \mathbf{R}_{>0}$ mit $\mathrm{B}_{\varepsilon'}(x) \subseteq U$. Da $V \in T$, gibt es ein $\varepsilon'' \in \mathbf{R}_{>0}$ mit $\mathrm{B}_{\varepsilon''}(x) \subseteq V$. Setze $\varepsilon := \min\{\varepsilon', \varepsilon''\} \in \mathbf{R}_{>0}$. Es wird

$$\begin{array}{rcl}
\mathrm{B}_\varepsilon(x) & = & \{y \in X \;:\; d(y,x) < \varepsilon\} \\
& = & \{y \in X \;:\; d(y,x) < \min\{\varepsilon', \varepsilon''\}\} \\
& = & \{y \in X \;:\; d(y,x) < \varepsilon' \text{ und } d(y,x) < \varepsilon''\} \\
& = & \{y \in X \;:\; d(y,x) < \varepsilon'\} \;\cap\; \{y \in X \;:\; d(y,x) < \varepsilon''\} \\
& = & \mathrm{B}_{\varepsilon'}(x) \cap \mathrm{B}_{\varepsilon''}(x) \\
& \subseteq & U \cap V\;.
\end{array}$$

□

Beispiel.

(1) Es ist $T^{(\mathbf{R},d)}$ die in §1.2.1 definierte Topologie auf $\mathbf{R}$.

(2) Es ist $T^{(\mathbf{R},d')} = T_{\mathbf{R},\,\text{verklumpt}}$. Denn ist hierfür eine offene Teilmenge von $\mathbf{R}$ nicht leer, so enthält sie für eines ihrer Elemente x und ein $\varepsilon \in \mathbf{R}_{>0}$ die Teilmenge $\mathrm{B}_\varepsilon^{(\mathbf{R},d')}(x) = \mathbf{R}$.

1.3.2 Metrische Räume

Definition. Ein *metrischer Raum* ist ein Paar (X, d) aus einer Menge X und einer Abbildung $X \times X \xrightarrow{d} \mathbf{R}_{\geqslant 0}$ – also ein prämetrischer Raum – derart, daß die Axiome (Met 1, 2, 3) gelten.

(Met 1) Für $x,\ y \in X$ ist $d(x,y) = 0$ genau dann, wenn $x = y$.

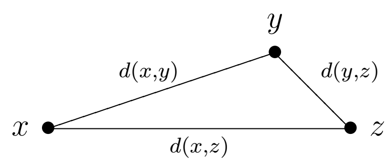
(Met 2) Für $x,\ y \in X$ ist $d(x,y) = d(y,x)$.

(Met 3) Für $x,\ y,\ z \in X$ ist $d(x,y) + d(y,z) \geqslant d(x,z)$.

Die Ungleichung

$$d(x,y) + d(y,z) \ \geqslant\ d(x,z)$$

aus (Met 3) heißt auch *Dreiecksungleichung.*



Die Abbildung d heißt auch *Metrik* auf X. Für $x,\ y \in X$ heißt $d(x,y)$ der *Abstand* von x und y.

Unter Mißbrauch der Bezeichnung schreibt man oft kurz $X = (X, d)$.

Beispiel. Wir beziehen uns auf das erste Beispiel in §1.3.1, was d und d' anbelangt.

(1) Es ist $(\mathbf{R}, d)$ ein metrischer Raum. In der Tat gelten (Met 1, 2) offenbar. Für die Dreiecksungleichung in (Met 3) zeigen wir, daß

$$(*) \qquad |a| + |b| \ \geqslant\ |a + b|$$

für $a,\ b \in \mathbf{R}$. Es herrscht Gleichheit, falls $a \geqslant 0$ und $b \geqslant 0$. Es herrscht Gleichheit, falls $a \leqslant 0$ und $b \leqslant 0$. Bleiben die Fälle ($a > 0$ und $b < 0$) und ($a < 0$ und $b > 0$). Dank Symmetrie genügt es, den Fall ($a < 0$ und $b > 0$) zu betrachten. Ist $a + b \geqslant 0$, so wird wegen $a < 0$

$$|a| + |b| \ =\ -a + b \ \geqslant\ a + b \ =\ |a + b|\ .$$

Ist $a + b < 0$, so wird wegen $b > 0$

$$|a| + |b| \ =\ -a + b \ \geqslant\ -a - b \ =\ |a + b|\ .$$

Für $x,\ y,\ z \in \mathbf{R}$ folgt nun die Dreiecksungleichung:

$$d(x,y) + d(y,z) \ =\ |x - y| + |y - z| \ \geqslant\ |(x - y) + (y - z)| \ =\ |x - z| \ =\ d(x,z)\ .$$

(2) Es ist $(\mathbf{R}, d')$ kein metrischer Raum, da (Met 1) nicht gilt.

Lemma. *Sei (X, d) ein metrischer Raum. Sei $x \in X$. Sei $\varepsilon \in \mathbf{R}_{>0}$. Der Ball* $\mathrm{B}_\varepsilon(x)$ *ist eine offene Teilmenge von X.*

Vgl. auch Bemerkung (3) in §1.2.1. Vgl. auch Aufgabe 8.

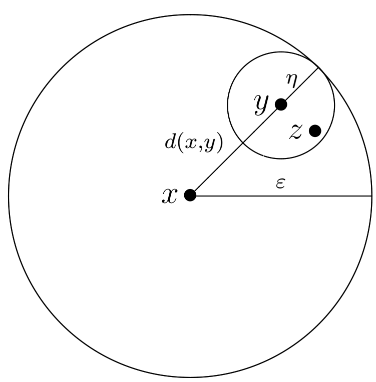
Beweis. Sei $y \in \mathrm{B}_\varepsilon(x)$, i.e. sei $d(y,x) < \varepsilon$. Setze $\eta := \varepsilon - d(y,x) \in \mathbf{R}_{>0}$. Es genügt zu zeigen, daß $\mathrm{B}_\eta(y) \overset{!}{\subseteq} \mathrm{B}_\varepsilon(x)$.

Sei also $z \in \mathrm{B}_\eta(y)$ gegeben, i.e. $d(z,y) < \eta$. Wir haben zu zeigen, daß $z \overset{!}{\in} \mathrm{B}_\varepsilon(x)$, i.e. daß $d(z,x) < \varepsilon$.

In der Tat wird mit der Dreiecksungleichung aus (Met 3) und mit der Symmetrie aus (Met 2)

$$d(x,z) \;\leqslant\; d(x,y) + d(y,z) \;<\; d(x,y) + \eta \;=\; d(x,y) + \varepsilon - d(y,x) \;=\; \varepsilon\,.$$

Skizze.



□

1.3.3 Normierte Räume

Definition. Ein *normierter Raum* ist ein Paar $(V, \|-\|)$ bestehend aus einem $\mathbf{R}$-Vektorraum V und einer Abbildung

$$\begin{array}{rcl} V & \xrightarrow{\|-\|} & \mathbf{R}_{\geqslant 0} \\ x & \longmapsto & \|x\| \end{array}$$

derart, daß die Axiome (Nor 1, 2, 3) gelten.

(Nor 1) Für $x \in V$ ist $\|x\| = 0$ genau dann, wenn $x = 0$.

(Nor 2) Für $x \in V$ und $\lambda \in \mathbf{R}$ ist $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$.

(Nor 3) Für $x,\, y \in V$ ist $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$.

Es heißt $\|x\|$ auch die *Norm* von $x \in V$.

Unter Mißbrauch der Bezeichnung schreibt man auch oft $V = (V, \|-\|)$.

Beispiel.

(1) Sei $V = \mathbf{R}$. Sei $\|x\| := |x|$ für $x \in \mathbf{R}$, d.h. $\|-\| = |-|$. Es ist $(\mathbf{R}, |-|)$ ein normierter Raum. In der Tat sind (Nor 1, 2) ersichtlich, und (Nor 3) wurde in Beispiel (1) in §1.3.2 verifiziert; cf. Ungleichung $(*)$.

(2) Sei $n \in \mathbf{Z}_{\geqslant 0}$. Sei $V = \mathbf{R}^n$. Sei

$$\|x\|_\infty \;:=\; \max\{|x_i| \;:\; 1 \leqslant i \leqslant n\}$$

für $x = (x_i)_i \in \mathbf{R}^n$. Es ist $(\mathbf{R}^n, \|-\|_\infty)$ ein normierter Raum. In der Tat sind (Nor 1, 2) ersichtlich. Um ferner (Nor 3) zu zeigen, seien $x = (x_i)_i$ und $y = (y_i)_i$ in $\mathbf{R}^n$ gegeben. Es wird

$$\begin{array}{rcl} \|x+y\|_\infty & = & \max\{|x_i + y_i| \;:\; 1 \leqslant i \leqslant n\} \\ & \leqslant & \max\{|x_i| + |y_i| \;:\; 1 \leqslant i \leqslant n\} \\ & \leqslant & \max\{|x_i| + |y_j| \;:\; 1 \leqslant i \leqslant n,\ 1 \leqslant j \leqslant n\} \\ & = & \max\{|x_i| \;:\; 1 \leqslant i \leqslant n\} + \max\{|y_j| \;:\; 1 \leqslant j \leqslant n\} \\ & = & \|x\|_\infty + \|y\|_\infty \,; \end{array}$$

vgl. Beispiel (1) in §1.3.2, Ungleichung $(*)$.

Die übliche Norm $\|-\|_2$ auf $\mathbf{R}^n$ mit $\|x\|_2 = (x^{\mathrm{t}}x)^{1/2}$ werden wir erst via euklidscher Räume kennenlernen; vgl. §1.3.4, §1.3.5.3 unten. Der Grund für diesen Umweg ist, daß wir uns für (Nor 3) erst das Lemma von Cauchy-Schwarz erarbeiten müssen.

Sei $(V, \|-\|)$ ein normierter Raum. Setze

$$\begin{array}{rcl} V \times V & \xrightarrow{d^{(V,\|-\|)}} & \mathbf{R}_{\geqslant 0} \\ (x,y) & \longmapsto & d^{(V,\|-\|)}(x,y) := \|x-y\| \,. \end{array}$$

Vgl. Beispiel (1) oben und Beispiel (1) aus §1.3.2.

Lemma. *Es ist $(V, d^{(V,\|-\|)})$ ein metrischer Raum.*

Ein normierter Raum wird mit dieser Metrik ausgestattet, solange nichts anderes gesagt wird.

Beweis. Schreibe $d := d^{(V,\|-\|)}$.

Zu (Met 1). Seien $x,\, y \in V$. Es ist $d(x,y) = \|x-y\|$ wegen (Nor 1) genau dann gleich 0, wenn $x - y = 0$ ist, i.e. wenn $x = y$.

Zu (Met 2). Seien $x,\, y \in V$. Es wird mit (Nor 2)

$$d(x,y) \;=\; \|x-y\| \;=\; \|(-1)(y-x)\| \;=\; |(-1)|\|y-x\| \;=\; \|y-x\| \;=\; d(y,x)\;.$$

Zu (Met 3). Seien $x,\, y,\, z \in V$. Es wird mit (Nor 3)

$$d(x,y)+d(y,z) \;=\; \|x-y\|+\|y-z\| \;\geqslant\; \|(x-y)+(y-z)\| \;=\; \|x-z\| \;=\; d(x,z)\;.$$

1.3.4 Euklidsche Räume

Definition. Ein *euklidscher Raum* ist ein Paar $(V, \langle -,=\rangle)$ bestehend aus einem $\mathbf{R}$-Vektorraum V und einer Abbildung

$$\begin{array}{ccccc} V & \times & V & \xrightarrow{\langle -,=\rangle} & \mathbf{R} \\ (x & , & y) & \longmapsto & \langle x,y\rangle \end{array}$$

derart, daß die Axiome (Euk 1, 2, 3) gelten

(Euk 1) Für $x,\, x',\, y \in V$ und $\lambda,\, \lambda' \in \mathbf{R}$ ist $\langle \lambda x + \lambda' x',\, y\rangle \;=\; \lambda\langle x,y\rangle + \lambda'\langle x',y\rangle$.

(Euk 2) Für $x,\, y \in V$ ist $\langle x,y\rangle \;=\; \langle y,x\rangle$.

(Euk 3) Für $x \in V$ ist $\langle x,x\rangle \geqslant 0$. Für $x \in V$ ist $\langle x,x\rangle = 0$ genau dann, wenn $x = 0$.

Unter Mißbrauch der Bezeichnung schreibt man auch oft $V = (V, \langle -,=\rangle)$.

Bemerkung. Mit (Euk 1, 2) folgt, daß für $x,\, y,\, y' \in V$ und $\mu,\, \mu' \in \mathbf{R}$ auch in der zweiten Variablen die Linearität

$$\langle x,\, \mu y + \mu' y'\rangle \;=\; \langle \mu y + \mu' y',\, x\rangle \;=\; \mu\langle y,x\rangle + \mu'\langle y',x\rangle \;=\; \mu\langle x,y\rangle + \mu'\langle x,y'\rangle$$

gilt.

Die Abbildung $\langle -,=\rangle$ heißt auch *positiv definite symmetrische Bilinearform* auf V; Bilinearform wegen (Euk 1) und vorstehender Bemerkung, symmetrisch wegen (Euk 2) und positiv definit wegen (Euk 3).

Synonym hierzu heißt $\langle -,=\rangle$ auch kurz ein *Skalarprodukt* auf V.

Beispiel.

(1) Es ist $\mathbf{R}$ zusammen mit der gewöhnlichen Multiplikation

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{R} & \times & \mathbf{R} & \xrightarrow{\langle -,=\rangle} & \mathbf{R} \\ (x & , & y) & \longmapsto & \langle x,y\rangle \;:=\; xy \end{array}$$

ersichtlich ein euklidscher Raum.

(2) Sei $n \in \mathbf{Z}_{\geqslant 0}$. Es ist $\mathbf{R}^n$ zusammen mit

$$\begin{array}{ccccccccc} \mathbf{R}^n & \times & \mathbf{R}^n & \xrightarrow{\langle -,= \rangle} & \mathbf{R} & & & & \\ (x & , & y) & \longmapsto & \langle x, y \rangle & := & x^{\mathrm{t}} y & = & \sum_{i=1}^n x_i y_i \end{array}$$

ein euklidscher Raum. Für (Euk 3) ist zu beachten, daß $x^{\mathrm{t}} x = \sum_{i=1}^n x_i^2$, und daher $x^{\mathrm{t}} x \geqslant 0$ stets, sowie $x^{\mathrm{t}} x = 0$ genau dann, wenn $x = 0$.

(3) Seien $a,\, b \in \mathbf{R}$ mit $a < b$. Sei $\mathrm{C}([a,b])$ der $\mathbf{R}$-Vektorraum der stetigen reellwertigen Funktionen auf dem Intervall $[a,b] \subseteq \mathbf{R}$ im Sinne der Analysis. Es ist $\mathrm{C}([a,b])$ zusammen mit

$$\begin{array}{ccccccc} \mathrm{C}([a,b]) & \times & \mathrm{C}([a,b]) & \xrightarrow{\langle -,= \rangle} & \mathbf{R} & & \\ (f & , & g) & \longmapsto & \langle f, g \rangle & := & \int_a^b f(x) g(x) \mathrm{d}x \end{array}$$

ein euklidscher Raum.

Für (Euk 3) ist zu beachten, daß $\int_a^b f(x)^2 \mathrm{d}x \geqslant 0$, sowie daß wegen der Stetigkeit von $x \longmapsto f(x)^2$ auch $\int_a^b f(x)^2 \mathrm{d}x = 0$ genau dann gilt, wenn $f(x)^2 = 0$ für alle $x \in [a,b]$, d.h. wenn $f = 0$.

Der Raum $\mathrm{C}([a,b])$ ist unendlichdimensional, und damit unserem räumlichen Vorstellungsvermögen nicht mehr direkt zugänglich. Wohl aber kann man sich Elemente daraus aufzeichnen; man kann, wie aus der Analysis bekannt, in diesem Raum rechnen; und man kann mit ihm Topologie betreiben.

Auf Beispiel (3) werden wir uns nicht zu berufen haben; vgl. aber §5.2.

Bemerkung. *Sei $(V, \langle -,= \rangle)$ ein euklidscher Raum. Für $x \in V$ ist $\langle x, 0 \rangle = \langle 0, x \rangle = 0$.*

Beweis. Mit (Euk 1, 2) folgt

$$\langle x, 0 \rangle \;=\; \langle 0, x \rangle \;=\; \langle 0 \cdot 0, x \rangle \;=\; 0 \cdot \langle 0, x \rangle \;=\; 0\;.$$

Mit (Euk 2) folgt daraus auch $\langle x, 0 \rangle = 0$. □

Lemma. (Cauchy-Schwarz) *Sei $(V, \langle -,= \rangle)$ ein euklidscher Raum. Seien $x,\, y \in V$. Es ist*

$$\langle x, y \rangle^2 \;\leqslant\; \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle\;.$$

Gleichheit gilt hierin genau dann, wenn (x, y) linear abhängig ist.

Beweis. Falls $y = 0$, so sind beide Aussagen ersichtlich. Ohne Einschränkung ist also $y \neq 0$.

Es genügt zu zeigen, daß

$$\langle y, y \rangle \big(\langle x, x \rangle \langle y, y \rangle - \langle x, y \rangle^2 \big) \overset{!}{\geqslant} 0\;,$$

und daß hier genau dann Gleichheit gilt, wenn (x, y) linear abhängig ist, i.e., wegen $y \neq 0$, wenn $x = \lambda y$ für ein $\lambda \in \mathbf{R}$.

In der Tat wird

$$\begin{array}{rcl} 0 & \overset{\text{(Euk 3)}}{\leqslant} & \langle \langle y, y\rangle x - \langle x, y\rangle y,\ \langle y, y\rangle x - \langle x, y\rangle y\rangle \\ & = & \langle y, y\rangle^2 \langle x, x\rangle - 2\langle x, y\rangle\langle y, y\rangle\langle x, y\rangle + \langle x, y\rangle^2\langle y, y\rangle \\ & = & \langle y, y\rangle^2 \langle x, x\rangle - \langle y, y\rangle\langle x, y\rangle^2 \\ & = & \langle y, y\rangle\big(\langle x, x\rangle\langle y, y\rangle - \langle x, y\rangle^2\big) \ . \end{array}$$

Gleichheit gilt genau dann, wenn im ersten Schritt Gleichheit gilt, was nach (Euk 3) genau dann der Fall ist, wenn $\langle y, y\rangle x - \langle x, y\rangle y = 0$.

Diesenfalls ist (x, y) linear abhängig. Ist umgekehrt $x = \lambda y$ für ein $\lambda \in \mathbf{R}$, so ist

$$\langle y, y\rangle x - \langle x, y\rangle y \ = \ \langle y, y\rangle \lambda y - \langle \lambda y,\ y\rangle y \ = \ 0 \ .$$

□

Sei $(V, \langle -, = \rangle)$ ein euklidscher Raum. Setze

$$\begin{array}{rcl} V & \xrightarrow{\|-\|_{\langle -, = \rangle}} & \mathbf{R}_{\geqslant 0} \\ x & \longmapsto & \|x\|_{\langle -, = \rangle} \ := \ \langle x, x\rangle^{1/2} \ . \end{array}$$

Lemma. *Es ist* $(V, \| - \|_{\langle -, = \rangle})$ *ein normierter Raum.*

Ein euklidscher Raum wird mit dieser Norm ausgestattet, solange nichts anderes gesagt wird.

Beweis. Schreibe $\| - \| := \| - \|_{\langle -, = \rangle}$.

Zu (Nor 1). Für $x \in V$ ist $\|x\| = \langle x, x\rangle^{1/2}$ gleich 0 genau dann, wenn $x = 0$, wie aus (Euk 3) zu entnehmen.

Zu (Nor 2). Für $x \in V$ und $\lambda \in \mathbf{R}$ wird mit (Euk 1) und vorvorstehender Bemerkung

$$\|\lambda x\| \ = \ \langle \lambda x, \lambda x\rangle^{1/2} \ = \ (\lambda^2 \langle x, x\rangle)^{1/2} \ = \ |\lambda| \langle x, x\rangle^{1/2} \ = \ |\lambda| \|x\| \ .$$

Zu (Nor 3). Seien $x,\ y \in V$. Mit (Euk 1, 2) und dem Lemma von Cauchy-Schwarz wird

$$\begin{array}{rcl} \|x + y\|^2 & = & \langle x + y,\ x + y\rangle \\ & = & \langle x, x\rangle + 2\langle x, y\rangle + \langle y, y\rangle \\ & \leqslant & \langle x, x\rangle + 2|\langle x, y\rangle| + \langle y, y\rangle \\ & \overset{\text{C-S}}{\leqslant} & \langle x, x\rangle + 2\langle x, x\rangle^{1/2}\langle y, y\rangle^{1/2} + \langle y, y\rangle \\ & = & (\langle x, x\rangle^{1/2} + \langle y, y\rangle^{1/2})^2 \\ & = & (\|x\| + \|y\|)^2 \ . \end{array}$$

Es folgt, daß $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$. □

1.3.5 Der Raum $\mathbf{R}^n$

Sei $n \in \mathbf{Z}_{\geqslant 0}$.

Wir geben eine Übersicht und fassen anhand des Beispiels $\mathbf{R}^n$ die verschiedenen Strukturen zusammen.

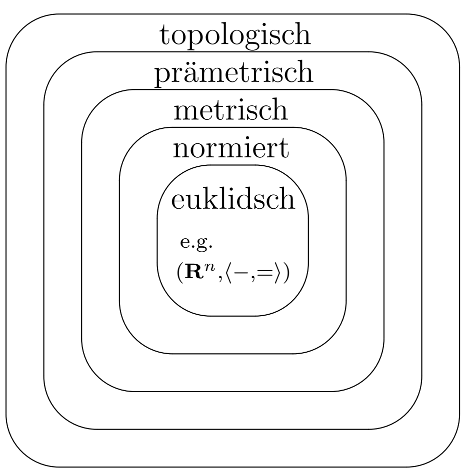
1.3.5.1 Übersicht

- Es ist $\mathbf{R}^n$ ein euklidscher Raum. Cf. §1.3.4, Beispiel (2).
- Ein euklidscher Raum $(V, \langle -, = \rangle)$ induziert einen normierten Raum $(V, \| - \|_{\langle -,= \rangle})$. Hierbei ist $\|x\|_{\langle -,= \rangle} = \langle x, x \rangle^{1/2}$ für $x \in V$. Cf. §1.3.4.
- Ein normierter Raum $(V, \| - \|)$ induziert einen metrischen Raum $(V, d^{(V,\|-\|)})$. Hierbei ist $d^{(V,\|-\|)}(x, y) = \|x - y\|$ für $x,\ y \ \in\ V$. Cf. §1.3.3.
- Ein metrischer Raum (X, d) induziert einen topologischen Raum $(X, T^{(X,d)})$. Diesbezüglich ist $U \overset{\text{off.}}{\subseteq} X$ genau dann, wenn es für alle $x \in U$ ein $\varepsilon \in \mathbf{R}_{>0}$ mit

  $$\mathrm{B}_\varepsilon(x) \ \overset{\text{def.}}{=} \ \{y \in X \ : \ d(y, x) < \varepsilon\} \ \subseteq \ U$$

  gibt. Cf. §1.3.1, §1.3.2.

Eine schematische Übersicht von Raumbegriffen.



Diese stellt insofern eine Vergröberung dar, daß etwa die euklidschen Räume nicht direkt eine Teilmenge der normierten Räume bilden, sondern erst die von den euklidschen Räumen *herstammenden* normierten Räume. Usf.

Auf $\mathbf{R}^n$ kann man e.g. auch die Norm $\|-\|_\infty$ erklären; cf. §1.3.3, Beispiel (2). Wir werden, wie unten dargelegt werden soll, folgendes erhalten.

$$\begin{tikzcd}
\text{euklidsch} & \text{normiert} & \text{metrisch} & \text{topologisch} \\
(\mathbf{R}^n, \langle -,=\rangle) \arrow[r, rightsquigarrow] & (\mathbf{R}^n, \underbrace{\|-\|_{\langle -,=\rangle}}_{=:\, \|-\|_2}) \arrow[r, rightsquigarrow] & (\mathbf{R}^n, \underbrace{d^{(\mathbf{R}^n, \|-\|_2)}}_{=:\, d^{(2)}}) \arrow[r, rightsquigarrow] & (\mathbf{R}^n, T^{(\mathbf{R}^n, d^{(2)})}) \arrow[d, equal, "!"] \\
 & (\mathbf{R}^n, \|-\|_\infty) \arrow[r, rightsquigarrow] & (\mathbf{R}^n, \underbrace{d^{(\mathbf{R}^n, \|-\|_\infty)}}_{=:\, d^{(\infty)}}) \arrow[r, rightsquigarrow] & (\mathbf{R}^n, T^{(\mathbf{R}^n, d^{(\infty)})})
\end{tikzcd}$$

1.3.5.2 $\mathbf{R}^n$ als euklidscher Raum

Das Skalarprodukt $\langle x, y\rangle \overset{\text{def.}}{=} x^{\mathrm{t}} y$ für $x,\ y\ \in\ \mathbf{R}^n$ macht $(\mathbf{R}^n, \langle -,=\rangle)$ zu einem euklidschen Raum. Cf. §1.3.4, Beispiel (2).

1.3.5.3 $\mathbf{R}^n$ als normierter Raum auf zwei Arten

Mit der Norm $\|-\|_2 := \|-\|_{\langle -,=\rangle}$, also mit

$$\|x\|_2 \;=\; \langle x, x\rangle^{1/2} \;=\; (x^{\mathrm{t}} x)^{1/2} \;=\; (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)^{1/2}$$

für $x \in \mathbf{R}^n$, erhalten wir einen normierten Raum $(\mathbf{R}^n, \|-\|_2)$. Dieser Norm liegt das Skalarprodukt aus §1.3.5.2 zugrunde.

Dieser unterscheidet sich aber für $n \geqslant 2$ vom normierten Raum $(\mathbf{R}^n, \|-\|_\infty)$, der in Beispiel (2) in §1.3.3 betrachtet wurde. Dort war

$$\|x\|_\infty \;:=\; \max\{|x_i| \;:\; 1 \leqslant i \leqslant n\}$$

gesetzt worden, ohne daß dem ein Skalarprodukt zugrundegelegen hat.

> Es gibt noch mehr als nur unsere beiden betrachteten Möglichkeiten, $\mathbf{R}^n$ zu einem normierten Raum zu machen. Cf. e.g. Aufgabe 13.

1.3.5.4 $\mathbf{R}^n$ als metrischer Raum auf zwei Arten

Schreibe $d^{(2)} := d^{(\mathbf{R}^n, \|-\|_2)}$. Schreibe $d^{(\infty)} := d^{(\mathbf{R}^n, \|-\|_\infty)}$. Für $x,\ y\ \in\ \mathbf{R}^n$ wird also

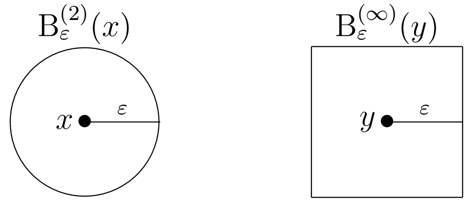
$$\begin{array}{rcl}
d^{(2)}(x,y) & = & \big((x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2 + \cdots + (x_n-y_n)^2\big)^{1/2} \\
d^{(\infty)}(x,y) & = & \max\{|x_i - y_i| \;:\; i \in \{1,\ldots,n\}\}\ .
\end{array}$$

Schreibe

$$\begin{array}{lcl} \mathrm{B}_\varepsilon^{(2)}(x) & := & \mathrm{B}_\varepsilon^{(\mathbf{R}^n,\, d^{(2)})}(x) & = & \{y \in \mathbf{R}^n \ : \ d^{(2)}(y,x) < \varepsilon\} \\ \mathrm{B}_\varepsilon^{(\infty)}(x) & := & \mathrm{B}_\varepsilon^{(\mathbf{R}^n,\, d^{(\infty)})}(x) & = & \{y \in \mathbf{R}^n \ : \ d^{(\infty)}(y,x) < \varepsilon\} \end{array}$$

für $x \in \mathbf{R}^n$ und $\varepsilon \in \mathbf{R}_{>0}$.

Skizze im Fall $n = 2$.



Bemerkung. *Seien $x \in \mathbf{R}^n$ und $\varepsilon \in \mathbf{R}_{>0}$ gegeben. Es ist*

$$\begin{array}{lcl} \mathrm{B}_\varepsilon^{(2)}(x) & \subseteq & \mathrm{B}_\varepsilon^{(\infty)}(x) \\ \mathrm{B}_{\varepsilon/\sqrt{n}}^{(\infty)}(x) & \subseteq & \mathrm{B}_\varepsilon^{(2)}(x) \ . \end{array}$$

Beweis. Zeigen wir die erste Teilmengenbeziehung.

Sei $y \in \mathrm{B}_\varepsilon^{(2)}(x)$, i.e. $d^{(2)}(y,x)^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - x_i)^2 < \varepsilon^2$.

Dann ist auch $\max\{(y_i - x_i)^2 \ : \ 1 \leqslant i \leqslant n\} < \varepsilon^2$, und somit

$$d^{(\infty)}(y,x) \ = \ \max\{|y_i - x_i| \ : \ 1 \leqslant i \leqslant n\} \ < \ \varepsilon \ ,$$

i.e. $y \in \mathrm{B}_\varepsilon^{(\infty)}(x)$.

Zeigen wir die zweite Teilmengenbeziehung.

Sei $y \in \mathrm{B}_{\varepsilon/\sqrt{n}}^{(\infty)}(x)$, i.e. $d^{(\infty)}(y,x) = \max\{|y_i - x_i| \ : \ 1 \leqslant i \leqslant n\} < \varepsilon/\sqrt{n}$. Dann ist

$$d^{(2)}(y,x)^2 \ = \ \sum_{i=1}^n (y_i - x_i)^2 \ < \ \sum_{i=1}^n (\varepsilon/\sqrt{n})^2 \ = \ n\varepsilon^2/n \ = \ \varepsilon^2 \ ,$$

also $d^{(2)}(y,x) < \varepsilon$, und somit $y \in \mathrm{B}_\varepsilon^{(2)}(x)$. □

Es gibt noch mehr als nur unsere beiden betrachteten Möglichkeiten, $\mathbf{R}^n$ zu einem metrischen Raum zu machen. Cf. e.g. Aufgabe 13.

1.3.5.5 $\mathbf{R}^n$ als topologischer Raum

Eine Teilmenge U von $\mathbf{R}^n$ ist offen (bezüglich $T^{(\mathbf{R}^n,\, d^{(2)})}$), falls es für jedes $x \in U$ ein $\varepsilon \in \mathbf{R}_{>0}$ mit

$$\mathrm{B}_\varepsilon(x) \;=\; \mathrm{B}_\varepsilon^{(\mathbf{R}^n,\, d^{(2)})}(x) \;=\; \{y \in \mathbf{R}^n \;:\; d^{(2)}(y,x) \;<\; \varepsilon\} \;\subseteq\; U$$

gibt. Hierbei ist

$$d^{(2)}(y,x) \;=\; ((y-x)^{\mathrm{t}}\,(y-x))^{1/2} \;=\; \sqrt{(y_1-x_1)^2+\cdots+(y_n-x_n)^2}$$

der Abstand von y zu x (bezüglich $d^{(2)}$).

Im weiteren sei $\mathbf{R}^n$ mit dieser Topologie ausgestattet, so nichts anderes gesagt wird.

Im Fall $n = 1$ erhalten wir aufs neue die in §1.2.1 auf $\mathbf{R}$ eingeführte Topologie. Denn $\mathrm{B}_\varepsilon^{(\mathbf{R}^1,d^{(2)})}(x) = (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ für $x \in \mathbf{R} = \mathbf{R}^1$ und $\varepsilon \in \mathbf{R}_{>0}$.

Bemerkung. *Es ist $T^{(\mathbf{R}^n,\, d^{(2)})} = T^{(\mathbf{R}^n,\, d^{(\infty)})}$. In Worten, die beiden Metriken $d^{(2)}$ und $d^{(\infty)}$ liefern dieselbe Topologie auf $\mathbf{R}^n$.*

Vgl. auch Aufgabe 11.

Beweis. Wir zeigen $T^{(\mathbf{R}^n,\, d^{(2)})} \overset{!}{\subseteq} T^{(\mathbf{R}^n,\, d^{(\infty)})}$. Sei $U \in T^{(\mathbf{R}^n,\, d^{(2)})}$. Sei $x \in U$. Es gibt ein $\varepsilon \in \mathbf{R}_{>0}$ mit $\mathrm{B}_\varepsilon^{(2)}(x) \subseteq U$. Mit der Bemerkung aus §1.3.5.4 folgt

$$\mathrm{B}^{(\infty)}_{\varepsilon/\sqrt{n}}(x) \;\subseteq\; \mathrm{B}_\varepsilon^{(2)}(x) \;\subseteq\; U\,.$$

Da $\varepsilon/\sqrt{n} > 0$, zeigt dies, daß $U \in T^{(\mathbf{R}^n,\, d^{(\infty)})}$.

Wir zeigen $T^{(\mathbf{R}^n,\, d^{(2)})} \overset{!}{\supseteq} T^{(\mathbf{R}^n,\, d^{(\infty)})}$. Sei $V \in T^{(\mathbf{R}^n,\, d^{(\infty)})}$. Sei $y \in V$. Es gibt ein $\varepsilon \in \mathbf{R}_{>0}$ mit $\mathrm{B}_\varepsilon^{(\infty)}(y) \subseteq V$. Mit der Bemerkung aus §1.3.5.4 folgt

$$\mathrm{B}_\varepsilon^{(2)}(y) \;\subseteq\; \mathrm{B}_\varepsilon^{(\infty)}(y) \;\subseteq\; V\,.$$

Dies zeigt, daß $V \in T^{(\mathbf{R}^n,\, d^{(2)})}$. $\square$

Die Gleichheit $T^{(\mathbf{R}^n,\, d^{(2)})} = T^{(\mathbf{R}^n,\, d^{(\infty)})}$ kann man so interpretieren: ein Topologe sieht den Unterschied zwischen $d^{(2)}$ und $d^{(\infty)}$ nicht, muß ihn aber auch gar nicht kennen.

1.4 Abschluß, Inneres, Rand

Definition. Sei (X, T) ein topologischer Raum. Sei $Y \subseteq X$.

(1) Der *Abschluß* von Y in X ist definiert als

$$\bar{Y} := \bigcap_{Y \subseteq A \overset{\text{abg.}}{\subseteq} X} A \, .$$

Es ist $\bar{Y} \overset{\text{abg.}}{\subseteq} X$ nach Aufgabe 5.(1).

(2) Das *Innere* von Y in X ist definiert als

$$Y^\circ := \bigcup_{U \subseteq Y \text{ und } U \overset{\text{off.}}{\subseteq} X} U \, .$$

Es ist $Y^\circ \overset{\text{off.}}{\subseteq} X$ nach (Top 3).

(3) Der *Rand* von Y in X ist definiert als

$$\partial Y := \bar{Y} \smallsetminus Y^\circ \, .$$

Bemerkung. Sei (X, T) ein topologischer Raum. Sei $Y \subseteq X$.

(1) *Es ist* $Y^\circ \subseteq Y \subseteq \bar{Y}$.

(2) *Ist* $Y \subseteq A \overset{\text{abg.}}{\subseteq} X$, *so ist* $\bar{Y} \subseteq A$.

(3) *Ist* $U \subseteq Y$ *mit* $U \overset{\text{off.}}{\subseteq} X$, *so ist* $U \subseteq Y^\circ$.

(4) *Es ist* $Y = \bar{Y}$ *genau dann, wenn* $Y \overset{\text{abg.}}{\subseteq} X$. *Speziell ist* $\bar{\bar{Y}} = \bar{Y}$.

(5) *Es ist* $Y = Y^\circ$ *genau dann, wenn* $Y \overset{\text{off.}}{\subseteq} X$. *Speziell ist* $(Y^\circ)^\circ = Y^\circ$.

(6) *Es ist* $\partial Y \overset{\text{abg.}}{\subseteq} X$.

Beweis.

Zu (1). Es ist Y° als Vereinigung von Teilmengen von Y wieder eine Teilmenge von Y.

Es ist $\bar{Y}$ als Schnitt von über Y liegenden Mengen wieder eine Y enthaltende Menge.

Zu (2). Ist $Y \subseteq A \overset{\text{abg.}}{\subseteq} X$, so ist A ein Teilnehmer des $\bar{Y}$ definierenden Schnitts, und also $\bar{Y} \subseteq A$.

Zu (3). Ist $U \subseteq Y$ mit $U \overset{\text{off.}}{\subseteq} Y$, so ist U ein Teilnehmer der Y° definierenden Vereinigung, und also $U \subseteq Y^\circ$.

Zu (4). Ist $Y = \bar{Y}$, so ist $Y = \bar{Y} \overset{\text{abg.}}{\subseteq} X$. Ist umgekehrt $Y \overset{\text{abg.}}{\subseteq} X$, so ist $Y \overset{(1)}{\subseteq} \bar{Y} \overset{(2)}{\subseteq} Y$, und also $Y = \bar{Y}$.

Zu (5). Ist $Y = Y^\circ$, so ist $Y = Y^\circ \overset{\text{off.}}{\subseteq} X$. Ist umgekehrt $Y \overset{\text{off.}}{\subseteq} X$, so ist $Y \overset{(3)}{\subseteq} Y^\circ \overset{(1)}{\subseteq} Y$, und also $Y = Y^\circ$.

Zu (6). Es ist $\partial Y = \bar{Y} \smallsetminus Y^\circ = \bar{Y} \cap (X \smallsetminus Y^\circ) \overset{\text{abg.}}{\subseteq} X$ als Schnitt zweier abgeschlossener Teilmengen von X; vgl. Aufgabe 5.(1). $\square$

Lemma. *Sei (X, d) ein metrischer Raum. Betrachte den topologischen Raum $(X, T^{(X,d)})$. Sei $Y \subseteq X$.*

(1) *Es ist* $\bar{Y} = \{x \in X \ : \ \text{für alle } \varepsilon \in \mathbf{R}_{>0} \text{ ist } \mathrm{B}_\varepsilon(x) \cap Y \neq \emptyset\}$.

(2) *Es ist* $Y^\circ = \{x \in X \ : \ \text{es gibt ein } \varepsilon \in \mathbf{R}_{>0} \text{ mit } \mathrm{B}_\varepsilon(x) \subseteq Y\}$.

(3) *Es ist* $\partial Y = \{x \in X \ : \ \text{für alle } \varepsilon \in \mathbf{R}_{>0} \text{ ist } \mathrm{B}_\varepsilon(x) \cap Y \neq \emptyset \text{ und } \mathrm{B}_\varepsilon(x) \cap (X \smallsetminus Y) \neq \emptyset\}$.

Beweis.

Zu (2). Da Bälle nach dem Lemma in §1.3.2 offene Teilmengen von X sind, gilt mit obiger Bemerkung (3)

$$\begin{array}{rcl} Y' & := & \{x \in X \ : \ \text{es gibt ein } \varepsilon > 0 \text{ mit } \mathrm{B}_\varepsilon(x) \subseteq Y\} \\ & \subseteq & \{x \in X \ : \ \text{es gibt ein } \varepsilon > 0 \text{ mit } \mathrm{B}_\varepsilon(x) \subseteq Y^\circ\} \\ & \subseteq & Y^\circ \, , \end{array}$$

für die zweite Inklusion beachte man $x \in \mathrm{B}_\varepsilon(x)$.

Es bleibt zu zeigen, daß $Y^\circ \overset{!}{\subseteq} Y'$. Sei $x \in Y^\circ$. Da $Y^\circ \overset{\text{off.}}{\subseteq} X$, gibt es ein $\varepsilon \in \mathbf{R}_{>0}$ mit $\mathrm{B}_\varepsilon(x) \subseteq Y^\circ \subseteq Y$. Somit ist in der Tat $x \in Y'$.

Zu (1). Schreibe

$$Y'' := \{x \in X \ : \ \text{für alle } \varepsilon \in \mathbf{R}_{>0} \text{ ist } \mathrm{B}_\varepsilon(x) \cap Y \neq \emptyset\} \, .$$

Wir wollen $\bar{Y} \overset{!}{=} Y''$ zeigen.

Nach Aufgabe 15.(1) ist $X \smallsetminus (X \smallsetminus Y)^\circ = \overline{X \smallsetminus (X \smallsetminus Y)} = \bar{Y}$, und also $(X \smallsetminus Y)^\circ = X \smallsetminus \bar{Y}$.

Es wird

$$\begin{array}{rcl} X \smallsetminus Y'' & = & \{x \in X \ : \ \text{für ein } \varepsilon \in \mathbf{R}_{>0} \text{ ist } \mathrm{B}_\varepsilon(x) \cap Y = \emptyset\} \\ & = & \{x \in X \ : \ \text{für ein } \varepsilon \in \mathbf{R}_{>0} \text{ ist } \mathrm{B}_\varepsilon(x) \subseteq X \smallsetminus Y\} \\ & \overset{(2)}{=} & (X \smallsetminus Y)^\circ \\ & \overset{\text{Aufg. 15.(1)}}{=} & X \smallsetminus \bar{Y} \, , \end{array}$$

mithin $Y'' = \bar{Y}$.

Zu (3). Es wird

$$
\begin{array}{rcl}
\partial Y & = & \bar{Y} \smallsetminus Y^\circ \\
& = & \bar{Y} \cap (X \smallsetminus Y^\circ) \\
& = & \bar{Y} \cap (\overline{X \smallsetminus Y}) \\
& \overset{(1)}{=} & \quad \{x \in X \;:\; \text{für alle } \varepsilon \in \mathbf{R}_{>0} \text{ ist } \mathrm{B}_\varepsilon(x) \cap Y \neq \emptyset\} \\
& & \cap\, \{x \in X \;:\; \text{für alle } \varepsilon \in \mathbf{R}_{>0} \text{ ist } \mathrm{B}_\varepsilon(x) \cap (X \smallsetminus Y) \neq \emptyset\} \\
& = & \{x \in X \;:\; \text{für alle } \varepsilon \in \mathbf{R}_{>0} \text{ ist } \mathrm{B}_\varepsilon(x) \cap Y \neq \emptyset \text{ und } \mathrm{B}_\varepsilon(x) \cap (X \smallsetminus Y) \neq \emptyset\}\ .
\end{array}
$$

□

Beispiel. Sei $X = \mathbf{R}$. Sei $Y = [0,1)$.

(1) Es ist
$$Y^\circ \;=\; [0,1)^\circ \;=\; (0,1)\ .$$
Denn es ist $Y^\circ \subseteq Y = [0,1)$; und zum einen für alle $x \in (0,1)$ mit
$$\varepsilon \;:=\; \min\{x,\, 1-x\}$$
bereits $\mathrm{B}_\varepsilon(x) = (x-\varepsilon,\, x+\varepsilon) \subseteq [0,1)$; zum anderen für $x = 0$ für kein $\varepsilon \in \mathbf{R}_{>0}$ mehr $\mathrm{B}_\varepsilon(0) = (-\varepsilon,\, +\varepsilon) \subseteq [0,1)$.

(2) Es ist
$$\bar{Y} \;=\; \overline{[0,1)} \;=\; [0,1]\ .$$
Denn es ist $Y \subseteq \bar{Y}$; und zum einen für $x = 1$ für alle $\varepsilon \in \mathbf{R}_{>0}$ noch
$$\mathrm{B}_\varepsilon(1) \;=\; (1-\varepsilon, 1+\varepsilon) \cap [0,1) \;\neq\; \emptyset\ ;$$
zum zweiten für $x \in \mathbf{R}_{>1}$ bereits
$$\mathrm{B}_{x-1}(x) \cap [0,1) \;=\; (x-(x-1), x+(x-1)) \cap [0,1) \;=\; (1, 2x-1) \cap [0,1) \;=\; \emptyset\ ;$$
zum dritten für $x \in \mathbf{R}_{<0}$ bereits
$$\mathrm{B}_{-x}(x) \cap [0,1) = (x-(-x), x+(-x)) \cap [0,1) \;=\; (2x, 0) \cap [0,1) \;=\; \emptyset\ .$$

(3) Es ist
$$\partial[0,1) \;=\; \partial Y \;=\; \bar{Y} \smallsetminus Y^\circ \;=\; [0,1] \smallsetminus (0,1) \;=\; \{0,1\}\ .$$

Kapitel 2

Abbildungen

2.1 Grundbegriffe

Seien (X, T_X), (Y, T_Y) und (Z, T_Z) topologische Räume.

2.1.1 Stetige Abbildungen

Definition. Eine Abbildung $X \xrightarrow{f} Y$ heiße *stetig* (bezüglich T_X und T_Y) falls für alle $V \in T_Y$ gilt, daß $f^{-1}(V) \in T_X$ ist.

In anderen Worten, eine Abbildung ist stetig, wenn das Urbild jeder offenen Teilmenge wieder eine offene Teilmenge ist.

Bei Bedarf reden wir auch von einer stetigen Abbildung von (X, T_X) nach (Y, T_Y).

Schreibe

$$\mathrm{C}\big((X, T_X), (Y, T_Y)\big) \;=\; \mathrm{C}(X, Y) \;:=\; \{X \xrightarrow{f} Y \;:\; f \text{ ist stetig (bzgl. } T_X \text{ und } T_Y)\}$$

für die Menge der stetigen Abbildungen von X nach Y (engl. continuous).

Schreibe auch $\mathrm{C}(X) := \mathrm{C}(X, \mathbf{R})$.

Beispiel.

(1) Die Abbildung $\emptyset \longrightarrow Y$ ist stetig.

(2) Sei $y_0 \in Y$ fix gegeben. Sei $X \xrightarrow{f} Y$, $x \longmapsto y_0$ die *konstante* Abbildung mit Bild $f(X) = \{y_0\}$. Es ist f stetig. In der Tat ist das Urbild von $V \overset{\text{off.}}{\subseteq} Y$ unter f leer, falls $y_0 \notin V$, und gleich X, falls $y_0 \in V$, und so beidenfalls offen in X.

(3) Es ist $X \xrightarrow{\mathrm{id}} X$ bezüglich T_X und T_X stetig. In der Tat ist für $U \overset{\text{off.}}{\subseteq} X$ auch $\mathrm{id}^{-1}(U) = U$ offen in X.

(4) Sei N eine Menge. Sei $X \xrightarrow{f} N$ eine Abbildung. Es ist f bezüglich T_X und $T_{N,\,\text{verklumpt}}$ stetig. In der Tat sind $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ und $f^{-1}(N) = X$ offen in X.

(5) Sei M eine Menge. Sei (Y, T_Y) ein topologischer Raum. Sei $M \xrightarrow{f} Y$ eine Abbildung. Es ist $M \xrightarrow{f} Y$ bezüglich $T_{M,\,\text{diskret}}$ und T_Y stetig. In der Tat ist für $V \overset{\text{off.}}{\subseteq} Y$ auch $f^{-1}(V)$ offen in M – wie überhaupt ja jede Teilmenge von M in $T_{M,\,\text{diskret}}$ liegt.

Ein der Analysis näheres Beispiel werden wir in §2.2 sehen.

Bemerkung. *Seien $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ stetige Abbildungen. Dann ist auch $X \xrightarrow{g\circ f} Z$ stetig.*

Beweis. Sei $W \overset{\text{off.}}{\subseteq} Z$. Da g stetig ist, ist $g^{-1}(W) \overset{\text{off.}}{\subseteq} Y$. Wegen f stetig folgt daher auch

$$(g \circ f)^{-1}(W) \;=\; f^{-1}\big(g^{-1}(W)\big) \;\overset{\text{off.}}{\subseteq}\; X\,.$$

$\square$

Bemerkung. *Sei $X \xrightarrow{f} Y$ eine stetige Abbildung. Seien $X' \subseteq X$ und $Y' \subseteq Y$ Teilmengen so, daß $f(X') \subseteq Y'$. Seien*

$$\begin{array}{rcl} T_{X'} & = & \{U \cap X' \,:\, U \in T_X\} \\ T_{Y'} & = & \{V \cap Y' \,:\, V \in T_Y\} \end{array}$$

die Spurtopologien auf X' resp. auf Y'; cf. §1.2.2. Dann ist

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{f|_{X'}^{Y'}} & Y' \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

bezüglich dieser Spurtopologien stetig.

Kurz, die Einschränkung einer stetigen Abbildung ist stetig.

Beweis. Sei $V' \overset{\text{off.}}{\subseteq} Y'$, i.e. sei $V' = V \cap Y'$ für ein $V \overset{\text{off.}}{\subseteq} Y$. Beachte, daß $X' \subseteq f^{-1}(Y')$. Es wird

$$\begin{array}{rcl} (f|_{X'}^{Y'})^{-1}(V') & = & f^{-1}(V') \cap X' \\ & = & f^{-1}(V \cap Y') \cap X' \\ & = & f^{-1}(V) \cap f^{-1}(Y') \cap X' \\ & = & f^{-1}(V) \cap X' \;\overset{\text{off.}}{\subseteq}\; X'\,, \end{array}$$

da $f^{-1}(V) \overset{\text{off.}}{\subseteq} X$ wegen der Stetigkeit von f. $\square$

2.1.2 Offene Abbildungen

Offene Abbildungen spielen nur eine Nebenrolle.

Definition. Eine Abbildung $X \xrightarrow{f} Y$ heißt *offen* (bezüglich T_X und T_Y), falls für alle $U \in T_X$ auch $f(U) \in T_Y$ ist.

Kurz, eine Abbildung heißt offen, falls Bilder offener Teilmengen offene Teilmengen sind.

Bei Bedarf reden wir auch von einer offenen Abbildung von (X, T_X) nach (Y, T_Y).

Bemerkung. *Seien $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ offen. Dann ist auch $X \xrightarrow{g \circ f} Z$ offen.*

Beweis. Ist $U \overset{\text{off.}}{\subseteq} X$, so auch $f(U) \overset{\text{off.}}{\subseteq} Y$ und also auch $(g \circ f)(U) = g(f(U)) \overset{\text{off.}}{\subseteq} Z$. $\square$

2.1.3 Homöomorphismen

Definition. Eine Abbildung $X \xrightarrow{f} Y$ heißt *Homöomorphismus,* falls sie bijektiv ist, sowie stetig und offen (bezüglich T_X und T_Y).

Manchmal wird ein Homöomorphismus auch $X \underset{\sim}{\xrightarrow{f}} Y$ geschrieben.

Gibt es einen Homöomorphismus von (X, T_X) nach (Y, T_Y), so heißen (X, T_X) und (Y, T_Y) *homöomorph,* geschrieben $(X, T_X) \simeq (Y, T_Y)$, oder kurz $X \simeq Y$. Homöomorphe topologische Räume können als "im wesentlichen gleich" angesehen werden.

Beispiel.

(1) Es ist $X \xrightarrow{\text{id}} X$ ein Homöomorphismus (bezüglich T_X und T_X). Insbesondere ist $X \simeq X$.

(2) Sei $X = \{1, 2\}$ und sei $T_X = \{\emptyset, \{1\}, \{1, 2\}\}$; es ist (X, T_X) der Sierpinski-Raum; cf. Aufgabe 2.

Wir erinnern an $T_{X,\,\text{diskret}} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$ und $T_{X,\,\text{verklumpt}} = \{\emptyset, \{1, 2\}\}$.

Es ist $X \xrightarrow{\text{id}} X$ eine bijektive Abbildung.

Sie ist eine stetige Abbildung von (X, T_X) nach $(X, T_{X,\,\text{verklumpt}})$, aber keine offene, da das Bild der offenen Teilmenge $\{1\}$ keine offene Teilmenge mehr ist. Wir merken uns also, daß es durchaus bijektive stetige Abbildungen gibt, die keine Homöomorphismen sind.

Sie ist eine offene Abbildung von (X, T_X) nach $(X, T_{X,\,\text{diskret}})$, aber keine stetige, da das Urbild der offenen Teilmenge $\{2\}$ keine offene Teilmenge mehr ist. Wir merken uns also, daß es durchaus bijektive offene Abbildungen gibt, die keine Homöomorphismen sind.

Bemerkung. *Seien $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ Homöomorphismen. Dann ist auch $X \xrightarrow{g \circ f} Z$ ein Homöomorphismus. Insbesondere folgt aus $X \simeq Y \simeq Z$, daß $X \simeq Z$.*

Beweis. Das Kompositum bijektiver Abbildungen ist bijektiv. Das Kompositum stetiger Abbildungen ist stetig; cf. erste Bemerkung in §2.1.1. Das Kompositum offener Abbildungen ist offen; cf. Bemerkung in §2.1.2. $\square$

Bemerkung. *Sei* $X \xrightarrow{f} Y$ *ein Homöomorphismus. Dann ist auch* $Y \xrightarrow{f^{-1}} X$ *ein Homöomorphismus. Insbesondere folgt aus* $X \simeq Y$*, daß* $Y \simeq X$*.*

Beweis. Es ist $Y \xrightarrow{f^{-1}} X$ bijektiv. Es ist $Y \xrightarrow{f^{-1}} X$ stetig, da $X \xrightarrow{f} Y$ offen ist, und $(f^{-1})^{-1}(U) = f(U)$ für $U \subseteq X$. Es ist $Y \xrightarrow{f^{-1}} X$ offen, da $X \xrightarrow{f} Y$ stetig ist, und $f^{-1}(V)$ für $V \subseteq X$ in seinen beiden Bedeutungen dieselbe Teilmenge von X darstellt – zum einen als Urbild unter f, zum anderen als Bild unter f^{-1}. ▫

Bemerkung. *Auf jeder Menge von topologischen Räumen* ([1]) *ist* $(\simeq)$ *eine Äquivalenzrelation.*

Beweis. Reflexivität steht in Beispiel (1). Symmetrie steht in voriger Bemerkung. Transitivität steht in vorvoriger Bemerkung. ▫

Bemerkung. *Sei* $X \xrightarrow[\sim]{f} Y$*. Sei* $X' \subseteq X$*. Schreibe* $Y' := f(X) \subseteq Y$*. Es ist* $X' \xrightarrow[\sim]{f|_{X'}^{Y'}} Y'$*,* $x \longmapsto f(x)$*.*

Beweis. Es ist $f|_{X'}^{Y'}$ bijektiv. Gemäß zweiter Bemerkung in §2.1.1 ist $f|_{X'}^{Y'}$ auch stetig. Zeigen wir, daß diese Abbildung bezüglich der Spurtopologien auf X' und auf Y' offen ist.

Nach Definition der Spurtopologie haben wir zu zeigen, daß $f|_{X'}^{Y'}(U \cap X') \overset{\text{off.!}}{\subseteq} Y'$ für $U \overset{\text{off.}}{\subseteq} X$. Da f bijektiv ist, ist

$$f|_{X'}^{Y'}(U \cap X') \;=\; f(U \cap X') \;=\; f(U) \cap f(X') \;=\; f(U) \cap Y' \,.$$

Da aber f offen ist, ist $f(U) \overset{\text{off.}}{\subseteq} Y$, und somit auch $f(U) \cap Y' \overset{\text{off.}}{\subseteq} Y'$ nach Definition der Spurtopologie auf Y'. ▫

2.2 Stetige Abbildungen zwischen metrischen Räumen – die ε-δ-Charakterisierung

Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume.

Sei $T_X := T^{(X,d_X)}$ die von d_X auf X induzierte Topologie.

Sei $T_Y := T^{(Y,d_Y)}$ die von d_Y auf Y induzierte Topologie.

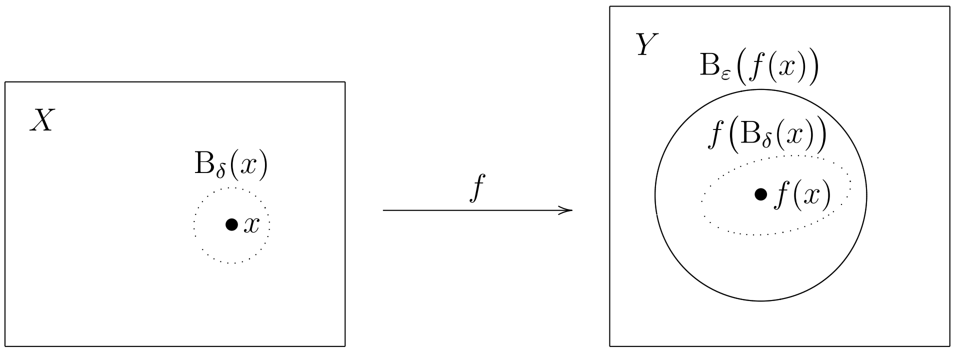
Lemma (ε-δ-Charakterisierung).

Eine Abbildung $X \xrightarrow{f} Y$ *ist genau dann stetig bzgl.* T_X *und* T_Y*, wenn es für alle* $x \in X$ *und alle* $\varepsilon \in \mathbf{R}_{>0}$ *ein* $\delta \in \mathbf{R}_{>0}$ *gibt mit*

$$f\big(\mathrm{B}_\delta(x)\big) \;\subseteq\; \mathrm{B}_\varepsilon(f(x)) \,.$$

[1] Man darf aus mengentheoretischen Gründen nicht von der Menge aller topologischen Räume reden, daher die merkwürdige Formulierung.

Skizze.



Beweis. Sei zum einen f stetig. Sei $x \in X$. Sei $\varepsilon \in \mathbf{R}_{>0}$. Es ist $\mathrm{B}_\varepsilon(f(x)) \overset{\text{off.}}{\subseteq} Y$; cf. Lemma aus §1.3.1. Also ist $f^{-1}\big(\mathrm{B}_\varepsilon(f(x))\big) \overset{\text{off.}}{\subseteq} X$. Da $x \in f^{-1}\big(\mathrm{B}_\varepsilon(f(x))\big)$, gibt es insbesondere ein $\delta \in \mathbf{R}_{>0}$ mit

$$\mathrm{B}_\delta(x) \;\subseteq\; f^{-1}\big(\mathrm{B}_\varepsilon(f(x))\big)\;,$$

i.e.

$$f\big(\mathrm{B}_\delta(x)\big) \;\subseteq\; \mathrm{B}_\varepsilon(f(x))\;.$$

Sei zum anderen für alle $x \in X$ und alle $\varepsilon \in \mathbf{R}_{>0}$ ein $\delta \in \mathbf{R}_{>0}$ so vorhanden, daß $f\big(\mathrm{B}_\delta(x)\big) \subseteq \mathrm{B}_\varepsilon(f(x))$. Sei $V \overset{\text{off.}}{\subseteq} Y$. Wir haben zu zeigen, daß $f^{-1}(V) \overset{\text{off.!}}{\subseteq} X$. Sei $x \in f^{-1}(V)$ gegeben. Dann ist $f(x) \in V$. Da V offen ist, gibt es ein $\varepsilon \in \mathbf{R}_{>0}$ mit $\mathrm{B}_\varepsilon(f(x)) \subseteq V$. Nach Voraussetzung gibt es nun ein $\delta \in \mathbf{R}_{>0}$ mit

$$f\big(\mathrm{B}_\delta(x)\big) \;\subseteq\; \mathrm{B}_\varepsilon(f(x)) \;\subseteq\; V\;,$$

woraus

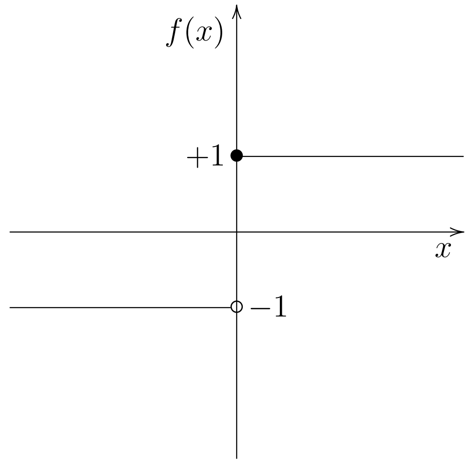
$$\mathrm{B}_\delta(x) \;\subseteq\; f^{-1}(V)\;.$$

Damit haben wir um jedes Element x von $f^{-1}(V)$ einen Ball $\mathrm{B}_\delta(x)$ gefunden, der in $f^{-1}(V)$ liegt. Dies zeigt $f^{-1}(V) \overset{\text{off.}}{\subseteq} X$. □

Beispiel. Sei

$$\begin{array}{rcl}\mathbf{R} & \xrightarrow{f} & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} -1 & \text{falls } x < 0 \\ +1 & \text{falls } x \geqslant 0\,. \end{cases}\end{array}$$

Skizze.



Wir wollen auf zwei Weisen zeigen, daß f nicht stetig ist. Zum einen direkt nach Definition, auf topologischem Weg. Zum anderen auf metrischem Weg, mit der ε-δ-Charakterisierung aus vorstehendem Lemma.

(1) Auf topologischem Weg. Es ist $(0,2) \overset{\text{off.}}{\subseteq} \mathbf{R}$. Es ist $f^{-1}\big((0,2)\big) = [0,+\infty)$. Dies ist keine offene Teilmenge von $\mathbf{R}$, da es um 0 keinen Ball mit positivem Radius gibt, der in $[0,+\infty)$ liegt. Also ist f nicht stetig.

(2) Auf metrischem Weg. Sei $x = 0$. Sei $\varepsilon = 1$. Es ist

$$f\big(\mathrm{B}_\delta(x)\big) \;=\; f\big((-\delta,\delta)\big) \;=\; \{-1,\,+1\} \;\not\subseteq\; (0,2) \;=\; \mathrm{B}_1(1) \;=\; \mathrm{B}_\varepsilon(f(x))\;.$$

für alle $\delta \in \mathbf{R}_{>0}$. Also ist f nicht stetig.

Der etwas vage, aber hilfreiche Merksatz aus der Analysis, stetige Abbildungen von $\mathbf{R}$ nach $\mathbf{R}$ seien diejenigen, deren Graph gezeichnet werden kann, ohne den Stift abzusetzen, bleibt im Normalfall weiterhin gültig. Für Funktionen wie $f(x) = \sin(1/x)$, fortgesetzt mit $f(0) := 0$, ist hingegen nicht klar, was "absetzen" heißen soll, und man ist froh, auf eine mathematische Charakterisierung, etwa mittels ε und δ, zurückgreifen zu können. Vgl. Aufgabe 21.(2).

2.3 Stückweise Definition stetiger Abbildungen

2.3.1 Stückweise Definition von Abbildungen

Seien X und Z Mengen. Sei I eine Indexmenge. Seien $M_i \subseteq X$ für $i \in I$ so, daß $\bigcup_{i\in I} M_i = X$.

Bemerkung. *Sei für $i \in I$ je eine Abbildung*

$$M_i \xrightarrow{f_i} Z$$

so gegeben, daß

$$f_i|_{M_i \cap M_j} \;=\; f_j|_{M_i \cap M_j}$$

für alle $i,\, j \,\in\, I$. Dann gibt es genau eine Abbildung

$$X \xrightarrow{f} Z$$

mit $f|_{M_i} = f_i$ für alle $i \in I$.

Beweis. Zeigen wir die Eindeutigkeit. Seien f und $\tilde{f}$ zwei solche Abbildungen. Sei $x \in X$. Wir haben $f(x) \overset{!}{=} \tilde{f}(x)$ zu zeigen. Aber $x \in M_i$ für ein $i \in I$, und also

$$f(x) \;=\; f|_{M_i}(x) \;=\; f_i(x) \;=\; \tilde{f}|_{M_i}(x) \;=\; \tilde{f}(x)\;.$$

Zeigen wir die Existenz. Setzt man $f(x) := f_i(x)$ falls $x \in M_i$, so definiert dies eine Abbildung. Denn ist $x \in M_i$ und $x \in M_j$, so wird

$$f_i(x) \;=\; f_i|_{M_i \cap M_j}(x) \;=\; f_j|_{M_i \cap M_j}(x) \;=\; f_j(x)\;.$$

Damit ist jedem $x \in X$ ein eindeutig bestimmtes Bild $f(x)$ zugeordnet. ▫

2.3.2 Mittels einer offenen Überdeckung

Sei X ein topologischer Raum. Sei I eine Indexmenge. Seien $U_i \overset{\text{off.}}{\subseteq} X$ für $i \in I$ so, daß $\bigcup_{i \in I} U_i = X$. Man nennt so ein Tupel $(U_i)_{i \in I}$, oder kurz nur den Ausdruck $\bigcup_{i \in I} U_i = X$, auch eine *offene Überdeckung* von X.

Bemerkung. *Eine Teilmenge $Y \subseteq X$ ist genau dann offen in X, wenn für alle $i \in I$ die Teilmenge $Y \cap U_i$ in U_i offen ist.*

Beweis. Ist $Y \overset{\text{off.}}{\subseteq} X$, so ist nach Definition der Spurtopologie auch $Y \cap U_i \overset{\text{off.}}{\subseteq} U_i$ für $i \in I$.

Ist umgekehrt $Y \cap U_i \overset{\text{off.}}{\subseteq} U_i$ für alle $i \in I$, so ist wegen $U_i \overset{\text{off.}}{\subseteq} Y$ auch $Y \cap U_i \overset{\text{off.}}{\subseteq} X$; vgl. Aufgabe 6.(2). Also ist

$$Y \;=\; \left(\textstyle\bigcup_{i \in I} U_i\right) \cap Y \;=\; \textstyle\bigcup_{i \in I} (U_i \cap Y) \;\overset{\text{off.}}{\subseteq}\; X$$

nach (Top 2). ▫

Satz 1 (Stückweise Definition, offene Überdeckung) *Sei weiterhin X ein topologischer Raum, I eine Indexmenge und $(U_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von X. Sei Z ein topologischer Raum. Sei für $i \in I$ je eine stetige Abbildung*

$$U_i \xrightarrow{f_i} Z$$

so gegeben, daß

$$f_i|_{U_i \cap U_j} \;=\; f_j|_{U_i \cap U_j}$$

für alle $i,\ j \in I$. Dann gibt es nach der Bemerkung in §2.3.1 *genau eine Abbildung*

$$X \xrightarrow{f} Z$$

mit $f|_{U_i} = f_i$ für alle $i \in I$. Diese Abbildung $X \xrightarrow{f} Z$ ist stetig.

Beweis. Sei $W \overset{\text{off.}}{\subseteq} Z$. Wir haben zu zeigen, daß $f^{-1}(W) \overset{\text{off.!}}{\subseteq} X$. Nach vorstehender Bemerkung genügt es hierfür zu zeigen, daß $f^{-1}(W) \cap U_i \overset{\text{off.!}}{\subseteq} U_i$ für $i \in I$. Nun ist aber

$$f^{-1}(W) \cap U_i \;=\; (f|_{U_i})^{-1}(W) \;=\; f_i^{-1}(W) \;\overset{\text{off.}}{\subseteq}\; U_i$$

wegen der vorausgesetzten Stetigkeit von $U_i \xrightarrow{f_i} Z$. □

Will man nun Satz 1 etwa dazu verwenden, eine stetige Abbildung von **R** nach **R** fallweise zu definieren, so stellt man fest, daß offene Überdeckungen für Fallunterscheidungen recht praxisfern sind. Satz 2 in §2.3.3 ist da besser, wie am dort darauffolgenden Beispiel zu sehen.

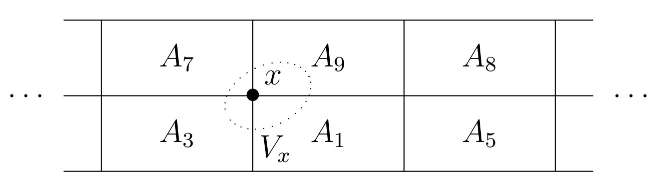
2.3.3 Mittels einer lokalendlichen abgeschlossenen Überdeckung

Sei X ein topologischer Raum. Sei I eine Indexmenge. Seien $A_i \overset{\text{abg.}}{\subseteq} X$ für $i \in I$ so, daß $\bigcup_{i\in I} A_i = X$ und daß für alle $x \in X$ ein $x \in V_x \overset{\text{off.}}{\subseteq} X$ existiert mit

$$I_x \;:=\; \{i \in I \;:\; A_i \cap V_x \neq \emptyset\} \qquad \text{endlich.}$$

Man nennt so ein Tupel $(A_i)_{i\in I}$ auch eine *lokalendliche abgeschlossene Überdeckung* von X.

Skizze.



$\rightsquigarrow \qquad I_x \;=\; \{7, 9, 3, 1\}$

Ist z.B. I selbst endlich, so können wir für alle $x \in X$ die Wahl $V_x = X$ treffen.

Bemerkung. *Eine Teilmenge $Y \subseteq X$ ist genau dann offen in X, wenn für alle $i \in I$ die Teilmenge $Y \cap A_i$ in A_i offen ist.*

Beweis. Ist $Y \overset{\text{off.}}{\subseteq} X$, so ist nach Definition der Spurtopologie auch $Y \cap A_i \overset{\text{off.}}{\subseteq} A_i$ für $i \in I$.

Sei umgekehrt $Y \cap A_i \overset{\text{off.}}{\subseteq} A_i$ für alle $i \in I$. Schreibe $Y' := X \smallsetminus Y$. Also $X = Y \sqcup Y'$.

Beachte, daß $Y' \cap A_i \overset{\text{abg.}}{\subseteq} A_i \overset{\text{abg.}}{\subseteq} X$, also $Y' \cap A_i \overset{\text{abg.}}{\subseteq} X$ für $i \in I$; vgl. Aufgabe 6.(3).

Wir wollen zeigen, daß $Y \overset{\text{off.!}}{\subseteq} X$. Da $(V_x)_{x\in X}$ wegen $x \in V_x$ für $x \in X$ eine offene Überdeckung von X ist, genügt es mit der Bemerkung aus §2.3.2 zu zeigen, daß $V_x \cap Y \overset{\text{off.!}}{\subseteq} V_x$ für $x \in X$, i.e. daß $V_x \cap Y' \overset{\text{abg.!}}{\subseteq} V_x$ für $x \in X$.

Sei $x \in X$. Es ist

$$\begin{array}{rcl} V_x \cap Y' & = & \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \cap V_x \cap Y' \\ & = & \left(\bigcup_{i\in I}(A_i \cap V_x)\right) \cap Y' \\ & = & \left(\bigcup_{i\in I_x}(A_i \cap V_x)\right) \cap Y' \\ & = & \left(\bigcup_{i\in I_x} A_i\right) \cap V_x \cap Y' \\ & = & \left(\bigcup_{i\in I_x}(A_i \cap Y')\right) \cap V_x \\ & \overset{\text{abg.}}{\subseteq} & V_x\ , \end{array}$$

da I_x endlich und folglich $\bigcup_{i\in I_x}(A_i \cap Y') \overset{\text{abg.}}{\subseteq} X$; vgl. Aufgabe 4.(5). ▫

Satz 2 (Stückweise Definition, lokalendliche abgeschlossene Überdeckung)

Sei weiterhin X ein topologischer Raum, I eine Indexmenge und $(A_i)_{i\in I}$ eine lokalendliche Überdeckung von X. Sei Z ein topologischer Raum. Sei für $i \in I$ je eine stetige Abbildung

$$A_i \xrightarrow{f_i} Z$$

so gegeben, daß

$$f_i|_{A_i\cap A_j} \;=\; f_j|_{A_i\cap A_j}$$

für alle $i,\ j \in I$. Dann gibt es nach der Bemerkung in §2.3.1 *genau eine Abbildung*

$$X \xrightarrow{f} Z$$

mit $f|_{A_i} = f_i$ für alle $i \in I$. Diese Abbildung $X \xrightarrow{f} Z$ ist stetig.

Beweis. Sei $W \overset{\text{off.}}{\subseteq} Z$. Wir haben zu zeigen, daß $f^{-1}(W) \overset{\text{off.!}}{\subseteq} X$. Nach vorstehender Bemerkung genügt es hierfür zu zeigen, daß $f^{-1}(W) \cap A_i \overset{\text{off.!}}{\subseteq} A_i$ für $i \in I$. Nun ist aber

$$f^{-1}(W) \cap A_i \;=\; (f|_{A_i})^{-1}(W) \;=\; f_i^{-1}(W) \;\overset{\text{off.}}{\subseteq}\; A_i$$

wegen der vorausgesetzten Stetigkeit von $A_i \xrightarrow{f_i} Z$. ▫

Beispiel. Sei

$$\begin{array}{rcl} f\ :\mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} +x^2 & \text{für } x \geqslant 0 \\ -x^2 & \text{für } x \leqslant 0\ . \end{cases} \end{array}$$

In anderen Worten, sei $A_1 = \mathbf{R}_{\leqslant 0}$ und $f_1 : A_1 \longrightarrow \mathbf{R}$, $x \longmapsto -x^2$, und sei $A_2 = \mathbf{R}_{\geqslant 0}$ und $f_2 : A_2 \longrightarrow \mathbf{R}$, $x \longmapsto +x^2$. Es sind f_1 und f_2 stetig; cf. Aufgabe 20.(2) und Beispiel $(2,3)$ aus §2.1.1.

Es ist f via $f|_{A_1} = f_1$ und $f|_{A_2} = f_2$ definiert im Sinne der Bemerkung aus §2.3.1. Da (A_1, A_2) eine lokalendliche (da endliche) abgeschlossene Überdeckung von $\mathbf{R}$ ist und da $f_1|_{A_1\cap A_2} = f_1|_{\{0\}} = f_2|_{\{0\}} = f_2|_{A_1\cap A_2}$ wegen $f_1(0) = 0 = f_2(0)$, ist f stetig.

Bemerkung. Die Bedingung der Existenz der offenen Mengen V_x mit I_x endlich kann nicht ersatzlos gestrichen werden. Sei etwa $X = \mathbf{R}$, $Z = \mathbf{R}$, $I = \mathbf{R}$ und $A_r = \{r\}$ für $r \in \mathbf{R}$. Dann ist $A_r = \{r\} = [r, r] \overset{\text{abg.}}{\subseteq} \mathbf{R}$ und $\bigcup_{r\in I} A_r = \bigcup_{r\in\mathbf{R}}\{r\} = \mathbf{R}$.

Aber es gibt etwa für $0 \in \mathbf{R} = X$ kein V_0 mit $0 \in V_0 \overset{\text{off.}}{\subseteq} \mathbf{R}$ und $V_0 \cap A_r = \emptyset$ für alle bis auf endlich viele $r \in \mathbf{R}$. Denn ein solches V_0 enthält immer ein offenes Intervall $(0 - \varepsilon, 0 + \varepsilon)$ für ein $\varepsilon \in \mathbf{R}_{>0}$ als Teilmenge, und dieses besteht aus unendlich vielen Elementen von $\mathbf{R}$. Also ist $(A_r)_{r\in\mathbf{R}}$ zwar schon eine abgeschlossene Überdeckung von $X = \mathbf{R}$, aber keine lokalendliche.

Damit ist die Voraussetzung des Satzes 2 nicht erfüllt. Und auch die Aussage ist nicht mehr haltbar, wie wir nun sehen wollen.

Für $r \in \mathbf{R}$ sei etwa $f_r : \{r\} \longrightarrow \mathbf{R}$ definiert durch $f_r(r) := -1$ falls $r < 0$, und durch $f_r(r) := +1$ falls $r \geqslant 0$. Da die Spurtopologie auf $\{r\}$ diskret ist, ist f_r stetig; vgl. Beispiel (5) aus §2.1.1.

Die sich aus den f_r ergebende Abbildung $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$, $x \longmapsto \begin{cases} -1 & \text{falls } x < 0 \\ +1 & \text{falls } x \geqslant 0 \end{cases}$ ist hingegen nicht stetig; cf. Beispiel aus §2.2.

Kapitel 3

Konstruktionen

3.1 Subbasen

Definition. Sei X eine Menge. Sei $S \subseteq \mathrm{Pot}(X)$. Sei

$$\langle S \rangle \;=\; \langle S \rangle_X \;:=\; \bigcap_{\substack{S \subseteq T \subseteq \mathrm{Pot}(X)\,, \\ T \text{ ist Topologie auf } X}} T$$

die von S *erzeugte* Topologie auf X.

Bemerkung.

(1) *Es ist $\langle S \rangle_X$ in der Tat eine Topologie auf X. Es ist $S \subseteq \langle S \rangle_X$.*

(2) *Ist T eine Topologie auf X, und ist $S \subseteq T$, so ist $\langle S \rangle_X \subseteq T$.*

(3) *Schreibe*

$$S' \;:=\; \{\textstyle\bigcap_{i=1}^{k} U_i \;:\; k \in \mathbf{Z}_{\geqslant 0}\,,\, U_i \in S \text{ für } 1 \leqslant i \leqslant k\}\;.$$

Schreibe

$$S'' \;:=\; \{\textstyle\bigcup_{i \in I} V_i \;:\; I \text{ Indexmenge, } V_i \in S' \text{ für } i \in I\}\;.$$

Dann ist

$$\langle S \rangle_X \;=\; S''\;.$$

Kurz, $\langle S \rangle_X$ besteht aus beliebigen Vereinigungen endlicher Schnitte von in S gelegenen Teilmengen.

(4) *Sei T eine Topologie auf X mit $S \subseteq T \subseteq \mathrm{Pot}(X)$.*

Ist jede in T liegende Teilmenge von X eine Vereinigung von endlichen Schnitten von in S gelegenen Teilmengen von X, so ist $T = \langle S \rangle_X$.

In anderen Worten, ist jede offene Teilmenge in X eine Vereinigung von endlichen Schnitten von Teilmengen aus S, so ist die betrachtete Topologie von S erzeugt.

Beweis. Beachte zunächst, daß $S \subseteq S' \subseteq S''$ – es sind auch Schnitte resp. Vereinigungen mit nur einem Teilnehmer zugelassen.

Zu (1). Sei J eine Indexmenge. Sei T_j eine Topologie auf X für $j \in J$. Wir zeigen allgemeiner, daß auch $\bigcap_{j\in J} T_j$ wieder eine Topologie auf X ist. Speziell trifft dies dann auch für $\langle S\rangle_X = \bigcap_{\substack{S\subseteq T\subseteq \mathrm{Pot}(X)\\ T \text{ ist Topologie auf } X}} T$ zu.

Zu (Top 1). Es ist $\emptyset \in T_j$ für alle $j \in J$, also auch $\emptyset \in \bigcap_{j\in J} T_j$. Es ist $X \in T_j$ für alle $j \in J$, also auch $X \in \bigcap_{j\in J} T_j$.

Zu (Top 2). Sei I eine Indexmenge. Sei $U_i \in \bigcap_{j\in J} T_j$ für alle $i \in I$. Dann ist $U_i \in T_j$ für alle $i \in I$ und alle $j \in J$. Also ist $\bigcup_{i\in I} U_i \in T_j$ für alle $j \in J$. Folglich ist $\bigcup_{i\in I} U_i \in \bigcap_{j\in J} T_j$.

Zu (Top 3). Seien $U, V \in \bigcap_{j\in J} T_j$. Dann sind $U, V \in T_j$ für alle $j \in J$. Folglich ist $U \cap V \in T_j$ für alle $j \in J$. Also ist $U \cap V \in \bigcap_{j\in J} T_j$.

Ferner ist $S \subseteq \bigcap_{\substack{S\subseteq T\subseteq \mathrm{Pot}(X)\\ T \text{ ist Topologie auf } X}} T = \langle S\rangle_X$, da S Teilmenge jedes Teilnehmers dieses Schnitts ist.

Zu (2). Es ist das vorliegende T ein Teilnehmer des $\langle S\rangle_X$ definierenden Schnitts. Somit ist T eine Obermenge der resultierenden Schnittmenge.

Zu (3). Ist $k \in \mathbf{Z}_{\geqslant 0}$ und ist $U_i \in S$ für $1 \leqslant i \leqslant k$, so ist wegen $S \subseteq \langle S\rangle_X$ und $\langle S\rangle_X$ Topologie auch $\bigcap_{i=1}^{k} U_i \in \langle S\rangle_X$; vgl. Aufgabe 4.(2). Also ist $S' \subseteq \langle S\rangle_X$.

Ist I eine Indexmenge, und ist $V_i \in S'$ für $i \in I$, so ist wegen $S' \subseteq \langle S\rangle_X$ und $\langle S\rangle_X$ Topologie auch $\bigcup_{i\in I} V_i \in \langle S\rangle_X$. Also ist $S'' \subseteq \langle S\rangle_X$.

Zu zeigen bleibt also $S'' \overset{!}{\supseteq} \langle S\rangle_X$. Da $S \subseteq S' \subseteq S''$, genügt es dank (2) hierfür zu zeigen, daß S'' eine Topologie auf X ist.

Zu (Top 1). Ist die Indexmenge $I = \emptyset$, so ist die Vereinigung von Teilmengen von X über I die leere Teilmenge. Also ist $\emptyset \in S''$.

Der Schnitt über 0 Teilmengen von X ist gleich der vollen Teilmenge X. Also ist $X \in S' \subseteq S''$.

Zu (Top 2). Sei L eine Indexmenge. Sei $W_\ell \in S''$ für $\ell \in L$. Wir wollen zeigen, daß $\bigcup_{\ell\in L} W_\ell \overset{!}{\in} S''$.

Schreibe $W_\ell = \bigcup_{i\in I_\ell} V_{\ell,i}$ mit I_ℓ Indexmenge und $V_{\ell,i} \in S'$. Es wird

$$\bigcup_{\ell\in L} W_\ell \;=\; \bigcup_{\ell\in L} \bigcup_{i\in I_\ell} V_{\ell,i} \;=\; \bigcup_{(\ell,i)\,\in\, \bigsqcup_{\ell\in L}\{\ell\}\times I_\ell} V_{\ell,i} \;\in\; S''\,.$$

Zu (Top 3). Seien $W', W'' \in S''$. Wir wollen zeigen, daß $W' \cap W'' \overset{!}{\in} S''$.

Schreibe $W' = \bigcup_{i'\in I'} V'_{i'}$ mit einer Indexmenge I' und $V'_{i'} \in S'$ für $i' \in I'$.

Schreibe $W'' = \bigcup_{i''\in I''} V''_{i''}$ mit einer Indexmenge I'' und $V''_{i''} \in S'$ für $i'' \in I''$.

Es wird
$$W' \cap W'' \;=\; (\bigcup_{i' \in I'} V'_{i'}) \cap (\bigcup_{i'' \in I''} V''_{i''}) \;=\; \bigcup_{(i',i'') \,\in\, I' \times I''} (V'_{i'} \cap V''_{i''}) \;.$$

Dank der bereits gezeigten Eigenschaft (Top 2) genügt es also, $V'_{i'} \cap V''_{i''} \overset{!}{\in} S''$ für $i' \in I'$ und $i'' \in I''$ zu zeigen.

Seien $i' \in I'$ und $i'' \in I''$ gegeben. Schreibe $V'_{i'} = \bigcap_{j=1}^{k'} U_j$ und $V''_{i''} = \bigcap_{j=k'+1}^{k'+k''} U_j$ mit $U_j \in S$ für $1 \leqslant j \leqslant k' + k''$. Es wird
$$V'_{i'} \cap V''_{i''} \;=\; (\bigcap_{j=1}^{k'} U_j) \cap (\bigcap_{j=k'+1}^{k'+k''} U_j) \;=\; \bigcap_{j=1}^{k'+k''} U_j \;\in\; S' \;\subseteq\; S'' \;.$$

Zu (4). Mit (2) folgt $\langle S \rangle_X \subseteq T$ wegen $S \subseteq T$ und T Topologie auf X. Auf der anderen Seite ist $\langle S \rangle_X \overset{(3)}{=} S'' \supseteq T$ wegen der gemachten Voraussetzung an S und T. Also ist in der Tat $\langle S \rangle_X = T$. ▫

Definition. Ist T eine Topologie auf X, und ist $T = \langle S \rangle_X$ für ein $S \subseteq \mathrm{Pot}(X)$, so heißt S eine *Subbasis* von (X, T) (oder von T, oder von X).

Beispiel.

(1) Sei $X = \{1, 2, 3\}$. Sei $S = \{\{1,2\}, \{1,3\}\}$. Es ist, in der Bezeichnung von obiger Bemerkung (2),
$$S' \;=\; \{\{1\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{1,2,3\}\} \;,$$
wobei man letztere erhält, wenn man beim Schnitt auf Teilnehmer verzichtet. Sodann wird
$$\langle S \rangle_X \;=\; S'' \;=\; \{\emptyset, \{1\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{1,2,3\}\} \;,$$
wobei man erstere erhält, wenn man bei der Vereinigung auf Teilnehmer verzichtet. Cf. Aufgabe 17.

(2) Es ist $S := \{\mathbf{R}_{>a} \;:\; a \in \mathbf{R}\} \cup \{\mathbf{R}_{<b} \;:\; b \in \mathbf{R}\}$ eine Subbasis von $\mathbf{R}$.

Denn zum einen sind die angeführten Teilmengen offen in $\mathbf{R}$; vgl. zweite Bemerkung in §1.2.1.

Zeigen wir, daß sich zum anderen jede offene Teilmenge U in $\mathbf{R}$ als Vereinigung von endlichen Schnitten von Teilmengen aus S schreiben läßt.

Für $x \in U$ gibt es ein $\varepsilon_x \in \mathbf{R}_{>0}$ mit $(x - \varepsilon_x,\, x + \varepsilon_x) \subseteq U$. Also ist
$$U \;=\; \bigcup_{x \in U} (x - \varepsilon_x,\, x + \varepsilon_x) \;=\; \bigcup_{x \in U} (\mathbf{R}_{>x-\varepsilon_x} \cap \mathbf{R}_{<x+\varepsilon_s}) \;.$$

Die erste Gleichheit trifft hierbei zu, da zum einen $U \subseteq \bigcup_{x \in U} (x - \varepsilon_x,\, x + \varepsilon_x)$, da $x \in (x - \varepsilon_x,\, x + \varepsilon_x)$ für alle $x \in U$; und zum anderen die umgekehrte Inklusion nach Wahl der ε_x gilt.

(3) Ist (X, T) ein topologischer Raum, so ist T selbst eine Subbasis von X, i.e. $T = \langle T \rangle_X$, da mit Bemerkung $(1, 2)$ gilt, daß $T \subseteq \langle T \rangle_X \subseteq T$.

(4) Ist X eine Menge, so ist $\langle\emptyset\rangle_X = T_{X,\,\text{verklumpt}}$. Denn nach Definition ist $\langle\emptyset\rangle_X$ der Schnitt aller Topologien auf X, und davon ist die verklumpte Topologie in jeder anderen enthalten.

Lemma. *Seien (X, T_X) und (Y, T_Y) topologische Räume. Sei $S \subseteq T_Y$ eine Subbasis von T_Y, i.e. sei $\langle S\rangle_Y = T_Y$. Eine Abbildung*

$$X \xrightarrow{f} Y$$

ist genau dann stetig, wenn $f^{-1}(V) \overset{\text{off.}}{\subseteq} Y$ für alle $V \in S$.

Beweis. Ist f stetig, so ist $f^{-1}(V) \overset{\text{off.}}{\subseteq} Y$ für alle $V \in S$, da dies ja sogar für alle $V \in T_Y$ zutrifft.

Sei umgekehrt $f^{-1}(V) \overset{\text{off.}}{\subseteq} Y$ für alle $V \in S$. Schreibe, wie in obiger Bemerkung (2),

$$\begin{array}{lcl} S' & := & \{\bigcap_{i=1}^k V_i \; : \; k \in \mathbf{Z}_{\geqslant 0}\,,\, V_i \in S \text{ für } 1 \leqslant i \leqslant k\} \\ S'' & := & \{\bigcup_{i\in I} V_i' \; : \; I \text{ Indexmenge, } V_i' \in S' \text{ für } i \in I\}\;. \end{array}$$

Sei $V'' \overset{\text{off.}}{\subseteq} Y$. Wir haben zu zeigen, daß $f^{-1}(V'') \overset{\text{off.!}}{\subseteq} X$.

Nach obiger Bemerkung (2) ist $V'' \in S''$. Schreibe $V'' = \bigcup_{i\in I} V_i'$ mit einer Indexmenge I und mit $V_i' \in S'$ für $i \in I$. Es wird

$$f^{-1}(V'') \;=\; f^{-1}(\bigcup_{i\in I} V_i') \;=\; \bigcup_{i\in I} f^{-1}(V_i')\;.$$

Damit genügt es zu zeigen, daß $f^{-1}(V_i') \overset{\text{off.!}}{\subseteq} X$ für $i \in I$. Schreibe $V_i' = \bigcap_{j=1}^k V_{i,j}$ mit $V_{i,j} \in S$. Es wird

$$f^{-1}(V_i') \;=\; f^{-1}(\bigcap_{j=1}^k V_{i,j}) \;=\; \bigcap_{j=1}^k f^{-1}(V_{i,j})\;.$$

Da $V_{i,j} \in S$, ist $f^{-1}(V_{i,j})$ nach Voraussetzung eine offene Teilmenge von X. Also gilt dies auch für diese Schnittmenge, d.h. für $f^{-1}(V_i')$. □

3.2 Basen

Sei (X, T) ein topologischer Raum.

Definition. Eine Teilmenge $B \subseteq T$ heißt *Basis* von (X, T) (oder von T, oder von X), falls für alle $U \overset{\text{off.}}{\subseteq} X$ und alle $x \in U$ noch ein $V \in B$ mit $x \in V \subseteq U$ existiert.

Bemerkung. *Sei B eine Basis von (X, T).*

(1) *Jede offene Teilmenge von X ist Vereinigung von in B gelegenen Teilmengen.*

(2) *Es ist B auch eine Subbasis von (X, T).*

Beweis.

Zu (1). Sei $U \overset{\text{off.}}{\subseteq} X$. Für $x \in U$ sei $V_x \in B$ mit $x \in V_x \subseteq U$. Dann wird $U = \bigcup_{x \in U} V_x$, wobei $\subseteq$ wegen $x \in V_x$ für $x \in U$, und $\supseteq$ wegen $V_x \subseteq U$ gilt.

Zu (2). Nach Bemerkung (4) aus §3.1 sollte hierzu jede offene Teilmenge von X eine Vereinigung von endlichen Schnitten von in B gelegenen Teilmengen sein. Nach (1) ist eine offene Teilmenge von X nun aber sogar eine Vereinigung von in B gelegenen Teilmengen, also, ausführlich gesagt, eine Vereinigung von Schnitten mit je nur einem Teilnehmer von in B gelegenen Mengen. ▫

Beispiel.

(1) Die Subbasis $S = \{\mathbf{R}_{>a} \,:\, a \in \mathbf{R}\} \cup \{\mathbf{R}_{<b} \,:\, b \in \mathbf{R}\}$ von $\mathbf{R}$ aus Beispiel (2) von §3.1 ist keine Basis. In der Tat ist zwar e.g. $(0, 2) \overset{\text{off.}}{\subseteq} \mathbf{R}$, aber für $1 \in (0, 2)$ gibt es keine in S gelegene Teilmenge V mit $1 \in V \subseteq (0, 2)$. In der Tat ist keine in S gelegene Teilmenge von $\mathbf{R}$ eine Teilmenge von $(0, 2)$.

(2) Sei (X, d) ein metrischer Raum.

Es ist $B := \{\mathrm{B}_\varepsilon(x) \,:\, x \in X,\ \varepsilon \in \mathbf{R}_{>0}\}$ eine Basis der Topologie $T^{(X,d)}$ auf X; cf. §1.3.1.

Zunächst ist $B \subseteq T^{(X,d)}$ dank des Lemmas aus §1.3.2.

Sei ferner $U \overset{\text{off.}}{\subseteq} X$. Für $x \in U$ gibt es ein $\varepsilon \in \mathbf{R}_{>0}$ mit $x \subseteq \mathrm{B}_\varepsilon(x) \subseteq U$. Das ist ja gerade die Definition der offenen Teilmengen in X.

(3) Als Beispiel für (2) können wir für $n \in \mathbf{Z}_{\geqslant 0}$ die Basen

$$\{\mathrm{B}_\varepsilon^{(2)}(x) \,:\, x \in \mathbf{R}^n,\ \varepsilon \in \mathbf{R}_{>0}\}$$

und

$$\{\mathrm{B}_\varepsilon^{(\infty)}(x) \,:\, x \in \mathbf{R}^n,\ \varepsilon \in \mathbf{R}_{>0}\}$$

von $\mathbf{R}^n$ anführen. Vgl. §1.3.5.4, §1.3.5.5.

(4) Wir verkleinern die erste der in (3) angeführten Basen noch ein wenig.

Schreibe $\mathrm{B}_\varepsilon(x) := \mathrm{B}_\varepsilon^{(2)}(x)$ und $d(x, y) := d^{(2)}(x, y)$, wobei $x,\ y \in \mathbf{R}^n$ und $\varepsilon \in \mathbf{R}_{>0}$.

Es ist auch

$$B \;:=\; \{\mathrm{B}_\varepsilon(x) \,:\, x \in \mathbf{Q}^n,\ \varepsilon \in \mathbf{Q}_{>0}\}$$

eine Basis von $\mathbf{R}^n$.

Wir *behaupten* zunächst, daß es zu jedem $x = (x_i)_i \in \mathbf{R}^n$ und jedem $\eta \in \mathbf{R}_{>0}$ ein $y = (y_i)_i \in \mathbf{Q}^n$ mit $d(x, y) < \eta$ gibt.

Sei hierzu $k \in \mathbf{Z}_{\geqslant 0}$ so, daß $10^{-k} < \eta/\sqrt{n}$. Sei $1 \leqslant i \leqslant n$. Sei

$$y_i \;:=\; 10^{-k}\lfloor 10^k x_i \rfloor \;\in\; \mathbf{Q}\,.$$

(Ist z.B. $x_i = 2,3854\ldots$ und $k = 2$, so ist $y_i = 10^{-2}\lfloor 238,54\ldots\rfloor = 2,38$.)

Wegen

$$10^k x_i - 10^k y_i \;=\; 10^k x_i - \lfloor 10^k x_i \rfloor \;\in\; [0,1)$$

ist $x_i - y_i \in [0, 10^{-k})$. Daher ist

$$d(y,x) \;=\; \left(\sum_{i=1}^n (y_i - x_i)^2\right)^{1/2} \;\leqslant\; \left(\sum_{i=1}^n (10^{-k})^2\right)^{1/2} \;=\; 10^{-k}\sqrt{n} \;<\; \eta\,.$$

Dies zeigt die *Behauptung.*

Zeigen wir nun, daß B eine Basis von $\mathbf{R}^n$ ist. Sei $U \overset{\text{off.}}{\subseteq} \mathbf{R}^n$. Sei $x \in U$. Wir haben ein $V \in B$ mit $x \overset{!}{\in} V \overset{!}{\subseteq} U$ zu finden.

Sei $\varepsilon \in \mathbf{R}_{>0}$ so, daß $\mathrm{B}_\varepsilon(x) \subseteq U$. Sei $\ell \in \mathbf{Z}_{\geqslant 0}$ mit $10^{-\ell} < \varepsilon/2$. Sei

$$\xi \;:=\; 10^{-\ell}\lfloor 10^{\ell}\varepsilon/2 \rfloor \;\in\; \mathbf{Q}\,.$$

Es ist $0 < \xi \leqslant \varepsilon/2$, da $\varepsilon/2 - \xi \in [0, 10^{-\ell}) \subseteq [0, \varepsilon/2)$.

Sei mit vorstehender Behauptung ein $y \in \mathbf{Q}^n$ so gefunden, daß $d(y,x) < \xi$.

Es ist $V := \mathrm{B}_\xi(y) \in B$.

Es ist $x \in V = \mathrm{B}_\xi(y)$, da $d(x,y) < \xi$.

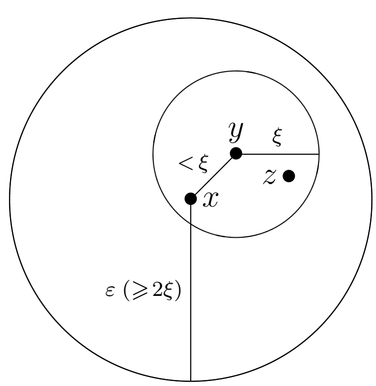
Es ist $V = \mathrm{B}_\xi(y) \subseteq \mathrm{B}_\varepsilon(x)$. Denn sei $z \in \mathrm{B}_\xi(y)$, i.e. $d(z,y) < \xi$. Dann ist

$$d(z,x) \;\leqslant\; d(z,y) + d(y,x) \;<\; \xi + \xi \;\leqslant\; \varepsilon\,,$$

also $z \in \mathrm{B}_\varepsilon(x)$.

Insgesamt wird also $x \in V = \mathrm{B}_\xi(y) \subseteq \mathrm{B}_\varepsilon(x) \subseteq U$.

Skizze.



(5) Ist (X,T) ein topologischer Raum, so ist T selbst eine Basis von (X,T).

3.3 Initial und final

3.3.1 Initiale Topologie

Sei X eine Menge. Sei $k \in \mathbf{Z}_{\geqslant 1}$. Seien (Y_i, T_{Y_i}) topologische Räume für $1 \leqslant i \leqslant k$. Seien $X \xrightarrow{f_i} Y_i$ Abbildungen für $1 \leqslant i \leqslant k$.

$$\begin{tikzcd}
 & Y_1 \\
 & Y_2 \\
X \arrow[uur, "f_1"] \arrow[ur, "f_2"] \arrow[dr, "f_{k-1}"] \arrow[ddr, "f_k"'] & \vdots \\
 & Y_{k-1} \\
 & Y_k
\end{tikzcd}$$

Wir wollen auf X eine Topologie so definieren, daß die Abbildungen f_i "gerade noch" stetig werden.

Setze
$$T_{X,\,\text{initial},(f_i)_i} \;:=\; \langle \textstyle\bigcup_{i=1}^{k} \{ f_i^{-1}(V_i) \;:\; V_i \overset{\text{off.}}{\subseteq} Y_i \} \rangle_X \;;$$
was $\langle - \rangle_X$, also das Erzeugen einer Topologie, anbelangt, cf. §3.1.

Bemerkung.

(1) *Es ist* $X \xrightarrow{f_i} Y_i$ *stetig (bzgl.* $T_{X,\,\text{initial},(f_i)_i}$ *und* T_{Y_i}*) für* $1 \leqslant i \leqslant k$.

(2) *Sei* (Z, T_Z) *ein topologischer Raum. Sei* $Z \xrightarrow{g} X$ *eine Abbildung.*

Es ist $Z \xrightarrow{g} X$ *(bzgl.* T_Z *und* $T_{X,\,\text{initial},(f_i)_i}$*) genau dann stetig, wenn* $Z \xrightarrow{f_i \circ g} Y_i$ *stetig ist (bzgl.* T_Z *und* T_{Y_i}*) für alle* $1 \leqslant i \leqslant k$.

$$\begin{tikzcd}
 & & Y_1 \\
Z \arrow[r, "g"] \arrow[urr, "f_1 \circ g"] \arrow[drr, "f_k \circ g"'] & Y \arrow[ur, "f_1"'] \arrow[dr, "f_k"] & \vdots \\
 & & Y_k
\end{tikzcd}$$

Es ist (2) eine Art Gebrauchsanweisung für den Umgang mit der initialen Topologie.

Beweis.

Zu (1). Sei $1 \leqslant j \leqslant k$. Sei $\tilde{V}_j \overset{\text{off.}}{\subseteq} Y_j$. Dann ist

$$\begin{array}{rcl} f_j^{-1}(\tilde{V}_j) & \in & \{f_j^{-1}(V_j) \,:\, V_j \overset{\text{off.}}{\subseteq} Y_j\} \\ & \subseteq & \bigcup_{i=1}^k \{f_i^{-1}(V_i) \,:\, V_i \overset{\text{off.}}{\subseteq} Y_i\} \\ & \subseteq & \langle \bigcup_{i=1}^k \{f_i^{-1}(V_i) \,:\, V_i \overset{\text{off.}}{\subseteq} Y_i\}\rangle_X \\ & = & T_{X,\,\text{initial},(f_i)_i}\ , \end{array}$$

also $f_j^{-1}(\tilde{V}_j) \overset{\text{off.}}{\subseteq} X$.

Zu (2). Sei zum einen g stetig. Sei $1 \leqslant i \leqslant k$. Dank (1) ist f_i stetig. Somit ist auch $g \circ f_i$ stetig als Kompositum stetiger Abbildungen; vgl. erste Bemerkung aus §2.1.1.

Sei zum anderen $f_i \circ g$ stetig für alle $1 \leqslant i \leqslant k$. Wir wollen die Stetigkeit von g zeigen. Nach dem Lemma aus §3.1 genügt es, hierzu zu zeigen, daß das Urbild einer in der Subbasis

$$\bigcup_{i=1}^k \{f_i^{-1}(V_i) \,:\, V_i \overset{\text{off.}}{\subseteq} Y_i\}$$

von $T_{X,\,\text{initial},(f_i)_i}$ liegenden Teilmenge stets offen in Z ist. Sei also $1 \leqslant i \leqslant k$ und $V_i \overset{\text{off.}}{\subseteq} Y_i$. Wir haben zu zeigen, daß $g^{-1}(f_i^{-1}(V_i)) \overset{\text{off.!}}{\subseteq} Z$. Nun ist aber $f_i \circ g$ stetig, so daß wegen $V_i \overset{\text{off.}}{\subseteq} Y_i$ auch

$$g^{-1}(f_i^{-1}(V_i)) \;=\; (f_i \circ g)^{-1}(V_i) \;\overset{\text{off.}}{\subseteq}\; Z\ .$$

□

Im Falle $k = 1$ schreiben wir $Y := Y_1$ und $f := f_1$. Gegeben ist diesenfalls also ein topologischer Raum (Y, T_Y) und eine Abbildung $X \xrightarrow{f} Y$.

Bemerkung. *Es ist*

$$T_{X,\,\text{initial},\,f} \;=\; \{f^{-1}(V) \,:\, V \overset{\text{off.}}{\subseteq} Y\}\ .$$

Beweis. Nach Konstruktion ist $T_{X,\,\text{initial},\,f} = \langle\{f^{-1}(V) \,:\, V \overset{\text{off.}}{\subseteq} Y\}\rangle_X$. Somit ist zu zeigen, daß $T := \{f^{-1}(V) \,:\, V \overset{\text{off.}}{\subseteq} Y\}$ bereits eine Topologie auf X ist. Denn dann ist $T = \langle T\rangle_X$; cf. Beispiel (5) aus §3.1.

Zu (Top 1). Es ist $\emptyset = f^{-1}(\emptyset) \in T$. Es ist $X = f^{-1}(Y) \in T$.

Zu (Top 2). Sei J eine Indexmenge. Sei $V_j \overset{\text{off.}}{\subseteq} Y$, also $f^{-1}(V_j) \in T$ für $j \in J$. Es ist

$$\bigcup_{j\in J} f^{-1}(V_j) \;=\; f^{-1}(\bigcup_{j\in J} V_j) \;\in\; T\ ,$$

da $\bigcup_{j\in J} V_j \overset{\text{off.}}{\subseteq} Y$.

Zu (Top 3). Seien $V', V'' \overset{\text{off.}}{\subseteq} Y$. Wir wollen zeigen, daß $f^{-1}(V') \cap f^{-1}(V'') \overset{!}{\in} T$. In der Tat ist

$$f^{-1}(V') \cap f^{-1}(V'') \;=\; f^{-1}(V' \cap V'') \;\in\; T\;,$$

da $V' \cap V'' \overset{\text{off.}}{\subseteq} Y$. $\square$

Beispiel.

(1) Sei (X, T) ein topologischer Raum. Sei $X' \subseteq X$ eine Teilmenge. Sei $X' \xrightarrow{\iota} X$ die Inklusion. Dann ist

$$T_{X',\,\text{initial},\,\iota} \;=\; \{\iota^{-1}(U) \;:\; U \overset{\text{off.}}{\subseteq} X\} \;=\; \{U \cap X' \;:\; U \overset{\text{off.}}{\subseteq} X\}$$

die Spurtopologie auf X'.

(2) Sei Y ein topologischer Raum. Sei $y_0 \in Y$. Sei X eine Menge. Sei die Abbildung $X \xrightarrow{f} Y$ erklärt durch $f(x) := y_0 \in Y$ für alle $x \in X$, i.e. sei f konstant mit Wert y_0. Dann ist $T_{X,\,\text{initial},\,f} = T_{X,\,\text{verklumpt}}$. Denn für $V \overset{\text{off.}}{\subseteq} Y$ ist $f^{-1}(V) = X$ falls $y_0 \in V$, und $f^{-1}(V) = \emptyset$, falls $y_0 \notin V$.

(3) Sei $k = 2$. Sei $X := \{1, 2, 3\}$. Sei $Y_1 := Y_2 := \{1, 2\}$, ausgestattet mit der Sierpinski-Topologie $\{\emptyset,\, \{1\}, \{1, 2\}\}$; cf. Aufgabe 2. Seien

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{f_1} & Y_1 & \qquad & X & \xrightarrow{f_2} & Y_2 \\ 1 & \longmapsto & 1 & & 1 & \longmapsto & 1 \\ 2 & \longmapsto & 1 & & 2 & \longmapsto & 2 \\ 3 & \longmapsto & 2 & & 3 & \longmapsto & 1\,. \end{array}$$

Wir wollen $T_{X,\,\text{initial},\,(f_1,f_2)}$ berechnen. Eine Subbasis dieser Topologie ist gegeben durch die Menge der Urbilder offener Mengen unter f_1, vereinigt mit der Menge der Urbilder offener Mengen unter f_2, namentlich durch

$$\{\emptyset,\, \{1,2\},\, \{1,2,3\}\} \cup \{\emptyset,\, \{1,3\},\, \{1,2,3\}\} \;=\; \{\emptyset,\, \{1,2\},\, \{1,3\},\, \{1,2,3\}\}\;.$$

Als Subbasis genügt also auch

$$\{\{1,2\},\, \{1,3\}\}\;.$$

Die davon erzeugte Topologie auf $\{1, 2, 3\}$ wurde in Beispiel (1) in §3.1 schon zu

$$T_{X,\,\text{initial},\,(f_1,f_2)} \;=\; \{\emptyset,\, \{1\},\, \{1,2\},\, \{1,3\},\, \{1,2,3\}\}$$

berechnet.

3.3.2 Finale Topologie

Sei Y eine Menge. Sei $k \in \mathbf{Z}_{\geqslant 1}$. Seien (X_i, T_{X_i}) topologische Räume für $1 \leqslant i \leqslant k$. Seien $X_i \xrightarrow{f_i} Y$ Abbildungen für $1 \leqslant i \leqslant k$.

$$
\begin{tikzcd}
X_1 \arrow[ddrr, "f_1"] & & \\
X_2 \arrow[drr, "f_2"] & & \\
\vdots & & Y \\
X_{k-1} \arrow[urr, "f_{k-1}"] & & \\
X_k \arrow[uurr, "f_k"] & &
\end{tikzcd}
$$

Wir wollen auf Y eine Topologie so definieren, daß die Abbildungen f_i “gerade noch” stetig werden.

Setze

$$
T_{Y,\,\mathrm{final},(f_i)_i} \;:=\; \{V \subseteq Y \;:\; f_i^{-1}(V) \overset{\text{off.}}{\subseteq} X_i \text{ für alle } 1 \leqslant i \leqslant k\}\;.
$$

Bemerkung.

(1) *Es ist $T_{Y,\,\mathrm{final},(f_i)_i}$ eine Topologie auf Y.*

(2) *Es ist $X_i \xrightarrow{f_i} Y$ stetig (bzgl. T_{X_i} und $T_{Y,\,\mathrm{final},(f_i)_i}$) für $1 \leqslant i \leqslant k$.*

(3) *Sei (Z, T_Z) ein topologischer Raum. Sei $Y \xrightarrow{g} Z$ eine Abbildung. Es ist $Y \xrightarrow{g} Z$ (bzgl. $T_{Y,\,\mathrm{final},(f_i)_i}$ und T_Z) genau dann stetig, wenn $X_i \xrightarrow{g \circ f_i} Z$ stetig ist (bzgl. T_{X_i} und T_Z) für alle $1 \leqslant i \leqslant k$.*

$$
\begin{tikzcd}
X_1 \arrow[dr, "f_1"'] \arrow[drr, "g\circ f_1"] & & \\
\vdots & Y \arrow[r, "g"] & Z \\
X_k \arrow[ur, "f_k"] \arrow[urr, "g\circ f_k"'] & &
\end{tikzcd}
$$

Es ist (3) eine Art Gebrauchsanweisung für den Umgang mit der finalen Topologie.

Beweis.

Zu (1). Wir zeigen, daß $T_{Y,\,\mathrm{final},(f_i)_i}$ eine Topologie auf Y ist.

Zu (Top 1). Es ist $\emptyset \in T_{Y,\,\mathrm{final},(f_i)_i}$, da $f_i^{-1}(\emptyset) = \emptyset \overset{\text{off.}}{\subseteq} X_i$ für alle $1 \leqslant i \leqslant k$. Es ist $Y \in T_{Y,\,\mathrm{final},(f_i)_i}$, da $f_i^{-1}(Y) = X_i \overset{\text{off.}}{\subseteq} X_i$ für alle $1 \leqslant i \leqslant k$.

Zu (Top 2). Sei J eine Indexmenge. Sei $V_j \in T_{Y,\,\mathrm{final},(f_i)_i}$ für $j \in J$. Dann ist auch

$$f_i^{-1}(\bigcup_{j\in j} V_j) \;=\; \bigcup_{j\in j} f_i^{-1}(V_j) \;\overset{\text{off.}}{\subseteq}\; X_i$$

für $1 \leqslant i \leqslant k$, und also $\bigcup_{j\in j} V_j \in T_{Y,\,\mathrm{final},(f_i)_i}$.

Zu (Top 3). Seien V', $V'' \in T_{Y,\,\mathrm{final},(f_i)_i}$. Dann ist auch

$$f_i^{-1}(V' \cap V'') \;=\; f_i^{-1}(V') \cap f_i^{-1}(V'') \;\overset{\text{off.}}{\subseteq}\; X_i$$

für $1 \leqslant i \leqslant k$, und also $V' \cap V'' \in T_{Y,\,\mathrm{final},(f_i)_i}$.

Zu (2). Sei $1 \leqslant i \leqslant k$. Sei $V \overset{\text{off.}}{\subseteq} Y$, d.h. $V \in T_{Y,\,\mathrm{final},(f_i)_i}$. Dann ist $f_i^{-1}(V) \overset{\text{off.}}{\subseteq} X_i$. Also ist f_i stetig.

Zu (3). Sei zum einen $Y \xrightarrow{g} Z$ stetig. Sei $1 \leqslant i \leqslant k$. Dank (2) ist f_i stetig. Somit ist auch $g \circ f_i$ stetig als Kompositum stetiger Abbildungen; vgl. erste Bemerkung aus §2.1.1.

Sei zum anderen $g \circ f_i$ stetig für alle $1 \leqslant i \leqslant k$. Wir wollen die Stetigkeit von g zeigen. Sei $W \overset{\text{off.}}{\subseteq} Z$. Zu zeigen ist $g^{-1}(W) \overset{\text{off.!}}{\subseteq} Y$, i.e. $g^{-1}(W) \overset{!}{\in} T_{Y,\,\mathrm{final},(f_i)_i}$, i.e. $f_i^{-1}(g^{-1}(W)) \overset{\text{off.!}}{\subseteq} X_i$ für $1 \leqslant i \leqslant k$. Da aber $g \circ f_i$ stetig ist, ist in der Tat

$$f_i^{-1}(g^{-1}(W)) \;=\; (g \circ f_i)^{-1}(W) \;\overset{\text{off.}}{\subseteq}\; X_i$$

für $1 \leqslant i \leqslant k$.

Beispiel.

(1) Sei $k = 2$, sei $X_1 = X_2 = \{1, 2\}$, ausgestattet mit der der Sierpinski-Topologie $\big\{\emptyset, \{1\}, \{1, 2\}\big\}$; vgl. Aufgabe 2. Sei $Y = \{1, 2, 3\}$. Seien

$$\begin{array}{ccccccc} X_1 & \xrightarrow{f_1} & Y & \quad & X_2 & \xrightarrow{f_2} & Y \\ 1 & \longmapsto & 1 & & 1 & \longmapsto & 3 \\ 2 & \longmapsto & 2 & & 2 & \longmapsto & 1\,. \end{array}$$

Wir wollen $T_{Y,\mathrm{final},(f_1,f_2)}$ berechnen. Eine Teilmenge von Y ist diesbezüglich offen, falls ihre beiden Urbilder offen sind. Durchprüfen der 6 fraglichen Teilmengen ergibt

$$T_{Y,\mathrm{final},(f_1,f_2)} \;=\; \big\{\emptyset, \{3\}, \{1, 3\}, \{1, 2, 3\}\big\}\,.$$

(2) Sei (X, T) ein topologischer Raum. Sei $(\sim)$ eine Äquivalenzrelation auf der Menge X. Sei
$$Y \;:=\; X/(\sim) \;=\; \{[x]_\sim \;:\; x \in X\}$$
die Menge der diesbezüglichen Äquivalenzklassen, also $[x]_\sim = \{x' \in X \;:\; x' \sim x\}$ für $x \in X$. Sei $X \xrightarrow{f} Y$, $x \longmapsto [x]_\sim$ die kanonische Abbildung.

Bestimmen wir $T_{Y,\mathrm{final},f}$. Es ist $V \overset{\text{off.}}{\subseteq} Y$ genau dann, wenn $f^{-1}(V) \overset{\text{off.}}{\subseteq} X$. Dieses Urbild berechnet sich zu
$$f^{-1}(V) \;=\; \{x \in X \;:\; [x]_\sim \in V\} \;=\; \bigcup_{[x]_\sim \in V} [x]_\sim \;.$$

In Worten, eine Teilmenge von $Y = X/(\sim)$ ist genau dann offen, wenn die Vereinigungsmenge der in ihr enthaltenen Äquivalenzklassen offen in X ist.

Sei schließlich eine stetige Abbildung $X \xrightarrow{g} Z$ gegeben mit $g(x) = g(x')$ wann immer $x \sim x'$. Es existiert genau eine Abbildung $X/(\sim) \xrightarrow{\bar{g}} Z$ mit $\bar{g} \circ f = g$, d.h. mit $\bar{g}([x]_\sim) = g(x)$ für $x \in X$.
$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & Z \\ X/(\sim) \arrow[ur, "\bar{g}"'] & \end{tikzcd}$$

Nach Bemerkung (3) ist $\bar{g}$ stetig.

(3) Ein Beispiel zu (2). Sei $X = \{1,2,3\}$, ausgestattet mit der Topologie $T_X = \big\{\emptyset, \{1\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{1,2,3\}\big\}$; cf. Beispiel (1) in §3.1. Sei $[1]_\sim = \{1\}$, und seien $[2]_\sim = [3]_\sim = \{2,3\}$. Dann ist
$$X/(\sim) \;=\; \{[1]_\sim, [2]_\sim, [3]_\sim\} \;=\; \{[1]_\sim, [2]_\sim\} = \big\{\{1\}, \{2,3\}\big\} \;.$$

Die finale Topologie auf $X/(\sim)$ bezüglich $X \xrightarrow{f} X/(\sim)$, $x \longmapsto [x]_\sim$ ergibt sich zu
$$T_{X/(\sim),\,\mathrm{final},\,f} \;=\; \big\{\emptyset, \{[1]_\sim\}, \{[1]_\sim, [2]_\sim\}\big\} \;,$$
da für jede dieser Mengen die Vereinigung der in ihr enthaltenen Äquivalenzklassen offen in X ist, und da dies für $\{[2]_\sim\}$ nicht gilt. Es ist $X/(\sim)$ also homöomorph zum Sierpinski-Raum via $1 \mapsto [1]_\sim$, $2 \mapsto [2]_\sim$; vgl. Aufgabe 2.

3.4 Produkte

Sei $k \in \mathbf{Z}_{\geqslant 1}$. Seien (X_i, T_{X_i}) topologische Räume.

Betrachte das (kartesische) Produkt
$$\textstyle\prod_{i=1}^k X_i \;=\; X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_k \;=\; \{(x_1, x_2, \ldots, x_k) \;:\; x_i \in X_i \text{ für } 1 \leqslant i \leqslant k\} \;.$$

Wir haben die Projektionsabbildungen

$$\begin{array}{rcl} \prod_{i=1}^k X_i & \xrightarrow{\pi_j} & X_j \\ (x_1, \dots, x_k) & \longmapsto & x_j \; . \end{array}$$

für $1 \leqslant j \leqslant k$. Setze

$$T_{\prod_{i=1}^k X_i} \; := \; T_{\prod_{i=1}^k X_i, \text{initial}, (\pi_i)_i} \; ;$$

vgl. §3.3.1. Ist nichts anderes spezifiziert, so trage ein Produkt diese Topologie.

Insbesondere ist π_j stetig für $1 \leqslant j \leqslant k$.

Explizit wird

$$\begin{array}{rcl} T_{\prod_{i=1}^k X_i} & = & \langle \bigcup_{i=1}^k \{\pi_i^{-1}(U_i) \; : \; U_i \overset{\text{off.}}{\subseteq} X_i\} \rangle_{\prod_{i=1}^k X_i} \\ & = & \langle \bigcup_{i=1}^k \{X_1 \times \cdots \times X_{i-1} \times U_i \times X_{i+1} \times \cdots \times X_k \; : \; U_i \overset{\text{off.}}{\subseteq} X_i\} \rangle_{\prod_{i=1}^k X_i} \; . \end{array}$$

Schreibe noch $X^{\times k} := \prod_{i=1}^k X = X \times \cdots \times X$ (k Kopien von X). Setze noch $X^{\times 0} := \{*\}$, der einpunktige Raum; cf. §1.2.4.2.

Beispiel. Ist $k = 2$, so ist

$$S \; := \; \{U \times Y \; : \; U \overset{\text{off.}}{\subseteq} X\} \; \cup \; \{X \times V \; : \; V \overset{\text{off.}}{\subseteq} Y\}$$

eine Subbasis von $X \times Y$. Insbesondere, sind $U \overset{\text{off.}}{\subseteq} X$ und $V \overset{\text{off.}}{\subseteq} Y$, so ist

$$U \times V \; = \; (U \times Y) \cap (X \times V) \; \overset{\text{off.}}{\subseteq} \; X \times Y \; .$$

Mehr noch, es wird

$$B \; := \; \{U \times V \; : \; U \overset{\text{off.}}{\subseteq} X, \; V \overset{\text{off.}}{\subseteq} Y\}$$

eine Basis von $X \times Y$. Denn aus $S \subseteq B \subseteq \langle S \rangle_{X \times Y}$ folgt, daß $\langle S \rangle_{X \times Y} \subseteq \langle B \rangle_{X \times Y} \subseteq \langle S \rangle_{X \times Y}$, und also $\langle B \rangle_{X \times Y} = \langle S \rangle_{X \times Y}$, i.e. daß B ebenfalls eine Subbasis von $X \times Y$ ist. Da nun der Schnitt zweier Elemente von B wieder in B enthalten ist, ist B mit Aufgabe 25.(2) eine Basis von $X \times Y$.

Die bereits als stetig erkannten Projektionen

$$\begin{array}{ccccc} X & \times & Y & \xrightarrow{\pi_X} & X \\ (x & , & y) & \longmapsto & x \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} X & \times & Y & \xrightarrow{\pi_Y} & Y \\ (x & , & y) & \longmapsto & y \end{array}$$

sind auch offen. Betrachten wir o.E. dafür einmal π_X. Mit Bemerkung (1) aus §3.2 genügt es zu zeigen, daß π_X Elemente von B auf offene Teilmengen von X abbildet, da Bild unter π_X zu nehmen mit dem Bilden beliebiger Vereinigungen vertauscht; cf. Bemerkung (1) aus §3.2. In der Tat ist für $U \times V$ mit $U \overset{\text{off.}}{\subseteq} X$ und $V \overset{\text{off.}}{\subseteq} Y$ auch $\pi_X(U \times V) = U \overset{\text{off.}}{\subseteq} X$, falls $V \neq \emptyset$, und $\pi_X(U \times V) = \emptyset \overset{\text{off.}}{\subseteq} X$, falls $V = \emptyset$.

Sei $x \in X$. Sei $y \in Y$. Es sind

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{i_y} & X & \times & Y \\ \xi & \longmapsto & (\xi & , & y) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} Y & \xrightarrow{j_x} & X & \times & Y \\ \eta & \longmapsto & (x & , & \eta) \end{array}$$

stetig. Zeigen wir dies o.E. nur für i_y. Nach Bemerkung (2) aus §3.3.1 genügt es zu zeigen, daß die Komposita von i_y mit π_X und mit π_Y stetig sind. Zum einen ist $\pi_X \circ i_y = \mathrm{id}_X$ stetig, zum anderen ist $\pi_Y \circ i_y$ als konstante Abbildung (mit Bild $y \in Y$) stetig. Cf. Beispiel $(2,3)$ aus §2.1.1.

Bemerkung. *Sei Y ein topologischer Raum. Seien $Y \xrightarrow{f_i} X_i$ stetig für $1 \leqslant i \leqslant k$. Dann ist auch*

$$\begin{array}{cccccccccc} Y & \xrightarrow{(f_1, f_2, \ldots, f_k)} & X_1 & \times & X_2 & \times & \cdots & \times & X_k & = & \prod_{i=1}^k X_i \\ y & \longmapsto & (f_1(y) & , & f_2(y) & , & \ldots & , & f_k(y)) & = & (f_i(y))_i \end{array}$$

stetig.

Beweis. Nach Bemerkung (2) aus §3.3.1 genügt es zu zeigen, daß das Kompositum mit π_i stetig ist für $1 \leqslant i \leqslant k$. Nun ist aber $\pi_i \circ (f_1, f_2, \ldots, f_k) = f_i$ nach Voraussetzung stetig. $\square$

Beispiel.

(1) Sei $n \in \mathbf{Z}_{\geqslant 0}$. Es ist die Bijektion

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{R}^n & \xrightarrow{\varphi} & \mathbf{R}^{\times n} \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} & \longmapsto & (x_1, \ldots, x_n) \end{array}$$

ein Homöomorphismus. Siehe Aufgabe 33.

(2) Sei $X = \{1, 2\}$, ausgestattet mit der Sierpinski-Topologie $\big\{\emptyset, \{1\}, \{1,2\}\big\}$; cf. Aufgabe 2. Eine Subbasis von $X \times X$ ist gegeben durch

$$\big\{\emptyset \times \{1,2\}, \{1\} \times \{1,2\}, \{1,2\} \times \{1,2\}\big\} \cup \big\{\{1,2\} \times \emptyset, \{1,2\} \times \{1\}, \{1,2\} \times \{1,2\}\big\}\ ;$$

cf. obiges Beispiel. Daraus resultiert die Topologie

$$\big\{\emptyset,\ \{(1,1)\},\ \{(1,1), (1,2)\},\ \{(1,1), (2,1)\},\ \{(1,1), (1,2), (2,1)\},\ \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2)\}\big\}$$

auf $X \times X = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2)\}$. Hierin ist $\{(1,1), (1,2), (2,1)\}$ nicht von der Form $U \times V$ mit $U \overset{\text{off.}}{\subseteq} X$ und $V \overset{\text{off.}}{\subseteq} Y$.

3.5 Disjunkte Vereinigungen

Sei $k \in \mathbf{Z}_{\geqslant 1}$. Seien (X_i, T_{X_i}) topologische Räume.

Betrachte die disjunkte Vereinigung

$$\coprod_{i=1}^k X_i \;=\; \{1\} \times X_1 \;\sqcup\; \{2\} \times X_2 \;\sqcup\; \cdots \;\sqcup\; \{k\} \times X_k \;,$$

wobei, um sicherzugehen, daß die Schnittmengen leer sind, jede Menge X_i noch mit einem vorangestellten Zusatzindex versehen wurde.

Wir haben die Injektionsabbildungen

$$\begin{array}{rcl} X_j & \xrightarrow{\iota_j} & \coprod_{i=1}^k X_i \\ x & \longmapsto & (j, x) \; . \end{array}$$

Setze

$$T_{\coprod_{i=1}^k X_i} \;:=\; T_{\coprod_{i=1}^k X_i,\, \mathrm{final},\, (\iota_i)_i} \;;$$

vgl. §3.3.2. Ist nichts anderes spezifiziert, so trage eine disjunkte Vereinigung diese Topologie. Insbesondere ist ι_j stetig für $1 \leqslant j \leqslant k$.

Sei $U \subseteq \coprod_{i=1}^k X_i$. Es ist genau dann $U \overset{\text{off.}}{\subseteq} \coprod_{i=1}^k X_i$, wenn

$$\iota_i^{-1}(U) \;=\; \{x \in X_i \;:\; (i, x) \in U\} \;\overset{\text{off.}}{\subseteq}\; X_i$$

für $1 \leqslant i \leqslant k$.

Schreibe noch $X^{\sqcup k} := \coprod_{i=1}^k X$. Setze noch $X^{\sqcup 0} := \emptyset$; cf. §1.2.4.1.

Bemerkung. *Sei Y ein topologischer Raum. Seien $X_i \xrightarrow{f_i} Y$ stetig für $1 \leqslant i \leqslant k$. Dann ist auch*

$$\begin{array}{rcl} \coprod_{i=1}^k X_i & \xrightarrow{[f_1, f_2, \ldots, f_k]} & Y \\ (i, x) & \longmapsto & f_i(x) \end{array}$$

stetig.

Beweis. Nach Bemerkung (3) aus §3.3.2 genügt es zu zeigen, daß das Kompositum mit ι_i stetig ist für $1 \leqslant i \leqslant k$. Nun ist aber $[f_1, f_2, \ldots, f_k] \circ \iota_i = f_i$ nach Voraussetzung stetig. ▫

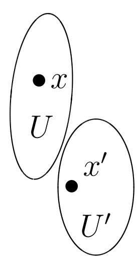
Kapitel 4

Eigenschaften topologischer Räume

4.1 Hausdorffräume

4.1.1 Begriff und erste Eigenschaften

Definition. Sei X ein topologischer Raum. Es heißt X *hausdorffsch* oder *Hausdorffraum,* falls für alle $x,\, x' \in X$ mit $x \neq x'$ offene Mengen $x \in U \overset{\text{off.}}{\subseteq} X$ und $x' \in U' \overset{\text{off.}}{\subseteq} X$ existieren mit $U \cap U' = \emptyset$.



Beispiel.

(1) Sei (X, d) ein metrischer Raum. Es ist X, ausgestattet mit der von d induzierten Topologie $T^{(X,d)}$, ein Hausdorffraum.

Denn seien $x,\, x' \in X$ mit $x \neq x'$. Dann ist $d(x, x') > 0$. Setze $\varepsilon := d(x, x')/2$. Sei $U := \mathrm{B}_\varepsilon(x)$ und $U' := \mathrm{B}_\varepsilon(x')$. Es sind $\mathrm{B}_\varepsilon(x),\, \mathrm{B}_\varepsilon(x') \overset{\text{off.}}{\subseteq} X$; cf. Lemma in §1.3.2. Zeigen wir, daß $\mathrm{B}_\varepsilon(x) \cap \mathrm{B}_\varepsilon(x') = \emptyset$. Sei *angenommen,* es gibt ein $y \in \mathrm{B}_\varepsilon(x) \cap \mathrm{B}_\varepsilon(x')$. Dann wird

$$2\varepsilon \;=\; d(x, x') \;\leqslant\; d(x, y) + d(y, x') \;<\; \varepsilon + \varepsilon \;=\; 2\varepsilon\;,$$

und wir haben einen *Widerspruch.* Also gibt es in $\mathrm{B}_\varepsilon(x) \cap \mathrm{B}_\varepsilon(x')$ kein Element.

(2) Aus (1) entnimmt man insbesondere, daß $\mathbf{R}^n$ für $n \in \mathbf{Z}_{\geqslant 0}$ hausdorffsch ist.

(3) Es ist der Sierpinski-Raum $\big(\{1, 2\}\,,\, \{\emptyset,\, \{1\},\, \{1, 2\}\}\big)$ aus Aufgabe 2 nicht hausdorffsch. Denn darin ist zwar $1 \neq 2$. Die einzige offene Teilmenge, die 2 enthält, ist

aber $\{1,2\}$, und diese hat mit jeder offenen Menge, die 1 enthält, einen Schnitt, der 1 enthält und daher nicht leer ist.

(4) Sei X hausdorffsch. Sei $Y \subseteq X$, ausgestattet mit der Spurtopologie. Dann ist auch Y hausdorffsch. Denn seien $y, y' \in Y$ mit $y \neq y'$. Dann gibt es $y \in U \overset{\text{off.}}{\subseteq} X$ und $y' \in U' \overset{\text{off.}}{\subseteq} X$ mit $U \cap U' = \emptyset$, da X hausdorffsch ist. Dann ist aber auch $y \in Y \cap U \overset{\text{off.}}{\subseteq} Y$ und $y' \in Y \cap U' \overset{\text{off.}}{\subseteq} Y$ mit $(U \cap Y) \cap (U' \cap Y) = (U \cap U') \cap Y = \emptyset$.

Bemerkung. *Sei X ein topologischer Raum. Es ist X hausdorffsch genau dann, wenn die* Diagonale

$$\Delta(X) \; := \; \{(x,x) \; : \; x \in X\}$$

eine abgeschlossene Teilmenge von $X \times X$ ist.

Beweis. Sei zum einen X hausdorffsch. Wir wollen zeigen, daß $(X \times X) \smallsetminus \Delta(X) \overset{\text{off.!}}{\subseteq} X \times X$. Dazu genügt es, um jedes Element (x,x') von $(X \times X) \smallsetminus \Delta(X)$ noch eine offene Teilmenge $W_{(x,x')}$ von $X \times X$ mit $(x,x') \in W_{(x,x')} \subseteq (X \times X) \smallsetminus \Delta(X)$ zu finden; cf. Bemerkung aus §1.1.3.

Sei also $(x,x') \in (X \times X) \smallsetminus \Delta(X)$. Dann ist $x \neq x'$. Sei $x \in U \overset{\text{off.}}{\subseteq} X$ und $x' \in U' \overset{\text{off.}}{\subseteq} X$ mit $U \cap U' = \emptyset$. Dann ist

$$(x,x') \; \subseteq \; U \times U' \; \subseteq \; (X \times X) \smallsetminus \Delta(X) \; ,$$

da $(y,y') \in U \times U'$ nach sich zieht, daß $y \neq y'$, i.e. daß $(y,y') \notin \Delta(X)$. Ferner ist $U \times U' \overset{\text{off.}}{\subseteq} X \times X$. Wir können also $W_{(x,x')} := U \times U'$ setzen.

Sei zum anderen $\Delta(X) \overset{\text{abg.}}{\subseteq} X \times X$. Seien $x, x' \in X$ mit $x \neq x'$. Dann ist $(x,x') \in (X \times X) \smallsetminus \Delta(X) \overset{\text{off.}}{\subseteq} X \times X$. Es ist

$$\{U \times U' \; : \; U, U' \overset{\text{off.}}{\subseteq} X\}$$

eine Basis von $X \times X$; cf. erstes Beispiel von §3.4. Somit gibt es $U, U' \overset{\text{off.}}{\subseteq} X$ mit

$$(x,x') \; \in \; U \times U' \; \subseteq \; (X \times X) \smallsetminus \Delta(X) \; \overset{\text{off.}}{\subseteq} \; X \times X \; .$$

Nun ist $x \in U \overset{\text{off.}}{\subseteq} X$ und $x' \in U' \overset{\text{off.}}{\subseteq} X$. Ferner ist $U \cap U' = \emptyset$, da $y \in U \cap U'$ zur Folge hätte, daß $(y,y) \in U \times U' \subseteq (X \times X) \smallsetminus \Delta(X)$, i.e. $(y,y) \notin \Delta(X)$, was aber nicht der Fall ist. Somit ist X als hausdorffsch nachgewiesen. □

4.1.2 Dichte Teilmengen

Sei X ein topologischer Raum.

Definition. Eine Teilmenge $D \subseteq X$ heißt *dicht,* falls $\bar{D} = X$.

Bemerkung. *Es ist $D \subseteq X$ dicht genau dann, wenn $U \cap D \neq \emptyset$ für alle $\emptyset \neq U \overset{\text{off.}}{\subseteq} X$.*

Beweis. Sei zum einen $D \subseteq X$ dicht, i.e. $\bar{D} = X$. Wäre $U \cap D = \emptyset$, so auch $D \subseteq X \smallsetminus U \overset{\text{abg.}}{\subseteq} X$ und damit $X = \bar{D} \subseteq X \smallsetminus U$ unter Verwendung von Bemerkung (2) aus §1.4, was wegen $U \neq \emptyset$ aber nicht sein kann. Also ist in der Tat $U \cap D \neq \emptyset$.

Sei zum anderen $U \cap D \neq \emptyset$ für alle $\emptyset \neq U \overset{\text{off.}}{\subseteq} X$. Wäre $\bar{D} \subsetneq X$, so wäre $\emptyset \neq X \smallsetminus \bar{D} \overset{\text{off.}}{\subseteq} X$ und $D \cap (X \smallsetminus \bar{D}) \subseteq \bar{D} \cap (X \smallsetminus \bar{D}) = \emptyset$, was aber nach Voraussetzung nicht sein kann. ▫

Beispiel. Sei $n \in \mathbf{Z}_{\geqslant 0}$. Es ist $\mathbf{Q}^n \subseteq \mathbf{R}^n$ dicht. Denn sei $\emptyset \neq U \overset{\text{off.}}{\subseteq} \mathbf{R}^n$. Dann gibt es ein $x \in U$, und also auch ein $\varepsilon \in \mathbf{R}_{>0}$ mit $\mathrm{B}_\varepsilon^{(2)}(x) \subseteq U$. Können wir zeigen, daß $\mathbf{Q}^n \cap \mathrm{B}_\varepsilon^{(2)}(x) \neq \emptyset$, so folgt auch $\mathbf{Q}^n \cap U \neq \emptyset$. Aber in der Behauptung in Beispiel (4) in §3.2 haben wir gesehen, daß ein $y \in \mathbf{Q}^n$ mit $d^{(2)}(x,y) < \varepsilon$, also mit $y \in \mathrm{B}_\varepsilon^{(2)}(x)$ existiert.

4.1.3 Vergleich stetiger Abbildungen

Satz 3 (Abgleich auf dichter Teilmenge) *Sei X ein topologischer Raum. Sei $D \subseteq X$ eine dichte Teilmenge. Sei Y ein Hausdorffraum. Seien $X \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} Y$ stetige Abbildungen. Ist $f|_D = g|_D$, so ist $f = g$.*

Beweis. Sei $E := \{x \in X \;:\; f(x) = g(x)\} \subseteq X$. Es ist $D \subseteq E$. Können wir zeigen, daß $E \overset{\text{abg.}}{\subseteq} X$ ist, so folgt $X = \bar{D} \subseteq E \subseteq X$ mit Bemerkung (2) aus §1.4, also $E = X$ und somit $f = g$.

Nun ist aber

$$\begin{array}{rcl} E & = & \{x \in X \;:\; f(x) = g(x)\} \\ & = & \{x \in X \;:\; (f,g)(x) = (f(x), g(x)) \in \Delta(Y)\} \\ & = & (f,g)^{-1}\big(\Delta(Y)\big) \\ & \overset{\text{abg.}}{\subseteq} & X\,, \end{array}$$

da wegen Y hausdorffsch $\Delta(Y) \overset{\text{abg.}}{\subseteq} Y \times Y$ ist; vgl. Bemerkung aus §4.1.1 und Aufgabe 18.(1). ▫

4.2 Kompaktheit

4.2.1 Begriff und erste Eigenschaften

Sei X ein topologischer Raum.

Definition. Es heißt X *kompakt,* wenn für jede offene Überdeckung $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ (wobei I Indexmenge, und $U_i \overset{\text{off.}}{\subseteq} X$ für $i \in I$) eine endliche Teilmenge $I_0 \subseteq I$ existiert mit $X = \bigcup_{i \in I_0} U_i$.

Man nennt $X = \bigcup_{i \in I_0} U_i$ auch eine *endliche Teilüberdeckung* von $X = \bigcup_{i \in I} U_i$.

Beispiel.

(1) Ist $X = \{x\}$ ein einpunktiger topologischer Raum, so ist X kompakt. In der Tat enthält jede offene Überdeckung von X wenigstens einmal den Teilnehmer $\{x\}$. Dieser alleine stellt dann schon eine geeignete endliche Teilüberdeckung dar.

(2) Die reelle Gerade $\mathbf{R}$ ist nicht kompakt. In der Tat gibt es für die offene Überdeckung $\mathbf{R} = \bigcup_{n \in \mathbf{Z}_{\geqslant 1}} (-n, +n)$ keine endliche Teilüberdeckung. Denn sei $I_0 \subseteq \mathbf{Z}_{\geqslant 1}$ endlich. Sei $n_0 := \max I_0$. Dann ist $\bigcup_{n \in I_0} (-n, +n) = (-n_0, +n_0) \subsetneq \mathbf{R}$.

(3) Seien $a, b \in \mathbf{R}$ mit $a \leqslant b$. Dann ist $[a, b]$ kompakt.

Ohne Einschränkung ist $a < b$; cf. (1).

Sei hierzu $[a, b] = \bigcup_{i \in I} (U_i \cap [a, b])$ mit I Indexmenge und $U_i \overset{\text{off.}}{\subseteq} \mathbf{R}$ gegeben. Sei also $[a, b] \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i$.

Eine Folge $(t_k)_k = (t_k)_{k \in \mathbf{Z}_{\geqslant 0}}$ mit $t_k \in [a, b]$ heiße *zulässig,* falls

- $t_0 = a$,
- $t_k \leqslant t_{k+1}$ für alle $k \in \mathbf{Z}_{\geqslant 0}$ und
- es für alle $k \in \mathbf{Z}_{\geqslant 0}$ ein $i \in I$ gibt mit $[t_k, t_{k+1}] \subseteq U_i$.

Sei $T := \{(t_k)_k \;:\; (t_k)_k \text{ ist zulässig}\}$. Es ist $(a, a, a, \dots)$ zulässig, und also $T \neq \emptyset$.

Sei $\tau := \sup\{\, \sup_k t_k \;:\; (t_k)_k \in T\}$. Es ist $\tau \in [a, b]$, da $\sup_k t_k \in [a, b]$ für alle $(t_k)_k \in T$.

Wir *behaupten,* daß $a < \tau$. Sei $i \in I$ mit $a \in U_i$. Dann gibt es ein $\delta \in \mathbf{R}_{>0}$ mit $(a - \delta, a + \delta) \subseteq U_i$ und $a + \delta < b$. Insbesondere ist $[a, a + \delta/2] \subseteq U_i$ und $a + \delta/2 \in [a, b]$. Somit ist die Folge

$$(a,\, a + \delta/2,\, a + \delta/2,\, a + \delta/2,\, \dots)$$

zulässig. Ihr Supremum ist $a + \delta/2$. Also ist $a < a + \delta/2 \leqslant \tau$. Dies zeigt die *Behauptung.*

Wir *behaupten,* daß $\tau = b$. *Annahme,* nicht. Dann ist $a < \tau < b$ dank voriger Behauptung. Sei $i \in I$ mit $\tau \in U_i$. Dann gibt es ein $\delta \in \mathbf{R}_{>0}$ mit $(\tau - \delta, \tau + \delta) \subseteq U_i$ und $(\tau - \delta, \tau + \delta) \subseteq [a, b]$. Da $\tau - \delta/2$ keine obere Schranke von $\{\, \sup_k t_k \;:\; (t_k)_k \in T\}$ ist, gibt es ein $(t_k)_k \in T$ mit $\sup_k t_k \in (\tau - \delta/2, \tau]$. Nun ist $\tau - \delta$ keine obere Schranke für $(t_k)_k$. Sei also $\ell \in \mathbf{Z}_{\geqslant 0}$ mit $t_\ell > \tau - \delta$. Somit ist $t_\ell \in (\tau - \delta, \tau]$. Wähle $t' \in (\tau, \tau + \delta)$. Da $[t_\ell, t'] \subseteq (\tau - \delta, \tau + \delta) \subseteq U_i$, ist

$$(t_0,\, t_1,\, \dots,\, t_\ell,\, t',\, t',\, t',\, \dots)$$

zulässig. Ihr Supremum ist $t' > \tau$. Nach Definition von τ ist aber $t' \leqslant \tau$. Dieser *Widerspruch* zeigt die *Behauptung.*

Wir *behaupten,* daß es ein $(t_k)_k \in T$ und ein $\ell \in \mathbf{Z}_{\geqslant 0}$ mit $t_{\ell+1} = b$ gibt. Sei $i \in I$ mit $b \in U_i$. Dann gibt es ein $\delta \in \mathbf{R}_{>0}$ mit $(b-\delta, b+\delta) \subseteq U_i$ und $b-\delta > a$. Insbesondere ist $[b-\delta/2, b] \subseteq U_i$ und $b-\delta/2 \in [a,b]$. Da $b-\delta/2$ nach voriger Behauptung keine obere Schranke von $\{ \sup_k t_k \;:\; (t_k)_k \in T\}$ ist, gibt es ein $(t'_k)_k \in T$ mit $\sup_k t'_k \in (b-\delta/2, b]$. Nun ist $b-\delta$ keine obere Schranke für $(t'_k)_k$. Sei also $\ell \in \mathbf{Z}_{\geqslant 0}$ mit $t'_\ell > b-\delta$. Da $[t'_\ell, b] \subseteq (b-\delta, b+\delta) \subseteq U_i$, ist

$$(t'_0\,,\, t'_1\,,\, \ldots,\, t'_\ell\,,\, b,\, b,\, b,\, \ldots) \;=:\; (t_k)_k$$

zulässig. Dies zeigt die *Behauptung.*

Sei $(t_k)_k \in T$ und $\ell \in \mathbf{Z}_{\geqslant 0}$ mit $t_{\ell+1} = b$ wie in voriger Behauptung. Sei $[t_k, t_{k+1}] \subseteq U_{i(k)}$ für gewisse $i(k) \in I$ für $0 \leqslant k \leqslant \ell$. Sei $I_0 := \{i(k) \;:\; 0 \leqslant k \leqslant \ell\}$. Es ist I_0 eine endliche Menge. Ferner wird

$$\begin{array}{rcl} [a,b] & = & \bigcup_{k=0}^{\ell} [t_k, t_{k+1}] \\ & \subseteq & \bigcup_{k=0}^{\ell} U_{i(k)} \\ & = & \bigcup_{i \in I_0} U_i \;. \end{array}$$

Insbesondere ist $[a,b] = \bigcup_{i\in I_0} (U_i \cap [a,b])$.

Die letzte unserer Behauptungen garantiert noch etwas mehr als nur die Auswahl einer endlichen Teilüberdeckung. Wir haben noch eine Unterteilung unseres Intervalls in endlich viele Teilintervalle so, daß jedes Teilintervall in einem Teilnehmer unserer endlichen Teilüberdeckung liegt.

Ferner merken wir an, daß man unter Inkaufnahme von Bezeichnungsschwierigkeiten auch mit "zulässigen endlichen Tupeln" anstelle zulässiger Folgen arbeiten hätte können.

Lemma.

(1) *Sei X ein Hausdorffraum. Sei $Y \subseteq X$ mit Y kompakt. Dann ist $Y \overset{\text{abg.}}{\subseteq} X$.*

(2) *Sei X ein kompakter topologischer Raum. Sei $Y \overset{\text{abg.}}{\subseteq} X$. Dann ist Y kompakt.*

(3) *Sei X ein kompakter topologischer Raum. Sei Y ein topologischer Raum. Sei $X \xrightarrow{f} Y$ eine stetige Abbildung. Dann ist $f(X)$ kompakt.*

(4) *Sei X ein kompakter topologischer Raum. Sei Y ein Hausdorffraum. Sei $X \xrightarrow{f} Y$ eine stetige injektive Abbildung. Dann ist $X \xrightarrow{f|^{f(X)}} f(X)$ ein Homöomorphismus.*

Beweis. Zu (1). Es genügt zu zeigen, daß es für alle $x \in X \smallsetminus Y$ ein $U_x \overset{\text{off.}}{\subseteq} X$ mit $x \in U_x \subseteq X \smallsetminus Y$ gibt; vgl. Bemerkung aus §1.1.3.

Sei $x \in X \smallsetminus Y$. Da X hausdorffsch ist, können wir für jedes $y \in Y$ ein $y \subseteq V_y \overset{\text{off.}}{\subseteq} X$ und ein $x \subseteq U'_y \overset{\text{off.}}{\subseteq} X$ mit $V_y \cap U'_y = \emptyset$ wählen. Es ist

$$Y \;=\; \bigcup_{y \in Y} (V_y \cap Y)\;.$$

Da Y kompakt ist, gibt es ein $k \in \mathbf{Z}_{\geqslant 0}$ und $y_i \in Y$ für $1 \leqslant i \leqslant k$ mit

$$Y \;=\; \bigcup_{i=1}^{k} (V_{y_i} \cap Y)\;.$$

Setze $U_x := \bigcap_{i=1}^{k} U'_{y_i} \overset{\text{off.}}{\subseteq} X$. Es ist $x \in U_x$, da $x \in U'_y$ für alle $y \in Y$. Wir wollen zeigen, daß $U_x \overset{!}{\subseteq} X \smallsetminus Y$. Wir haben

$$Y \cap U_x \;\subseteq\; (\bigcup_{i=1}^{k} V_{y_i}) \cap U_x \;=\; \bigcup_{i=1}^{k} (V_{y_i} \cap U_x) \;\subseteq\; \bigcup_{i=1}^{k} (V_{y_i} \cap U'_{y_i}) \;=\; \emptyset\;,$$

und folglich $Y \cap U_x = \emptyset$.

Zu (2). Sei $Y = \bigcup_{i \in I} (U_i \cap Y)$ mit $U_i \overset{\text{off.}}{\subseteq} X$ offen überdeckt. Dann ist $Y \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i$ und also

$$X \;=\; (X \smallsetminus Y) \;\cup\; \bigcup_{i \in I} U_i$$

offen überdeckt. Da X kompakt ist, gibt es eine endliche Auswahl aus den Teilnehmern dieser Überdeckung, die immer noch X überdeckt. Insbesondere gibt es eine endliche Teilmenge $I_0 \subseteq I$ mit

$$X \;=\; (X \smallsetminus Y) \;\cup\; \bigcup_{i \in I_0} U_i\;.$$

Da $Y \cap (X \smallsetminus Y) = \emptyset$, folgt, daß $Y \subseteq \bigcup_{i \in I_0} U_i$, i.e. daß $Y = \bigcup_{i \in I_0} (U_i \cap Y)$. Also haben wir eine endliche Teilüberdeckung von Y gefunden und somit Y als kompakt nachgewiesen.

Zu (3). Sei $f(X) = \bigcup_{i \in I} (V_i \cap f(X))$ offen überdeckt, wobei $V_i \overset{\text{off.}}{\subseteq} Y$. Zunächst folgt

$$X \;=\; f^{-1}(f(X)) = f^{-1}\big(\bigcup_{i \in I} (V_i \cap f(X))\big) \;=\; \bigcup_{i \in I} f^{-1}(V_i \cap f(X)) \;=\; \bigcup_{i \in I} f^{-1}(V_i)\;.$$

Da f stetig ist, handelt es sich hierbei um eine offene Überdeckung von X. Da X kompakt ist, gibt es eine endliche Teilmenge $I_0 \subseteq I$ mit $X = \bigcup_{i \in I_0} f^{-1}(V_i)$. Es folgt

$$f(X) \;=\; f\big(\bigcup_{i \in I_0} f^{-1}(V_i)\big) \;=\; \bigcup_{i \in I_0} f(f^{-1}(V_i)) \;=\; \bigcup_{i \in I_0} (V_i \cap f(X))\;.$$

Also ist eine endliche Teilüberdeckung von $f(X)$ gefunden und somit $f(X)$ als kompakt nachgewiesen.

Zu (4). Es ist $f|^{f(X)}$ stetig und bijektiv. Wir müssen zeigen, daß $f|^{f(X)}$ offen ist. Sei $U \overset{\text{off.}}{\subseteq} X$. Wir haben zu zeigen, daß $f(U) \overset{\text{off.!}}{\subseteq} f(X)$, i.e. daß $f(X) \smallsetminus f(U) \overset{\text{abg.!}}{\subseteq} f(X)$. Es ist $X \smallsetminus U \overset{\text{abg.}}{\subseteq} X$. Mit (2) folgt, daß $X \smallsetminus U$ kompakt ist. Mit (3) folgt, daß $f(X \smallsetminus U)$ kompakt ist. Mit der Injektivität von f und (1) folgt $f(X) \smallsetminus f(U) = f(X \smallsetminus U) \overset{\text{abg.}}{\subseteq} Y$. Also ist auch $f(X) \smallsetminus f(U) \overset{\text{abg.}}{\subseteq} f(X)$; vgl. Aufgabe 12.(2). $\square$

4.2.2 Tychonoff (endlich)

Lemma [6, (1.4)**].** *Seien X und Y topologische Räume. Sei $X' \subseteq X$ mit X' kompakt. Sei $Y' \subseteq Y$ mit Y' kompakt. Sei I eine Indexmenge. Seien $W_i \overset{\text{off.}}{\subseteq} X \times Y$ für $i \in I$ derart, daß*

$$X' \times Y' \;\subseteq\; \bigcup_{i \in I} W_i \;.$$

Dann gibt es $X' \subseteq U \overset{\text{off.}}{\subseteq} X$ und $Y' \subseteq V \overset{\text{off.}}{\subseteq} Y$ und eine endliche Teilmenge $I_0 \subseteq I$ so, daß

$$X' \times Y' \;\subseteq\; U \times V \;\subseteq\; \bigcup_{i \in I_0} W_i \;\subseteq X \times Y \;.$$

Beweis. Betrachten wir zunächst den Spezialfall $X' = \{x'\}$ einpunktig.

Sei einmal $y' \in Y'$. Sei $i \in I$ mit $(x', y') \in W_i$. Unter Verwendung der Basis von $X \times Y$ aus dem ersten Beispiel von §3.4 finden wir ein ein $U_{y'} \overset{\text{off.}}{\subseteq} X$ und ein $V_{y'} \overset{\text{off.}}{\subseteq} Y$ mit

$$(x', y') \;\in\; U_{y'} \times V_{y'} \;\subseteq\; W_i \;.$$

Es ist $Y' \subseteq \bigcup_{y' \in Y'} V_{y'}$, i.e.

$$Y' \;=\; \bigcup_{y' \in Y'} (V_{y'} \cap Y') \;.$$

Da Y' kompakt ist, gibt es ein $k \in \mathbf{Z}_{\geqslant 0}$ und y'_j für $1 \leqslant j \leqslant k$ mit

$$Y' \;=\; \bigcup_{j=1}^{k} (V_{y'_j} \cap Y') \;.$$

Wähle nun $i(j) \in I$ mit $U_{y'_j} \times V_{y'_j} \subseteq W_{i(j)}$ für $1 \leqslant j \leqslant k$. Setze

$$U \;:=\; \bigcap_{j=1}^{k} U_{y'_j} \qquad \text{und} \qquad V \;:=\; \bigcup_{j=1}^{k} V_{y'_j} \;.$$

Es ist $X' = \{x'\} \subseteq U \overset{\text{off.}}{\subseteq} X$ und $Y' \subseteq V \overset{\text{off.}}{\subseteq} Y$. Ferner ist

$$U \times V \;=\; U \times (\bigcup_{j=1}^{k} V_{y'_j}) \;=\; \bigcup_{j=1}^{k} (U \times V_{y'_j}) \;\subseteq\; \bigcup_{j=1}^{k} (U_{y'_j} \times V_{y'_j}) \;\subseteq\; \bigcup_{j=1}^{k} W_{i(j)} \;.$$

Mit der endlichen Teilmenge $I_0 := \{i(j) \;:\; 1 \leqslant j \leqslant k\}$ von I liefert dies das Gewünschte.

Betrachten wir nun den allgemeinen Fall.

Sei einmal $y' \in Y'$. Unter Verwendung des vorstehenden Spezialfalls finden wir ein ein $U_{y'} \overset{\text{off.}}{\subseteq} X$, ein $V_{y'} \overset{\text{off.}}{\subseteq} Y$ und eine endliche Teilmenge $\tilde{I} \subseteq I$ mit

$$X' \times \{y'\} \;\subseteq\; U_{y'} \times V_{y'} \;\subseteq\; \bigcup_{i \in \tilde{I}} W_i \;.$$

Es ist $Y' \subseteq \bigcup_{y' \in Y'} V_{y'}$, i.e.

$$Y' \;=\; \bigcup_{y' \in Y'} (V_{y'} \cap Y') \;.$$

Da Y' kompakt ist, gibt es ein $k \in \mathbf{Z}_{\geqslant 0}$ und y'_j für $1 \leqslant j \leqslant k$ mit

$$Y' \;=\; \bigcup_{j=1}^{k} (V_{y'_j} \cap Y') \;.$$

Wähle nun eine endliche Teilmenge $\tilde{I}(j) \subseteq I$ mit $U_{y'_j} \times V_{y'_j} \subseteq \bigcup_{i\in\tilde{I}(j)} W_i$ für $1 \leqslant j \leqslant k$. Setze

$$U \;:=\; \bigcap_{j=1}^k U_{y'_j} \qquad \text{und} \qquad V \;:=\; \bigcup_{j=1}^k V_{y'_j}\;.$$

Es ist $X' \subseteq U \overset{\text{off.}}{\subseteq} X$ und $Y' \subseteq V \overset{\text{off.}}{\subseteq} Y$. Ferner ist

$$U \times V \;=\; U \times (\bigcup_{j=1}^k V_{y'_j}) \;=\; \bigcup_{j=1}^k (U \times V_{y'_j}) \;\subseteq\; \bigcup_{j=1}^k (U_{y'_j} \times V_{y'_j}) \;\subseteq\; \bigcup_{j=1}^k \bigcup_{i\in\tilde{I}(j)} W_i\;.$$

Mit der endlichen Teilmenge $I_0 := \bigcup_{j=1}^k \tilde{I}(j)$ von I liefert dies das Gewünschte.

Lemma (Tychonoff, für zwei Räume). *Seien X und Y kompakte topologische Räume. Dann ist auch ihr Produkt $X \times Y$ kompakt.*

Beweis. Wende vorstehendes Lemma auf den Fall $X' = X$ und $Y' = Y$ an. In der dortigen Bezeichnung wird dann auch $U = X$ und $V = X$, sowie sowohl $\bigcup_{i\in I} W_i = X \times Y$ als auch $\bigcup_{i\in I_0} W_i = X \times Y$. ▫

Satz 4 (Tychonoff, endlich) *Sei $k \in \mathbf{Z}_{\geqslant 1}$. Seien X_i kompakte topologische Räume für $1 \leqslant i \leqslant k$. Dann ist auch $\prod_{i=1}^k X_i$ kompakt.*

Beweis. Dies folgt mit vorigem Lemma und Aufgabe 35.(1). ▫

Der Satz von Tychonoff gilt allgemeiner, es ist auch das Produkt unendlich vieler kompakter topologischer Räume wieder kompakt – worauf wir nicht eingehen. Daher aber die ausdrückliche Kennzeichnung mit “endlich”.

Definition. Sei $n \in \mathbf{Z}_{\geqslant 1}$. Eine Teilmenge $M \subseteq \mathbf{R}^n$ heiße *beschränkt,* wenn es ein $R \in \mathbf{R}_{\geqslant 0}$ gibt mit $M \subseteq \bar{\mathrm{B}}_R^{(\infty)}(0)$; cf. Aufgabe 9.

Korollar. *Sei $n \in \mathbf{Z}_{\geqslant 1}$. Sei $X \subseteq \mathbf{R}^n$. Es ist X kompakt genau dann, wenn X in $\mathbf{R}^n$ eine beschränkte und abgeschlossene Teilmenge ist.*

Beweis. Sei zum einen X eine abgeschlossene und beschränkte Teilmenge von $\mathbf{R}^n$. Sei $R \in \mathbf{R}_{\geqslant 0}$ mit $X \subseteq \bar{\mathrm{B}}_R^{(\infty)}(0)$. Sei $\mathbf{R}^n \xrightarrow[\sim]{f} \mathbf{R}^{\times n}$, $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \longmapsto (x_1, \ldots, x_n)$ der Homöomorphismus aus Aufgabe 33. Es wird $\bar{\mathrm{B}}_R^{(\infty)}(0)$ unter f homömorph auf $[-R, +R]^{\times n}$ abgebildet; vgl. Aufgabe 35.(2) und letzte Bemerkung aus §2.1.3. Mit Satz 4 und Aufgabe 37.(2) ist also $\bar{\mathrm{B}}_R^{(\infty)}(0)$ kompakt. Nun ist X eine abgeschlossene Teilmenge von $\bar{\mathrm{B}}_R^{(\infty)}(0)$; vgl. Aufgabe 12.(2). Mit Lemma (2) aus §4.2.1 ist also X kompakt.

Sei zum anderen X kompakt. Es ist $\mathbf{R}^n$ hausdorffsch; vgl. Beispiel (2) aus §4.1.1. Mit Lemma (1) aus §4.2.1 ist $X \overset{\text{abg.}}{\subseteq} \mathbf{R}^n$. Überdecke X offen via

$$X \;=\; \bigcup_{n\in\mathbf{Z}_{\geqslant 1}} (\mathrm{B}_n^{(\infty)}(0) \cap X)\;.$$

Da X kompakt ist, gibt es eine endliche Teilmenge $I \subseteq \mathbf{Z}_{\geqslant 1}$ mit

$$X \;=\; \bigcup_{n\in I} (\mathrm{B}_n^{(\infty)}(0) \cap X) \;\subseteq\; \bar{\mathrm{B}}_{\max I}^{(\infty)}(0)\;.$$

Also ist X beschränkt. $\square$

Korollar (zum vorvorigen Lemma). *Sei X ein Hausdorffraum. Seien Y, $Z \subseteq X$ mit Y, Z kompakt und $Y \cap Z = \emptyset$. Dann gibt es $Y \subseteq U' \overset{\text{off.}}{\subseteq} X$ und $Z \subseteq U'' \overset{\text{off.}}{\subseteq} X$ mit $U' \cap U'' = \emptyset$.*

Beweis. Schreibe $W := (X \times X) \smallsetminus \Delta(X)$. Da X hausdorffsch ist, ist $W \overset{\text{off.}}{\subseteq} X \times X$; cf. Bemerkung in §4.1.1.

Da $Y \cap Z = \emptyset$, ist $Y \times Z \subseteq W$. Wir können also das vorvorige Lemma anwenden, wenn wir, in dortiger Bezeichnung, I einelementig wählen. Wir erhalten $Y \subseteq U' \overset{\text{off.}}{\subseteq} X$ und $Z \subseteq U'' \overset{\text{off.}}{\subseteq} X$ so, daß

$$Y \times Z \;\subseteq\; U' \times U'' \;\subseteq\; W \;\subseteq\; X \times Y\,.$$

Letztere Inklusion besagt gerade, daß $U' \cap U'' = \emptyset$. $\square$

Die Aussage im Fall $Y = \{y\}$ und $Z = \{z\}$ beide einpunktig ist gerade die Definition der Hausdorffschheit von X.

Aus der Aussage im Fall Y beliebige kompakte Teilmenge von X und $Z = \{z\}$ einpunktig kann man erneut folgern, daß die kompakte Teilmenge Y des Hausdorffraums X abgeschlossen ist, indem man zeigt, daß $X \smallsetminus Y \overset{\text{off.}}{\subseteq} X$; cf. Bemerkung aus §1.1.3. Vgl. Lemma (1) aus §4.2.1.

4.2.3 Minimum und Maximum

Satz 5 (Minimum und Maximum) *Sei X ein kompakter topologischer Raum. Sei $f \in \mathrm{C}(X)$, i.e. sei f eine stetige Abbildung von X nach $\mathbf{R}$. Dann gibt es $\check{x} \in X$ und $\hat{x} \in X$ mit*

$$f(\check{x}) \;\leqslant\; f(x) \;\leqslant\; f(\hat{x})$$

für alle $x \in X$. In anderen Worten, f nimmt auf X ein Minimum und ein Maximum an.

Beweis. Mit $f \in \mathrm{C}(X)$ ist auch $-f \in \mathrm{C}(X)$; vgl. Aufgabe 20.(2). Somit genügt es, ein Maximum nachzuweisen, i.e. ein $\hat{x} \in X$ zu finden mit $f(x) \leqslant f(\hat{x})$ für alle $x \in X$.

Betrachte die offene Überdeckung

$$X \;=\; \bigcup_{n \in \mathbf{Z}_{\geqslant 1}} f^{-1}(\mathbf{R}_{<n})\,.$$

Da X kompakt ist, gibt es eine endliche Teilmenge $I \subseteq \mathbf{Z}_{\geqslant 1}$ mit

$$X \;=\; \bigcup_{n \in I} f^{-1}(\mathbf{R}_{<n}) \;=\; f^{-1}(\mathbf{R}_{<\max I})\,,$$

und also $f(X) \subseteq \mathbf{R}_{<\max I}$. Als nach oben beschränkte Teilmenge von $\mathbf{R}$ hat $f(X)$ ein Supremum $s := \sup f(X)$.

Wir wollen zeigen, daß es ein $\hat{x} \in X$ mit $f(\hat{x}) = s$ gibt, denn dann ist insbesondere $f(x) \leqslant s = f(\hat{x})$ für alle $x \in X$.

Angenommen, nicht. Dann ist $f(x) < s$ für alle $x \in X$. Also gibt es für alle $x \in X$ ein $n \in \mathbf{Z}_{\geqslant 1}$ mit $f(x) < s - 1/n$. In anderen Worten, wir haben eine offene Überdeckung

$$X \;=\; \bigcup_{n\in\mathbf{Z}_{\geqslant 1}} f^{-1}(\mathbf{R}_{<s-1/n})\;.$$

Da X kompakt ist, gibt es eine endliche Teilmenge $J \subseteq \mathbf{Z}_{\geqslant 1}$ mit

$$X \;=\; \bigcup_{n\in J} f^{-1}(\mathbf{R}_{<s-1/n}) \;=\; f^{-1}(\mathbf{R}_{<s-1/\max J})\;,$$

und also ist $f(X) \subseteq \mathbf{R}_{<s-1/\max J}$, so daß $s - 1/\max J$ eine obere Schranke von $f(X)$ ist, die unter s liegt, im *Widerspruch* zur Definition von s. ▫

4.2.4 Konvergenz- und Häufungspunkte von Folgen

Sei X ein topologischer Raum.

Definition.

(1) Eine *Folge* in X ist eine Abbildung von $\mathbf{Z}_{\geqslant 1}$ nach X, geschrieben $(x_n)_{n\in\mathbf{Z}_{\geqslant 1}}$ oder $(x_n)_n$, wobei x_n das Bild von $n \in \mathbf{Z}_{\geqslant 1}$ bezeichnet.

(2) Es heißt $x \in X$ ein *Häufungspunkt* der Folge $(x_n)_n$, falls für alle $x \in U \overset{\text{off.}}{\subseteq} X$ die Menge

$$\{n \in \mathbf{Z}_{\geqslant 1} \;:\; x_n \in U\}$$

unendlich ist.

(3) Es heißt $x \in X$ ein *Konvergenzpunkt* der Folge $(x_n)_n$, falls für alle $x \in U \overset{\text{off.}}{\subseteq} X$ die Menge

$$\{n \in \mathbf{Z}_{\geqslant 1} \;:\; x_n \notin U\}$$

endlich ist.

In anderen Worten, x ist Konvergenzpunkt von (x_n), falls es für alle $x \in U \overset{\text{off.}}{\subseteq} X$ ein $m \in \mathbf{Z}_{\geqslant 1}$ gibt mit $x_n \in U$ für alle $n \in \mathbf{Z}_{\geqslant m}$. Denn dies besagt gerade, daß $\{n \in \mathbf{Z}_{\geqslant 1} \;:\; x_n \notin U\} \subseteq \{1,\ldots,m-1\}$ für ein $m \in \mathbf{Z}_{\geqslant 1}$, i.e. daß die Menge $\{n \in \mathbf{Z}_{\geqslant 1} \;:\; x_n \notin U\}$ endlich ist.

Da das Komplement einer endlichen Menge in $\mathbf{Z}_{\geqslant 1}$ unendlich ist, ist ein Konvergenzpunkt insbesondere auch ein Häufungspunkt.

Die Umkehrung gilt nicht, wie das Beispiel $X = \mathbf{R}$ und die Folge $(x_n)_n = (0,1,0,1,\ldots)$ zeigt, von der 0 zwar ein Häufungspunkt ist, aber, wie man e.g. anhand $0 \in (-1/2,+1/2) \overset{\text{off.}}{\subseteq} \mathbf{R}$ erkennt, kein Konvergenzpunkt.

Bemerkung. *Ist X hausdorffsch, so hat eine Folge $(x_n)_n$ in X höchstens einen Konvergenzpunkt. Genauer, ist x ein Konvergenzpunkt und x' ein Häufungspunkt von $(x_n)_n$, so ist $x = x'$.*

Existiert im Fall X hausdorffsch der Konvergenzpunkt x einer Folge $(x_n)_n$ in X, so schreibt man auch $x = \lim_n x_n$. Diesenfalls reden wir auch von einer *konvergenten Folge,* die *gegen x konvergiert.*

Beweis. Sei $x \neq x'$ *angenommen.* Sei $x \in U \overset{\text{off.}}{\subseteq} X$ und $x' \in U' \overset{\text{off.}}{\subseteq} X$ mit $U \cap U' = \emptyset$. Dann ist $\{n \in \mathbf{Z}_{\geqslant 1} \ : \ x_n \notin U\}$ endlich und $\{n \in \mathbf{Z}_{\geqslant 1} \ : \ x_n \in U'\}$ unendlich. Letztere Menge ist aber eine Teilmenge ersterer, und das ist ein *Widerspruch.* ▫

Bemerkung. *Ist (X, d) ein metrischer Raum, so konvergiert eine Folge $(x_n)_n$ in X genau dann gegen ein $x \in X$, wenn es für alle $\varepsilon \in \mathbf{R}_{>0}$ ein $m \in \mathbf{Z}_{\geqslant 1}$ so gibt, daß $d(x_n, x) < \varepsilon$ für alle $n \in \mathbf{Z}_{\geqslant m}$.*

Diese Bemerkung werden wir im folgenden stillschweigend verwenden.

Beweis. Sei $(x_n)_n$ eine Folge in X. Sei $x \in X$.

Konvergiere zum einen $(x_n)_n$ gegen x. Sei $\varepsilon \in \mathbf{R}_{>0}$. Dann ist $x \in \mathrm{B}_\varepsilon(x) \overset{\text{off.}}{\subseteq} X$; cf. Lemma aus §1.3.2. Also ist die Menge $\{n \in \mathbf{Z}_{\geqslant 1} \ : \ x_n \notin \mathrm{B}_\varepsilon(x)\}$ endlich. Sei $m \in \mathbf{Z}_{\geqslant 1}$ größer als ihr Maximum. Dann ist $x_n \in \mathrm{B}_\varepsilon(x)$, d.h. $d(x_n, x) < \varepsilon$, für alle $n \in \mathbf{Z}_{\geqslant m}$.

Sei zum anderen für alle $\varepsilon \in \mathbf{R}_{>0}$ ein $m \in \mathbf{Z}_{\geqslant 1}$ so existent, daß $d(x_n, x) < \varepsilon$ für alle $n \in \mathbf{Z}_{\geqslant m}$. Sei $x \in U \overset{\text{off.}}{\subseteq} X$. Dann gibt es ein $\varepsilon \in \mathbf{R}_{>0}$ so, daß $\mathrm{B}_\varepsilon(x) \subseteq U$. Sei $m \in \mathbf{Z}_{\geqslant 1}$ so, daß $d(x_n, x) < \varepsilon$ für alle $n \in \mathbf{Z}_{\geqslant m}$. Also wird

$$\begin{array}{rl} & \{n \in \mathbf{Z}_{\geqslant 1} \ : \ x_n \notin U\} \\ \subseteq & \{n \in \mathbf{Z}_{\geqslant 1} \ : \ x_n \notin \mathrm{B}_\varepsilon(x)\} \\ \subseteq & \{1, \ldots, m-1\}, \end{array}$$

und da letztere Menge endlich ist, trifft dies auch für erstere zu. ▫

Bemerkung. *Ist X kompakt, so hat jede Folge $(x_n)_n$ in X wenigstens einen Häufungspunkt.*

Beweis. Nehmen wir *an,* es gibt eine Folge $(x_n)_n$ ohne Häufungspunkt. Für alle $x \in X$ gibt es also ein $x \in U_x \overset{\text{off.}}{\subseteq} X$ mit $\{n \in \mathbf{Z}_{\geqslant 1} \ : \ x_n \in U_x\}$ endlich. Es ist $X = \bigcup_{x \in X} U_x$. Da X kompakt ist, gibt es ein $k \in \mathbf{Z}_{\geqslant 0}$ und $y_1, \ldots, y_k \in X$ mit $X = \bigcup_{i=1}^k U_{y_i}$. Es wird

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{Z}_{\geqslant 1} & = & \{n \in \mathbf{Z}_{\geqslant 1} \ : \ x_n \in X\} \\ & = & \{n \in \mathbf{Z}_{\geqslant 1} \ : \ x_n \in \bigcup_{i=1}^k U_{y_i}\} \\ & = & \bigcup_{i=1}^k \{n \in \mathbf{Z}_{\geqslant 1} \ : \ x_n \in U_{y_i}\} \end{array}$$

als endliche Vereinigung endlicher Mengen selbst wieder endlich, und das ist ein *Widerspruch.* ▫

4.2.5 Folgenkompaktheit

Sei X ein topologischer Raum.

Definition. Eine Basis B von X heißt *lokal abzählbar,* falls man sie

$$B = \{U_{x,n} : x \in X,\ n \in \mathbf{Z}_{\geqslant 1}\}$$

schreiben kann, wobei $x \in U_{x,n}$ für $x \in X$ und $n \in \mathbf{Z}_{\geqslant 1}$, und wobei für $x \in V \overset{\text{off.}}{\subseteq} X$ vorgegeben ein $n \in \mathbf{Z}_{\geqslant 1}$ existiert mit

$$x \in U_{x,n} \subseteq V \overset{\text{off.}}{\subseteq} X .$$

Beispiel.

(1) Sei (X, d) ein metrischer Raum. Der zugehörige topologische Raum $(X, T^{(X,d)})$ hat die lokal abzählbare Basis

$$\{\mathrm{B}_{1/n}(x) : x \in X,\ n \in \mathbf{Z}_{\geqslant 1}\}$$

Wann immer $x \in V \overset{\text{off.}}{\subseteq} X$ gegeben ist, gibt es bekanntlich ein $\delta \in \mathbf{R}_{>0}$ mit $\mathrm{B}_\delta(x) \subseteq V$. Wählt man nun $n \in \mathbf{Z}_{\geqslant 1}$ so, daß $1/n < \delta$, so wird also auch $x \in \mathrm{B}_{1/n}(x) \subseteq \mathrm{B}_\delta(x) \subseteq V$.

(2) Sei X ein topologischer Raum, der eine abzählbare Basis B besitzt; vgl. Aufgabe 27. Dann ist auch $B \setminus \{\emptyset\}$ eine abzählbare Basis. Somit ist o.E. $\emptyset \notin B$.

Es ist auch $\{U \in B : x \in U\} \subseteq B$ eine abzählbare, nichtleere Menge; vgl. Aufgabe 27.(2). Also können wir mit einer geeigneten Numerierung

$$\{U \in B : x \in U\} = \{U_{x,n} : n \in \mathbf{Z}_{\geqslant 1}\}$$

schreiben. Wann immer nun $x \in V \overset{\text{off.}}{\subseteq} X$ gegeben ist, gibt es ein $U \in B$ mit $x \in U \subseteq V \overset{\text{off.}}{\subseteq} X$. Nachschlagen der Nummer von U liefert also ein $n \in \mathbf{Z}_{\geqslant 1}$ mit $x \in U = U_{x,n} \subseteq V \overset{\text{off.}}{\subseteq} X$. Nun ist $B = \{U_{x,n} : x \in X,\ n \in \mathbf{Z}_{\geqslant 1}\}$. Also besitzt X auch eine lokal abzählbare Basis.

Definition. Ist $(x_n)_n$ eine Folge in X, und ist $\mathbf{Z}_{\geqslant 1} \xrightarrow{\varphi} \mathbf{Z}_{\geqslant 1}$ eine monoton wachsende injektive Abbildung, so heißt $(x_{\varphi(m)})_m$ eine *Teilfolge* von $(x_n)_n$. Beachte, daß für ein solches φ stets $m \leqslant \varphi(m)$ gilt, da $\varphi\big(\{1, \ldots, m\}\big) \subseteq \{1, \ldots, \varphi(m)\}$, und erstere Menge aus m, letztere dagegen aus $\varphi(m)$ Elementen besteht.

Bemerkung. *Habe X eine lokal abzählbare Basis. Sei $(x_n)_n$ eine Folge in X. Sei x ein Häufungspunkt von $(x_n)_n$. Es gibt eine Teilfolge $(x_{\varphi(m)})_m$ von $(x_n)_n$ mit Konvergenzpunkt x.*

Beweis. Sei $B = \{U_{x,n} : x \in X,\ n \in \mathbf{Z}_{\geqslant 1}\}$ eine lokal abzählbare Basis, indiziert wie in der Definition dieses Begriffs. Die nun folgenden Wahlen sind dank x Häufungspunkt von $(x_n)_n$ möglich.

Wähle $\varphi(1) \in \mathbf{Z}_{\geqslant 1}$ so, daß $x_{\varphi(1)} \in U_{x,1}$.

Wähle $\varphi(2) \in \mathbf{Z}_{>\varphi(1)}$ so, daß $x_{\varphi(2)} \in U_{x,1} \cap U_{x,2}$.

Wähle $\varphi(3) \in \mathbf{Z}_{>\varphi(2)}$ so, daß $x_{\varphi(3)} \in U_{x,1} \cap U_{x,2} \cap U_{x,3}$.

Usf.

Es ist so eine Teilfolge $(x_{\varphi(m)})_m$ von $(x_n)_n$ konstruiert. Zeigen wir, daß diese x als Konvergenzpunkt hat. Sei $x \in V \overset{\text{off.}}{\subseteq} X$ gegeben. Wir müssen zeigen, daß $\{m \in \mathbf{Z}_{\geqslant 1} \;:\; x_{\varphi(m)} \not\in V\}$ endlich ist. Sei $n \in \mathbf{Z}_{\geqslant 1}$ so, daß $x \in U_{x,n} \subseteq V \overset{\text{off.}}{\subseteq} X$. Für die fragliche Menge erhalten wir

$$\begin{array}{rl} & \{m \in \mathbf{Z}_{\geqslant 1} \;:\; x_{\varphi(m)} \not\in V\} \\ \subseteq & \{m \in \mathbf{Z}_{\geqslant 1} \;:\; x_{\varphi(m)} \not\in U_{x,n}\} \\ \subseteq & \{1, \ldots, n-1\}\,, \end{array}$$

so daß sie als Teilmenge einer endlichen Menge selbst endlich ist. ▫

Definition. Hat jede Folge $(x_n)_n$ in X eine Teilfolge $(x_{\varphi(m)})_m$, die einen Konvergenzpunkt besitzt, so heißt X *folgenkompakt.*

Korollar. *Ist X kompakt und hat X eine lokal abzählbare Basis, so ist X folgenkompakt.*

Beweis. Sei $(x_n)_n$ eine Folge in X. Da X kompakt ist, hat $(x_n)_n$ einen Häufungspunkt $x \in X$; vgl. vorvorige Bemerkung. Da X eine lokal abzählbare Basis hat, hat $(x_n)_n$ also eine Teilfolge $(x_{\varphi(m)})_m$ mit Konvergenzpunkt x ; vgl. vorige Bemerkung. ▫

Lemma. *Ist X folgenkompakt und hat X eine abzählbare Basis, so ist X kompakt.*

Beweis. Zunächst einmal ist o.E. $X \neq \emptyset$. Sei B eine abzählbare Basis von X.

Nehmen wir *an,* X ist nicht kompakt. Dann gibt es eine offene Überdeckung

$$X \;=\; \bigcup_{i \in I} U_i$$

so, daß für jede endliche Teilmenge $J \subseteq I$

$$X \;\supsetneq\; \bigcup_{i \in J} U_i$$

ist. Für $x \in X$ wählen wir ein $i(x) \in I$ und ein $V_x \in B$ mit $x \in V_x \subseteq U_{i(x)}$. Es wird

$$X \;=\; \bigcup_{x \in X} V_x\,,$$

für jede endliche Teilmenge $M \subseteq X$ ist aber

$$X \;\supsetneq\; \bigcup_{x \in M} V_x\,,$$

denn $X = \bigcup_{x \in M} V_x$ hätte wegen $V_x \subseteq U_{i(x)}$ auch $X = \bigcup_{x \in M} U_{i(x)} = \bigcup_{i \in \{i(x)\,:\,x \in M\}} U_i$ zur Folge, was nicht geht, da $\{i(x) \;:\; x \in M\}$ eine endliche Teilmenge von I ist.

Nun ist $\{V_x \;:\; x \in X\}$ als Teilmenge von B abzählbar; vgl. Aufgabe 27.(2). Da diese Menge darüberhinaus nichtleer ist, können wir $\{V_x \;:\; x \in X\} = \{W_\ell \;:\; \ell \in \mathbf{Z}_{\geqslant 1}\}$ für gewisse

$W_\ell \in B$ umindizieren. Insbesondere gibt es für alle $\ell \in \mathbf{Z}_{\geqslant 1}$ ein $x(\ell) \in X$ mit $V_{x(\ell)} = W_\ell$. Dann wird

$$X \;=\; \bigcup_{\ell \in \mathbf{Z}_{\geqslant 1}} W_\ell\;,$$

aber

$$X \;\supsetneqq\; \bigcup_{\ell=1}^{k} W_\ell$$

für $k \in \mathbf{Z}_{\geqslant 1}$, denn $X = \bigcup_{\ell=1}^{k} W_\ell$ hätte $X = \bigcup_{\ell=1}^{k} V_{x(\ell)} = \bigcup_{x \in \{x(\ell)\,:\,1 \leqslant \ell \leqslant k\}} V_x$ zur Folge, was nicht geht, da $\{x(\ell)\;:\;1 \leqslant \ell \leqslant k\}$ eine endliche Teilmenge von X ist. Wähle

$$y_k \;\in\; X \smallsetminus \left(\bigcup_{\ell=1}^{k} W_\ell\right)$$

für $k \in \mathbf{Z}_{\geqslant 1}$. Nach Voraussetzung an X hat die Folge $(y_k)_k$ eine Teilfolge $(y_{\varphi(m)})_m$ mit einem Konvergenzpunkt y. Da $m \leqslant \varphi(m)$ stets, ist auch

$$y_{\varphi(m)} \;\in\; X \smallsetminus \left(\bigcup_{\ell=1}^{m} W_\ell\right)$$

für $m \in \mathbf{Z}_{\geqslant 1}$. Da $X = \bigcup_{\ell \in \mathbf{Z}_{\geqslant 1}} W_\ell$, gibt es ein $\ell_0 \in \mathbf{Z}_{\geqslant 1}$ mit $y \in W_{\ell_0}$. Da y ein Konvergenzpunkt von $(y_{\varphi(m)})_m$ ist und da $W_{\ell_0} \overset{\text{off.}}{\subseteq} X$, gibt es ein m_0 so, daß

$$y_{\varphi(m)} \;\in\; W_{\ell_0}$$

für alle $m \in \mathbf{Z}_{\geqslant m_0}$. Aber es ist

$$y_{\varphi(m)} \;\notin\; W_{\ell_0}$$

für alle $m \in \mathbf{Z}_{\geqslant \ell_0}$. Dies ist ein *Widerspruch.* ▫

4.2.6 Zusammenfassung Kompaktheit und Folgenkompaktheit

Sei X ein topologischer Raum.

Es heißt X kompakt, falls jede offene Überdeckung von X eine endliche Teilüberdeckung besitzt.

Es heißt X folgenkompakt, falls jede Folge in X eine Teilfolge mit einem Konvergenzpunkt besitzt. (Ist X zudem hausdorffsch, so reden wir auch kurz von einer konvergenten Teilfolge.)

Die Begriffe der Kompaktheit und der Folgenkompaktheit hängen wie folgt zusammen.

- Ist X folgenkompakt, so ist X kompakt, falls X dazuhin eine abzählbare Basis besitzt; cf. Lemma in §4.2.5.

- Ist X kompakt, so ist X folgenkompakt, falls X dazuhin eine lokal abzählbare Basis besitzt ist; cf. Korollar in §4.2.5. Letzteres ist zum Beispiel der Fall, falls X ein metrischer Raum ist; oder aber, falls X eine abzählbare Basis besitzt; cf. Beispiel in §4.2.5.

Sei $n \in \mathbf{Z}_{\geqslant 1}$. Betrachten wir einmal eine Teilmenge $X \subseteq \mathbf{R}^n$.

Da $\mathbf{R}^n$, wie in Aufgabe 27.(5) gesehen, eine abzählbare Basis besitzt, gilt dies auch für X. Denn ist B eine abzählbare Basis von $\mathbf{R}^n$, so ist $\{U \cap X \ : \ U \in B\}$ nach Aufgabe 32 eine Basis von X. Die Surjektion von B auf diese Basis, die U nach $U \cap X$ abbildet, zeigt, daß letztere abzählbar ist; vgl. Aufgabe 27.(1).

Somit ist $X \subseteq \mathbf{R}^n$ genau dann kompakt, wenn es folgenkompakt ist.

Nehmen wir noch das erste Korollar aus §4.2.2 hinzu, so wissen wir also folgendes.

Satz 6 (Heine-Borel) *Sei $n \in \mathbf{Z}_{\geqslant 1}$. Sei $X \subseteq \mathbf{R}^n$. Dann gilt:*

$$\boxed{X \text{ ist abgeschlossen und beschränkt} \iff X \text{ ist kompakt} \iff X \text{ ist folgenkompakt}}$$

4.2.7 Charakterisierung von Stetigkeit über Folgen

Bemerkung. *Seien X und Y topologische Räume. Sei $f : X \longrightarrow Y$ eine stetige Abbildung. Sei $(x_n)_n$ eine Folge in X. Sei $x \in X$ ein Konvergenzpunkt der Folge $(x_n)_n$. Dann ist $f(x) \in Y$ ein Konvergenzpunkt der Folge $\big(f(x_n)\big)_n$.*

Beweis. Sei $f(x) \in V \overset{\text{off.}}{\subseteq} Y$. Dann ist $x \in f^{-1}(V) \overset{\text{off.}}{\subseteq} X$. Also ist

$$\{n \in \mathbf{Z}_{\geqslant 1} \ : \ f(x_n) \not\in V\} \ = \ \{n \in \mathbf{Z}_{\geqslant 1} \ : \ x_n \not\in f^{-1}(V)\}$$

eine endliche Menge. □

Wir erinnern daran, daß metrische Räume hausdorffsch sind; vgl. Beispiel (1) aus §4.1.1.

Lemma. *Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume. Eine Abbildung $f : X \longrightarrow Y$ ist genau dann stetig, wenn für jede konvergente Folge $(x_n)_n$ in X die Bildfolge $\big(f(x_n)\big)_n$ gegen $f\big(\lim_n x_n\big)$ konvergiert.*

Kurz, f ist stetig genau dann, wenn

$$\lim_n f(x_n) \ = \ f\big(\lim_n x_n\big)$$

für alle konvergenten Folgen $(x_n)_n$ in X.

Beweis. Ist zum einen f stetig, so folgt mit vorstehender Bemerkung, daß für eine konvergente Folge $(x_n)_n$ in X gilt, daß $\big(f(x_n)\big)_n$ gegen $f\big(\lim_n x_n\big)$ konvergiert.

Konvergiere zum anderen die Folge $\big(f(x_n)\big)_n$ gegen $f(\lim_n x_n)$, wann immer $(x_n)_n$ konvergiert. *Nehmen* wir *an,* f ist nicht stetig. Dann gibt es ein $x \in X$ und ein $\varepsilon \in \mathbf{R}_{>0}$ so, daß $f\big(\mathrm{B}_\delta(x)\big) \not\subseteq \mathrm{B}_\varepsilon\big(f(x)\big)$ für alle $\delta \in \mathbf{R}_{>0}$; vgl. Lemma aus §2.2. Insbesondere gibt es für alle $n \in \mathbf{Z}_{\geqslant 1}$ ein x_n so, daß $x_n \in \mathrm{B}_{1/n}(x)$, aber $f(x_n) \not\in \mathrm{B}_\varepsilon\big(f(x)\big)$.

Es wird x Konvergenzpunkt von $(x_n)_n$. Sei hierzu $\eta \in \mathbf{R}_{>0}$ vorgegeben. Wähle $m \in \mathbf{Z}_{\geqslant 1}$ mit $m \geqslant 1/\delta$. Dann ist $d_X(x_n, x) < 1/n \leqslant 1/m \leqslant \eta$ für $n \in \mathbf{Z}_{\geqslant m}$.

Nach Voraussetzung ist nun $\big(f(x_n)\big)_n$ konvergent mit Konvergenzpunkt $f(x)$. Insbesondere ist $\{n \in \mathbf{Z}_{\geqslant 1} \,:\, f(x_n) \notin \mathrm{B}_\varepsilon\big(f(x)\big)\}$ endlich. Aber nach Konstruktion ist $\{n \in \mathbf{Z}_{\geqslant 1} \,:\, f(x_n) \notin \mathrm{B}_\varepsilon\big(f(x)\big)\} = \mathbf{Z}_{\geqslant 1}$. Dies ist ein *Widerspruch.* ▫

4.2.8 Gleichmäßige Stetigkeit

Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume. Sei daran erinnert, daß metrische Räume hausdorffsch sind; cf. Beispiel (1) aus §4.1.1.

Definition. Eine Abbildung $f : X \longrightarrow Y$ heißt *gleichmäßig stetig,* falls es für alle $\varepsilon \in \mathbf{R}_{>0}$ ein $\delta \in \mathbf{R}_{>0}$ gibt mit $d_Y\big(f(x), f(x')\big) < \varepsilon$ für alle $x,\ x' \in X$ mit $d_X(x, x') < \delta$.

Eine gleichmäßig stetige Abbildung ist insbesondere stetig, da für diese Wahl von δ insbesondere $f\big(\mathrm{B}_\delta(x)\big) \subseteq \mathrm{B}_\varepsilon\big(f(x)\big)$ ist für alle $x \in X$ – die Wahl von δ ist nun aber sogar unabhängig von der betrachteten Stelle $x \in X$; vgl. Lemma aus §2.2.

Satz 7 (Stetig auf folgenkompakt ist gleichmäßig stetig) *Sei (X, d_X) ein folgenkompakter metrischer Raum; genauer, ein metrischer Raum (X, d_X) so, daß der zugehörige topologische Raum $(X, T^{(X,d_X)})$ folgenkompakt ist. Sei (Y, d_Y) ein metrischer Raum.*

Sei $f \in \mathrm{C}(X, Y)$, i.e. sei f eine stetige Abbildung von X nach Y. Dann ist f gleichmäßig stetig.

Insbesondere ist jede stetige reellwertige Funktion $f \in \mathrm{C}(X)$ gleichmäßig stetig.

Beweis. Nehmen wir *an,* f ist nicht gleichmäßig stetig. Dann gibt es ein $\varepsilon \in \mathbf{R}_{>0}$ so, daß für alle $\delta \in \mathbf{R}_{>0}$ Elemente $x,\ x' \in X$ so existieren, daß $d_X(x, x') < \delta$, aber $d_Y(f(x), f(x')) \geqslant \varepsilon$.

Insbesondere gibt es für alle $n \in \mathbf{Z}_{\geqslant 1}$ Elemente $x_n\,,\ x'_n \in X$ so, daß $d_X(x_n\,, x'_n) < 1/n$, aber $d_Y\big(f(x_n), f(x'_n)\big) \geqslant \varepsilon$.

Sei $(x_{\varphi(m)})_m$ eine konvergente Teilfolge von $(x_n)_n$, und konvergiere sie gegen $x \in X$. Da $\varphi(m) \geqslant m$, ist $d_X(x_{\varphi(m)}, x'_{\varphi(m)}) < 1/\varphi(m) \leqslant 1/m$, aber $d_Y\big(f(x_{\varphi(m)}), f(x'_{\varphi(m)})\big) \geqslant \varepsilon$ für $m \in \mathbf{Z}_{\geqslant 1}$.

Der einfacheren Lesbarkeit halber schreiben wir $(\tilde{x}_m)_m := (x_{\varphi(m)})_m$ und $(\tilde{x}'_m)_m := (x'_{\varphi(m)})_m$. Es konvergiert $(\tilde{x}_m)_m$ gegen x, es ist $d_X(\tilde{x}_m\,, \tilde{x}'_m) < 1/m$, aber $d_Y\big(f(\tilde{x}_m), f(\tilde{x}'_m)\big) \geqslant \varepsilon$ für $m \in \mathbf{Z}_{\geqslant 1}$.

Sei $(\tilde{x}'_{\psi(\ell)})_\ell$ eine konvergente Teilfolge von $(\tilde{x}'_m)_m$, und konvergiere sie gegen $x' \in X$.

Als Teilfolge von $(\tilde{x}_m)_m$ konvergiert auch $(\tilde{x}_{\psi(\ell)})_\ell$ gegen x. Denn sei $\eta \in \mathbf{R}_{>0}$ vorgegeben. Es gibt ein $m_0 \in \mathbf{Z}_{\geqslant 1}$ so, daß $d_X(\tilde{x}_m\,, x) < \eta$ für alle $m \in \mathbf{Z}_{\geqslant m_0}$. Dann ist auch $d_X(\tilde{x}_{\psi(\ell)}, x) < \eta$ für alle $\ell \in \mathbf{Z}_{\geqslant m_0}$, da diesenfalls $\psi(\ell) \geqslant \ell \geqslant m_0$ ist.

Da $\psi(\ell) \geqslant \ell$, ist $d_X(\tilde{x}_{\psi(\ell)}, \tilde{x}'_{\psi(\ell)}) < 1/\psi(\ell) \leqslant 1/\ell$, aber $d_Y\big(f(\tilde{x}_{\psi(\ell)}), f(\tilde{x}'_{\psi(\ell)})\big) \geqslant \varepsilon$ für $\ell \in \mathbf{Z}_{\geqslant 1}$.

Wir *behaupten,* daß $x = x'$. Ansonsten könnten wir $\eta := d_X(x,x') > 0$ schreiben und $\ell \in \mathbf{Z}_{\geqslant 1}$ so groß wählen, daß $1/\ell \leqslant \eta/3$, daß $\tilde{x}_{\psi(\ell)} \in \mathrm{B}_{\eta/3}\big(x\big)$ und daß $\tilde{x}'_{\psi(\ell)} \in \mathrm{B}_{\eta/3}\big(x'\big)$. Es ergäbe sich

$$\eta \;=\; d_X(x,x') \;\leqslant\; d_X(x,\tilde{x}_{\psi(\ell)}) + d_X(\tilde{x}_{\psi(\ell)},\tilde{x}'_{\psi(\ell)}) + d_X(\tilde{x}'_{\psi(\ell)},x') \;<\; \eta/3 + 1/\ell + \eta/3 \;\leqslant\; \eta\;,$$

was nicht der Fall ist. Dies zeigt die *Behauptung.*

Da f stetig ist und die Folgen $(\tilde{x}_{\psi(\ell)})_\ell$ und $(\tilde{x}'_{\psi(\ell)})_\ell$ gegen denselben Punkt $x = x'$ konvergieren, konvergieren auch die Bildfolgen $\big(f(\tilde{x}_{\psi(\ell)})\big)_\ell$ und $\big(f(\tilde{x}'_{\psi(\ell)})\big)_\ell$ beide gegen $f(x) = f(x')$; vgl. Bemerkung aus §4.2.7.

Sei nun $\ell \in \mathbf{Z}_{\geqslant 1}$ so groß gewählt, daß $f(\tilde{x}_{\psi(\ell)}) \in \mathrm{B}_{\varepsilon/2}\big(f(x)\big)$ und $f(\tilde{x}'_{\psi(\ell)}) \in \mathrm{B}_{\varepsilon/2}\big(f(x)\big)$. Es folgt

$$\varepsilon \;\leqslant\; d_Y\big(f(\tilde{x}_{\psi(\ell)}), f(\tilde{x}'_{\psi(\ell)})\big) \;\leqslant\; d_Y\big(f(\tilde{x}_{\psi(\ell)}), f(x)\big) + d_Y\big(f(x), f(\tilde{x}'_{\psi(\ell)})\big) \;<\; \varepsilon/2 + \varepsilon/2 \;=\; \varepsilon\;,$$

und wir haben einen *Widerspruch.* ▫

4.3 Zusammenhang

4.3.1 Begriff und erste Eigenschaften

Sei X ein topologischer Raum.

Bemerkung. *Sei $Y' \subseteq X$ eine sowohl offene als auch abgeschlossene Teilmenge. Schreibe $Y'' := X \smallsetminus Y'$, ebenfalls offen und abgeschlossen in X.*

Dann ist die Bijektion

$$\begin{array}{ccccccccc} \{1\} & \times & Y' & \sqcup & \{2\} & \times & Y'' & \xrightarrow{f} & X \\ (1 & , & y') & & & & & \longmapsto & y' \\ & & & & (2 & , & y'') & \longmapsto & y'' \end{array}$$

ein Homöomorphismus.

Was die Topologie auf $\{1\} \times Y' \sqcup \{2\} \times Y''$ anbelangt; vgl. §3.5.

Beweis. Bezeichnen $Y' \xrightarrow{\kappa'} X$ und $Y'' \xrightarrow{\kappa''} X$ die stetigen Inklusionsabbildungen, so ist $f = [\kappa',\kappa'']$, und somit nach Bemerkung aus §3.5 stetig. Wir müssen zeigen, daß f offen ist.

Eine Teilmenge $U \subseteq \{1\}\times Y' \sqcup \{2\}\times Y''$ ist offen, falls $V' := \{y' \in Y' \;:\; (1,y') \in U\} \overset{\text{off.}}{\subseteq} Y'$ und $V'' := \{y'' \in Y'' \;:\; (2,y'') \in U\} \overset{\text{off.}}{\subseteq} Y''$. Beachte, daß $U = \{1\} \times V' \sqcup \{2\} \times V''$. Also wird $f(U) = V' \sqcup V'' \subseteq X$. Da $V' \overset{\text{off.}}{\subseteq} Y' \overset{\text{off.}}{\subseteq} X$, ist $V' \overset{\text{off.}}{\subseteq} X$; cf. Aufgabe 6.(2). Genauso ist $V'' \overset{\text{off.}}{\subseteq} X$. Somit ist $f(U) = V' \sqcup V'' \overset{\text{off.}}{\subseteq} X$ als Vereinigung zweier offener Teilmengen. ▫

Bemerkung. *Gibt es topologische Räume Y' und Y'' und einen Homömorphismus*

$$\{1\} \times Y' \sqcup \{2\} \times Y'' \xrightarrow[\sim]{f} X\ ,$$

dann sind $f(\{1\} \times Y')$, $f(\{2\} \times Y'') \subseteq X$ offen und abgeschlossen.

Beweis. Wegen $X = f(\{1\} \times Y') \sqcup f(\{2\} \times Y'')$ genügt es zu zeigen, daß $f(\{1\} \times Y') \overset{\text{off.}}{\subseteq} X$. Da f offen ist, genügt es zu zeigen, daß $\{1\} \times Y' \overset{\text{off.}}{\subseteq} \{1\} \times Y' \sqcup \{2\} \times Y''$. Nun ist aber $\{y' \in Y' \,:\, (1, y') \in \{1\} \times Y'\} = Y' \overset{\text{off.}}{\subseteq} Y'$ und $\{y'' \in Y'' \,:\, (2, y'') \in \{1\} \times Y'\} = \emptyset \overset{\text{off.}}{\subseteq} Y'$. □

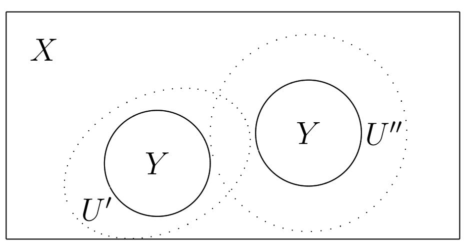
> Da also eine Teilmenge $Y' \subseteq X$, die offen und abgeschlossen ist, zur Zerlegung von X verwendet werden kann, motivieren diese beiden Bemerkungen folgenden Begriff, der beschreiben soll, wann eine solche Zerlegung nicht möglich ist.

Definition. Der topologische Raum X heißt *zusammenhängend,* falls es in X außer $\emptyset$ und X keine weiteren Teilmengen gibt, die offen und abgeschlossen sind.

Bemerkung. *Sei X ein topologischer Raum. Sei $Y \subseteq X$. Es ist Y zusammenhängend genau dann, wenn aus $Y \subseteq U' \cup U''$ mit U', $U'' \overset{\text{off.}}{\subseteq} X$ und $Y \cap U' \cap U'' = \emptyset$ folgt, daß $Y \subseteq U'$ oder $Y \subseteq U''$.*

Diese Bemerkung werden wir kommentarlos verwenden.

Skizze für nicht zusammenhängendes Y.



Beweis. Sei zum einen Y zusammenhängend. Ist $Y \subseteq U' \cup U''$ mit U', $U'' \overset{\text{off.}}{\subseteq} X$ und $Y \cap U' \cap U'' = \emptyset$, so ist $Y = Y \cap (U' \cup U'') = (Y \cap U') \cup (Y \cap U'')$ mit $Y \cap U'$, $Y \cap U'' \overset{\text{off.}}{\subseteq} Y$ und $(Y \cap U') \cap (Y \cap U'') = \emptyset$. Also ist auch $Y \cap U' = Y \smallsetminus (Y \cap U'') \overset{\text{abg.}}{\subseteq} Y$. Da Y zusammenhängend ist, folgt $Y \cap U' = \emptyset$ oder $Y \cap U' = Y$. Ersteres impliziert $Y \cap U'' = Y$, also $Y \subseteq U''$. Zweiteres impliziert $Y \subseteq U'$.

Folge zum anderen aus $Y \subseteq U' \cup U''$ mit U', $U'' \overset{\text{off.}}{\subseteq} X$ und $Y \cap U' \cap U'' = \emptyset$ stets $Y \subseteq U'$ oder $Y \subseteq U''$. Wir wollen zeigen, daß Y zusammenhängend ist. Sei $V' \subseteq Y$ offen und abgeschlossen. Wir müssen zeigen, daß $V' = \emptyset$ oder $V' = Y$. Schreibe $V'' = Y \smallsetminus V'$. Es ist $V'' \overset{\text{off.}}{\subseteq} Y$. Schreibe $V' = U' \cap Y$ und $V'' = U'' \cap Y$ mit gewissen U', $U'' \overset{\text{off.}}{\subseteq} X$. Dann ist $Y = V' \sqcup V'' \subseteq U' \cup U''$ und $Y \cap U' \cap U'' = V' \cap V'' = \emptyset$. Nach Voraussetzung folgt also $Y \subseteq U'$ oder $Y \subseteq U''$. Ersteres impliziert $V' = Y$. Zweiteres impliziert $V'' = Y$ und also $V' = \emptyset$. □

Beispiel.

(1) Ist $X = \{x\}$ ein einpunktiger topologischer Raum, so ist X zusammenhängend.

(2) Der Sierpinski-Raum $(\{1,2\},\ \big\{\emptyset,\ \{1\},\ \{1,2\}\big\})$ ist zusammenhängend; vgl. Aufgabe 2. In der Tat ist $\{1\}$ die einzige nichttriviale offene Teilmenge von $\{1,2\}$, und diese ist nicht abgeschlossen.

(3) Seien $a,\ b \in \mathbf{R}$ mit $a < b$. Das Intervall $[a,b]$ ist zusammenhängend.

Sei dazu $[a,b] \subseteq U' \cup U''$ mit $U',\ U'' \overset{\text{off.}}{\subseteq} \mathbf{R}$ und $[a,b] \cap U' \cap U'' = \emptyset$. Mit der dritten Behauptung aus Beispiel (3) aus §4.2.1 folgt, daß es $k \in \mathbf{Z}_{\geqslant 1}$ und

$$a \;=\; t_0 \;\leqslant\; t_1 \;\leqslant\; \cdots \;\leqslant\; t_k \;=\; b$$

so gibt, daß $[t_{i-1}, t_i] \subseteq U'$ oder $[t_{i-1}, t_i] \subseteq U''$ für alle $1 \leqslant i \leqslant k$.

Sei o.E. $[t_0, t_1] \subseteq U'$.

Dann kann nicht $[t_1, t_2] \subseteq U''$ sein, da dann $t_1 \in [a,b] \cap U' \cap U'' = \emptyset$ wäre. Also ist $[t_1, t_2] \subseteq U'$.

Dann kann nicht $[t_2, t_3] \subseteq U''$ sein, da dann $t_2 \in [a,b] \cap U' \cap U'' = \emptyset$ wäre. Also ist $[t_2, t_3] \subseteq U'$.

Usf.

Es folgt $[a,b] = \bigcup_{i=1}^{k} [t_{i-1}, t_i] \subseteq U'$.

Bemerkung. *Ein topologischer Raum X ist genau dann nicht zusammenhängend, wenn es eine surjektive stetige Abbildung $X \longrightarrow \{0,1\}$ gibt, wobei $\{0,1\}$ die diskrete Topologie trage.*

Beweis. Gibt es zum einen eine surjektive stetige Abbildung $X \xrightarrow{g} \{0,1\}$, so ist $X = g^{-1}(\{0\}) \sqcup g^{-1}(\{1\})$ eine disjunkte Zerlegung in zwei offene und abgeschlossene Teilmengen; vgl. Aufgabe 18.(1). Da g surjektiv ist, ist $g^{-1}(\{0\}) \neq \emptyset$ und $g^{-1}(\{1\}) \neq \emptyset$. Es folgt, daß X nicht zusammenhängend ist.

Sei umgekehrt X nicht zusammenhängend. Sei $X = Y' \sqcup Y''$ eine disjunkte Zerlegung in zwei offene und abgeschlossene Teilmengen Y' und Y''. Setze

$$\begin{array}{rcl} X & \xrightarrow{g} & \{0,1\} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 0 & \text{für } x \in Y' \\ 1 & \text{für } x \in Y'' \end{cases} \end{array}$$

Da weder Y' noch Y'' leer sind, ist g surjektiv. Da $X = Y' \sqcup Y''$ insbesondere eine offene Überdeckung von X mit $Y' \cap Y'' = \emptyset$ ist, und da die Einschränkungen $g|_{Y'}$ und $g|_{Y''}$ als konstante Abbildungen stetig sind, folgt mit Satz 1 aus §2.3.2, daß g stetig ist. ▫

Lemma. *Seien X und Y topologische Räume. Sei $X \xrightarrow{f} Y$ eine stetige Abbildung. Sei $X' \subseteq X$. Ist X' zusammenhängend, so auch $f(X')$.*

Beweis. Sei $f(X')$ nicht zusammenhängend. Wir haben zu zeigen, daß X' nicht zusammenhängend ist.

Mit vorstehender Bemerkung haben wir eine surjektive stetige Abbildung $f(X') \xrightarrow{g} \{0,1\}$, wobei letzterer Raum die diskrete Topologie trage. Folglich haben wir die komponierte surjektive stetige Abbildung $X' \xrightarrow{f|_{X'}^{f(X')}} f(X') \xrightarrow{g} \{0,1\}$. Also ist mit vorstehender Bemerkung X' nicht zusammenhängend. ▫

Sei im folgenden X ein topologischer Raum.

Bemerkung. *Sei $Y \subseteq X$. Sei Y zusammenhängend. Dann ist auch $\bar{Y}$ zusammenhängend.*

Beweis. Sei $\bar{Y} \subseteq U' \cup U''$ mit U', $U'' \overset{\text{off.}}{\subseteq} X$ und $\bar{Y} \cap U' \cap U'' = \emptyset$. Wir wollen zeigen, daß $\bar{Y} \subseteq U'$ oder $\bar{Y} \subseteq U''$.

Es ist auch $Y \subseteq U' \cup U''$ und $Y \cap U' \cap U'' = \emptyset$. Da Y zusammenhängend ist, folgt $Y \subseteq U'$ oder $Y \subseteq U''$. Sei einmal o.E. $Y \subseteq U'$.

Es ist $Y \subseteq X \setminus U'' \overset{\text{abg.}}{\subseteq} X$, da ein Element in $Y \cap U''$ auch in $Y \cap U'' \cap U' = \emptyset$ läge, was nicht geht. Also ist auch $\bar{Y} \subseteq X \setminus U''$; cf. Bemerkung (2) aus §1.4. Da aber $\bar{Y} \subseteq U' \cup U''$, folgt $\bar{Y} \subseteq U'$. ▫

Bemerkung. *Seien Y, $Z \subseteq X$. Seien Y und Z zusammenhängend. Sei $Y \cap Z \neq \emptyset$. Dann ist auch $Y \cup Z$ zusammenhängend.*

Beweis. Sei $Y \cup Z \subseteq U' \cup U''$ mit U', $U'' \overset{\text{off.}}{\subseteq} X$ und $(Y \cup Z) \cap U' \cap U'' = \emptyset$. Wir wollen zeigen, daß $Y \cup Z \subseteq U'$ oder $Y \cup Z \subseteq U''$.

Es ist auch $Y \subseteq U' \cup U''$ und $Y \cap U' \cap U'' = \emptyset$. Da Y zusammenhängend ist, folgt $Y \subseteq U'$ oder $Y \subseteq U''$. Sei einmal o.E. $Y \subseteq U'$.

Ferner ist auch $Z \subseteq U' \cup U''$ und $Z \cap U' \cap U'' = \emptyset$. Da Z zusammenhängend ist, folgt $Z \subseteq U'$ oder $Z \subseteq U''$.

Angenommen, es ist $Z \subseteq U''$. Dann ist $\emptyset \neq Y \cap Z \subseteq U' \cap U'' \cap (Y \cup Z) = \emptyset$, *widersprüchlicherweise.* Also ist $Z \subseteq U'$ und mithin $Y \cup Z \subseteq U'$. ▫

Definition. Sei M eine Menge. Eine *Kette* von Teilmengen von M ist eine Teilmenge $K \subseteq \operatorname{Pot}(M)$ so, daß für alle N, $N' \in K$ gilt, daß $N \subseteq N'$ oder $N' \subseteq N$.

Bemerkung. *Sei K eine Kette von Teilmengen von X mit Y nichtleer und zusammenhängend für alle $Y \in K$. Dann ist auch die Teilmenge*

$$\bigcup K \ := \ \bigcup_{Y \in K} Y \ \subseteq \ X$$

zusammenhängend.

Kurz, die Vereinigung über eine Kette zusammenhängender Teilmengen ist wieder zusammenhängend.

Beweis. Sei $\bigcup K \subseteq U' \cup U''$ mit U', $U'' \overset{\text{off.}}{\subseteq} X$ und $(\bigcup K) \cap U' \cap U'' = \emptyset$. Wir wollen zeigen, daß $\bigcup K \subseteq U'$ oder $\bigcup K \subseteq U''$.

Sei $Y \in K$. Es ist auch $Y \subseteq U' \cup U''$ und $Y \cap U' \cap U'' = \emptyset$. Da Y zusammenhängend ist, ist $Y \subseteq U'$ oder $Y \subseteq U''$.

Wir *behaupten,* daß ($Y \subseteq U'$ für alle $Y \in K$) oder ($Y \subseteq U''$ für alle $Y \in K$).

Angenommen, nicht. Seien $Y_1, Y_2 \in K$ mit $Y_1 \subseteq U'$ und $Y_2 \subseteq U''$. Da K eine Kette ist, ist $Y_1 \subseteq Y_2$ oder $Y_2 \subseteq Y_1$. Ersterenfalls ist $Y_1 \subseteq Y_2 \subseteq U''$, also insgesamt $Y_1 \subseteq U' \cap U'' \cap (\bigcup K) = \emptyset$. Da aber jedes Element von K nichtleer ist, geht das nicht. Zweiterenfalls ist $Y_2 \subseteq Y_1 \subseteq U'$, also insgesamt $Y_2 \subseteq U'' \cap U' \cap (\bigcup K) = \emptyset$. Da aber jedes Element von K nichtleer ist, geht auch das nicht. Wir sind an einem *Widerspruch* angelangt, was die *Behauptung* zeigt.

Ist nun $Y \subseteq U'$ für alle $Y \in K$, so ist auch $\bigcup K = \bigcup_{Y \in K} Y \subseteq U'$. Genauso, ist $Y \subseteq U''$ für alle $Y \in K$, so ist auch $\bigcup K = \bigcup_{Y \in K} Y \subseteq U''$. ▫

4.3.2 Zusammenhangskomponenten

Sei M eine Menge. Sei $P \subseteq \mathrm{Pot}(M)$.

Defintion. Ein Element $N \in P$ heißt *maximal* in P (bzgl. Inklusion), falls für $N' \in P$ aus $N \subseteq N'$ folgt, daß $N = N'$. Schreibe

$$\max P \;:=\; \{N \in P \;:\; N \text{ ist maximal}\} \;\subseteq\; P \;\subseteq\; \mathrm{Pot}(M)\,.$$

Lemma (Zorn, für Teilmengenrelation). *Es gebe für jede nichtleere Kette $K \subseteq P$ ein $\hat{R} \in P$ mit $R \subseteq \hat{R}$ für alle $R \in K$. Kurz, jede in P liegende nichtleere Kette sei auch in P nach oben beschränkt.*

Dann gibt es für alle $N \in P$ ein $\hat{N} \in \max P$ mit $N \subseteq \hat{N}$.

Verweis. Diese Aussage entnehmen wir dem Korollar in §A.3. ▫

Sei nun X ein topologischer Raum. Schreibe

$$\mathrm{Z}(X) \;:=\; \{Y \subseteq X \;:\; Y \text{ ist nichtleer und zusammenhängend}\} \;\subseteq\; \mathrm{Pot}(X)\,.$$

Definition. Ein (bezüglich Inklusion) maximales Element von $\mathrm{Z}(X)$ heißt *Zusammenhangskomponente* von X. Es ist also $\max \mathrm{Z}(X)$ die Menge der Zusammenhangskomponenten von X.

Satz 8 (Zerlegung in Zusammenhangskomponenten) *Sei X ein topologischer Raum. Es ist*

$$X \;=\; \bigsqcup_{Z \in \max \mathrm{Z}(X)} Z\;;$$

in Worten, es ist X die disjunkte Vereinigung seiner Zusammenhangskomponenten.

Ferner ist $Z \overset{\text{abg.}}{\subseteq} X$ für $Z \in \max \mathrm{Z}(X)$; i.e. eine Zusammenhangskomponente ist eine abgeschlossene Teilmenge.

Beweis. Für jede nichtleere Kette K von Teilmengen von X mit $K \subseteq \mathrm{Z}(X)$ gibt es ein $Y' \in \mathrm{Z}(X)$ mit $Y \subseteq Y'$ für alle $Y \in K$, wie in der letzten Bemerkung in §4.3.1 gezeigt, wobei $Y' = \bigcup_{Y \in K} Y$ genommen werden konnte.

Nach obigem Lemma von Zorn gibt es also für alle $Y \in \mathrm{Z}(X)$ ein $Z \in \max \mathrm{Z}(X)$ mit $Y \subseteq Z$.

Zeigen wir, daß

$$X \overset{!}{=} \bigcup_{Z \in \max \mathrm{Z}(X)} Z \,.$$

Sei dazu $x \in X$ vorgegeben. Es ist $\{x\} \in \mathrm{Z}(X)$. Also gibt es ein $Z \in \max \mathrm{Z}(X)$ mit $\{x\} \subseteq Z$. Insbesondere ist $x \in \bigcup_{Z \in \max \mathrm{Z}(X)} Z$.

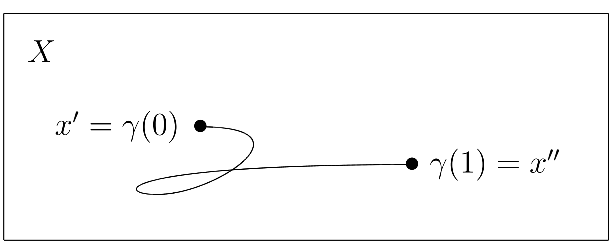
Zeigen wir, daß $Z' \cap Z'' \overset{!}{=} \emptyset$ für Z', $Z'' \in \max \mathrm{Z}(X)$ mit $Z' \neq Z''$. *Annahme,* es ist $Z' \cap Z'' \neq \emptyset$. Dann ist $Z' \cup Z''$ nach der vorletzten Bemerkung in §4.3.1 zusammenhängend (und nichtleer). Ferner ist $Z' \subsetneq Z' \cup Z''$, da Z'' nicht in Z' enthalten sein kann, da es dann wegen seiner Maximalität gleich Z' sein müßte, was nicht der Fall ist. Also ist Z' in einem Element von $\mathrm{Z}(X)$ echt enthalten, im *Widerspruch* zur seiner Maximalität.

Sei $Z \in \max \mathrm{Z}(X)$. Zeigen wir, daß $Z \overset{\text{abg.!}}{\subseteq} X$. Nach der drittletzten Bemerkung in §4.3.1 ist auch $\bar{Z}$ zusammenhängend (und nichtleer). Da $Z \subseteq \bar{Z}$, folgt $Z = \bar{Z} \overset{\text{abg.}}{\subseteq} X$ wegen der Maximalität von Z; cf. Bemerkung $(1,4)$ aus §1.4. ▫

4.3.3 Wegzusammenhang

Definition. Ein topologischer Raum X heißt *wegzusammenhängend,* falls für alle x', $x'' \in X$ eine stetige Abbildung $[0,1] \xrightarrow{\gamma} X$ existiert mit $\gamma(0) = x'$ und $\gamma(1) = x''$.

Skizze.



Bemerkung. *Sei X ein topologischer Raum. Ist X wegzusammenhängend, so ist X zusammenhängend.*

Beweis. Sei X wegzusammenhängend. *Annahme,* es sei X nicht zusammenhängend. Dann gibt es U', $U'' \overset{\text{off.}}{\subseteq} X$ mit $U' \cap U'' = \emptyset$, $U' \cup U'' = X$ und U', $U'' \neq \emptyset$. Sei $x' \in U'$, sei $x'' \in U''$ und sei $\gamma : [0,1] \longrightarrow X$ stetig mit $\gamma(0) = x'$ und $\gamma(1) = x''$. Es folgt $\gamma^{-1}(U')$, $\gamma^{-1}(U'') \overset{\text{off.}}{\subseteq} [0,1]$, $\gamma^{-1}(U') \cap \gamma^{-1}(U'') = \emptyset$, $\gamma^{-1}(U') \cup \gamma^{-1}(U'') = [0,1]$ und $\gamma^{-1}(U')$, $\gamma^{-1}(U'') \neq \emptyset$, letzteres, da $0 \in \gamma^{-1}(U')$ und $1 \in \gamma^{-1}(U'')$. Folglich ist $\gamma^{-1}(U')$ eine offene und abgeschlossene, dabei aber weder leere noch volle Teilmenge von $[0,1]$. Somit ist $[0,1]$ nicht zusammenhängend, im *Widerspruch* zu Beispiel (3) aus §4.3.1. ▫

Bemerkung. *Seien X und Y topologische Räume. Sei $X \xrightarrow{f} Y$ eine stetige Abbildung. Sei $X' \subseteq X$. Ist X' wegzusammenhängend, so auch $f(X')$.*

Beweis. Seien x', $x'' \in X'$, und mithin $f(x')$, $f(x'') \in f(X')$ gegeben. Sei $\gamma : [0,1] \longrightarrow X'$ stetig mit $\gamma(0) = x'$ und $\gamma(1) = x''$. Es ist $f|_{X'}^{f(X')}$ stetig; vgl. zweite Bemerkung in §2.1.1. Dann ist $f|_{X'}^{f(X')} \circ \gamma : [0,1] \longrightarrow f(X')$ stetig und bildet 0 nach $f(x')$ und 1 nach $f(x'')$ ab.□

Beispiel. Sei $n \in \mathbf{Z}_{\geqslant 1}$. Eine Teilmenge $X \subseteq \mathbf{R}^n$ heißt *konvex,* falls für alle x', $x'' \in X$ und alle $s \in [0,1]$ auch $(1-s)x' + sx'' \in X$. Ist X konvex, so ist X wegzusammenhängend und also auch zusammenhängend.

Denn für x', $x'' \in X$ kann man die stetige Abbildung $\gamma : [0,1] \longrightarrow X$, $s \longmapsto (1-s)x' + sx''$ mit $\gamma(0) = x'$ und $\gamma(1) = x''$ vorbringen.

Diese ist in der Tat stetig. Dafür genügt es mit der zweiten Bemerkung in §2.1.1 und Aufgabe 33 zu zeigen, daß

$$\begin{array}{ccl} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R}^{\times n} \\ s & \longmapsto & ((1-s)x'_1 + sx''_1\,,\ \ldots\ ,\ (1-s)x'_n + sx''_n) \end{array}$$

stetig ist. Mit der Bemerkung aus §3.4 genügt es nun, für $1 \leqslant i \leqslant n$ zu zeigen, daß $\mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$, $s \longmapsto (1-s)x'_i + sx''_i$ stetig ist. Dies aber ist ein Polynom in s, und die Aussage folgt mit Aufgabe 21.(4).

Kapitel 5

Stone-Weierstraß

Wir gehen nach [**5,** §9] vor.

5.1 Betragsfunktion durch Polynome annähern

Wir müssen uns nun einen Spezialfall des in 5.3 zu zeigenden Satzes 9 ad hoc herleiten.

Lemma. *Es gibt eine Folge von Polynomen* $(p_n : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R})_{n \in \mathbf{Z}_{\geqslant 0}}$ *so, daß*

$$\frac{nt}{2 + nt^{1/2}} \;\leqslant\; p_n(t) \;\leqslant\; t^{1/2}$$

für $t \in [0,1]$ *und* $n \in \mathbf{Z}_{\geqslant 0}$ *.*

Beweis. Setze $p_0(t) := 0$ für $t \in \mathbf{R}$. Setze rekursiv

$$p_n(t) \;:=\; p_{n-1}(t) + \tfrac{1}{2}\big(t - p_{n-1}(t)^2\big)$$

für $n \in \mathbf{Z}_{\geqslant 1}$ und $t \in \mathbf{R}$. Dann ist $p_n(t)$ ein Polynom mit $p_n(0) = 0$ für $n \in \mathbf{Z}_{\geqslant 0}$, wie man aus der Rekursionsformel erkennt.

Unsere Folge beginnt mit

$$\begin{array}{rcl} p_0(t) & = & 0 \\ p_1(t) & = & \frac{1}{2}t \\ p_2(t) & = & t - \frac{1}{8}t^2 \\ p_3(t) & = & \frac{3}{2}t - \frac{5}{8}t^2 + \frac{1}{8}t^3 - \frac{1}{128}t^4 \;, \\ \vdots & & \end{array}$$

wobei sich der Grad des Polynoms ab p_1 in jedem Schritt verdoppelt.

Für $t \in \mathbf{R}_{\geqslant 0}$ ist

$$(*) \qquad \begin{array}{rcl} t^{1/2} - p_n(t) & = & t^{1/2} - p_{n-1}(t) - \frac{1}{2}\big(t - p_{n-1}(t)^2\big) \\ & = & \big(t^{1/2} - p_{n-1}(t)\big)\big(1 - \frac{1}{2}\big(t^{1/2} + p_{n-1}(t)\big)\big) \;. \end{array}$$

Um die Aussage des Lemmas für ein gegebenes $t \in [0,1]$ zu beweisen, führen wir eine *Induktion nach* $n \in \mathbf{Z}_{\geqslant 0}$.

Für $n = 0$ wird $0 \leqslant p_0(t) \leqslant t^{1/2}$ behauptet, was zutrifft.

Sei nun also $n \geqslant 1$, und als Induktionsvoraussetzung bekannt, daß

$$\frac{(n-1)t}{2+(n-1)t^{1/2}} \;\leqslant\; p_{n-1}(t) \;\leqslant\; t^{1/2} \,.$$

Zeigen wir, daß $p_n(t) \overset{!}{\leqslant} t^{1/2}$. Mit $(*)$ genügt es zu zeigen, daß $t^{1/2} - p_{n-1}(t) \overset{!}{\geqslant} 0$ und $1 - \frac{1}{2}\big(t^{1/2} + p_{n-1}(t)\big) \overset{!}{\geqslant} 0$.

Ersteres folgt aus der Induktionsvoraussetzung.

Für zweiteres bemühen wir abermals die Induktionsvoraussetzung, um

$$\tfrac{1}{2}\big(t^{1/2} + p_{n-1}(t)\big) \;\leqslant\; \tfrac{1}{2}\big(t^{1/2} + t^{1/2}\big) \;=\; t^{1/2} \;\leqslant\; 1$$

zu folgern.

Zeigen wir, daß $p_n(t) \overset{!}{\geqslant} \dfrac{nt}{2+nt^{1/2}}$.

Mit $(*)$ und Induktionsvoraussetzung ist

$$\begin{array}{rcl} p_n(t) & = & t^{1/2} - \big(t^{1/2} - p_{n-1}(t)\big)\big(1 - \frac{1}{2}\big(t^{1/2} + p_{n-1}(t)\big)\big) \\ & \geqslant & t^{1/2} - \big(t^{1/2} - \frac{(n-1)t}{2+(n-1)t^{1/2}}\big)\big(1 - \frac{1}{2}\big(t^{1/2} + \frac{(n-1)t}{2+(n-1)t^{1/2}}\big)\big) \,. \end{array}$$

Es genügt also zu zeigen, daß

$$t^{1/2} - \big(t^{1/2} - \tfrac{(n-1)t}{2+(n-1)t^{1/2}}\big)\big(1 - \tfrac{1}{2}\big(t^{1/2} + \tfrac{(n-1)t}{2+(n-1)t^{1/2}}\big)\big) \;\overset{!}{\geqslant}\; \tfrac{nt}{2+nt^{1/2}} \,.$$

Wir formen die linke Seite um zu

$$\begin{array}{rl} & t^{1/2} - \big(t^{1/2} - \frac{(n-1)t}{2+(n-1)t^{1/2}}\big)\big(1 - \frac{1}{2}\big(t^{1/2} + \frac{(n-1)t}{2+(n-1)t^{1/2}}\big)\big) \\ = & t^{1/2}\Big(1 - \big(1 - \frac{(n-1)t^{1/2}}{2+(n-1)t^{1/2}}\big)\big(1 - \frac{1}{2}\big(t^{1/2} + \frac{(n-1)t}{2+(n-1)t^{1/2}}\big)\big)\Big) \\ = & t^{1/2}\Big(\frac{(n-1)t^{1/2}}{2+(n-1)t^{1/2}} + \frac{1}{2}\big(t^{1/2} + \frac{(n-1)t}{2+(n-1)t^{1/2}}\big) - \frac{(n-1)t^{1/2}}{2+(n-1)t^{1/2}} \cdot \frac{1}{2}\big(t^{1/2} + \frac{(n-1)t}{2+(n-1)t^{1/2}}\big)\Big) \\ = & t^{1/2}\Big(\frac{(n-1)t^{1/2}}{2+(n-1)t^{1/2}} + \frac{1}{2}t^{1/2} - \frac{(n-1)t^{1/2}}{2+(n-1)t^{1/2}} \cdot \frac{1}{2}\frac{(n-1)t}{2+(n-1)t^{1/2}}\Big) \\ = & \frac{t}{2}\Big(\frac{2(n-1)}{2+(n-1)t^{1/2}} + 1 - \frac{(n-1)^2 t}{(2+(n-1)t^{1/2})^2}\Big) \\ = & \frac{t}{2(2+(n-1)t^{1/2})^2}\Big(2(n-1)(2+(n-1)t^{1/2}) + (2+(n-1)t^{1/2})^2 - (n-1)^2 t\Big) \\ = & \frac{t}{2(2+(n-1)t^{1/2})^2}\Big(4(n-1) + 2(n-1)^2 t^{1/2} + 4 + 4(n-1)t^{1/2}\Big) \\ = & \frac{t}{(2+(n-1)t^{1/2})^2}\Big(2(n-1) + (n-1)^2 t^{1/2} + 2 + 2(n-1)t^{1/2}\Big) \\ = & \dfrac{t\big(2n + (n^2-1)t^{1/2}\big)}{(2+(n-1)t^{1/2})^2} \,. \end{array}$$

Zu zeigen bleibt also

$$\big(2n + (n^2-1)t^{1/2}\big)(2 + nt^{1/2}) \overset{!}{\geqslant} n\big(2 + (n-1)t^{1/2}\big)^2 ,$$

d.h.

$$4n + (4n^2-2)t^{1/2} + (n^3-n)t \overset{!}{\geqslant} 4n + (4n^2-4n)t^{1/2} + (n^3-2n^2+n)t .$$

Die Aussage folgt, da sowohl $-2 \geqslant -4n$ als auch $-n \geqslant -2n^2+n$ ist. $\square$

Korollar. *Sei* $a \in \mathbf{R}_{>0}$. *Es gibt eine Folge von Polynomen* $(q_n : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R})_{n\in\mathbf{Z}_{\geqslant 1}}$ *so, daß für alle* $\varepsilon \in \mathbf{R}_{>0}$ *ein* $m \in \mathbf{Z}_{\geqslant 1}$ *existiert mit*

$$\big|q_n(t) - |t|\big| < \varepsilon$$

für alle $t \in [-a,+a]$ *und alle* $n \in \mathbf{Z}_{\geqslant m}$.

Beweis. Seien p_n für $n \in \mathbf{Z}_{\geqslant 1}$ wie im vorigen Lemma. Setze $q_n(t) := a \cdot p_n(t^2/a^2)$ für $t \in [-a,+a]$ und $n \in \mathbf{Z}_{\geqslant 1}$. Mit vorigem Lemma wird

$$\begin{array}{rcl} q_n(t) - |t| & = & a \cdot p_n(t^2/a^2) - |t| \\ & \in & \Big[a \cdot \frac{nt^2/a^2}{2+n|t|/a} - |t|\,,\ a \cdot (|t|/a) - |t|\Big] \\ & = & \Big[\frac{nt^2}{2a+n|t|} - |t|\,,\ 0\Big] \\ & = & \Big[-\frac{2a|t|}{2a+n|t|}\,,\ 0\Big] \\ & \subseteq & \big[-\frac{2a}{n}\,,\ 0\big] \end{array}$$

für $t \in [-a,+a]$. Wählt man $m > 2a/\varepsilon$, und ist $n \in \mathbf{Z}_{\geqslant m}$, so wird $-\frac{2a}{n} \geqslant -\frac{2a}{m} > -\varepsilon$. $\square$

5.2 Teilalgebren in $\mathrm{C}(X)$

Sei X ein kompakter topologischer Raum. Nach Aufgabe 20 ist die Menge der reellwertigen Funktionen $\mathrm{C}(X)$ unter Addition und Multiplikation abgeschlossen; cf. auch Aufgabe 34.(5).

Definiere $0 \in \mathrm{C}(X)$ durch $0(x) := 0$ für alle $x \in X$. Ist $f \in \mathrm{C}(X)$, so setze $(-f)(x) := -f(x)$ für $x \in X$. Ist $\lambda \in \mathbf{R}$ und $f \in \mathrm{C}(X)$, so setze $(\lambda \cdot f)(x) = (\lambda f)(x) := \lambda f(x)$.

Es sind $-f = (-1)f$ und allgemeiner λf wieder in $\mathrm{C}(X)$. Dazu sei $c_\lambda : X \longrightarrow \mathbf{R}$, $x \longmapsto \lambda$, welche als konstante Abbildung stetig ist. Dann ist λf als Kompositum der stetigen Abbildungen $(c_\lambda, f) : X \longrightarrow \mathbf{R}\times\mathbf{R}$ und $(\cdot) : \mathbf{R}\times\mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ wieder stetig; cf. Aufgabe 34.(5).

Für $f,\ g,\ h\ \in\ \mathrm{C}(X)$ und $\lambda,\ \mu\ \in\ \mathbf{R}$ gilt folgendes.

$$\begin{array}{rcl}
f+(g+h) & = & (f+g)+h \\
f+g & = & g+f \\
f+0 & = & f \\
f+(-f) & = & 0 \\
1\cdot f & = & f \\
\lambda\cdot(\mu\cdot f) & = & (\lambda\cdot\mu)\cdot f \\
\lambda\cdot(f+g) & = & \lambda\cdot f+\lambda\cdot g \\
(\lambda+\mu)\cdot f & = & \lambda\cdot f+\mu\cdot f
\end{array}$$

All diese Gleichungen bestätigt man durch Einsetzen eines beliebig vorgegebenen $x \in X$. Somit ist $\mathrm{C}(X)$ ein $\mathbf{R}$-Vektorraum.

Ferner ist mit $f \in \mathrm{C}(X)$ auch $|f| \in \mathrm{C}(X)$, welches durch $|f|(x) := |f(x)|$ für $x \in X$ definiert ist. In der Tat ergibt sich $|f|$ als Kompositum von f mit der Betragsfunktion, und letztere ist nach Aufgabe 21.(1) stetig.

Setze

$$\|f\| \ :=\ \max_{x\in X} |f(x)|$$

Da X kompakt ist und $|f|$ stetig, existiert dieses Maximum; cf. Satz 5 aus §4.2.3.

Bemerkung. *Es ist* $(\mathrm{C}(X), \|-\|)$ *ein normierter Raum.*

Mittels $d(f,g) := \|f-g\| = \max_{x\in X} |f(x)-g(x)|$ für $f,\ g\ \in\ \mathrm{C}(X)$ wird (X,d) also zu einem metrischen Raum; cf. Lemma aus §1.3.3. Diese Metrik induziert schließlich eine Topologie auf $\mathrm{C}(X)$; vgl. Lemma in §1.3.1.

Beweis.

Zu (Nor 1). Sei $f \in \mathrm{C}(X)$. Es ist $\|f\| = \max_{x\in X} |f(x)| = 0$ genau dann, wenn $|f(x)| = 0$ für alle $x \in X$, i.e. wenn $f(x) = 0$ für alle $x \in X$, i.e. wenn $f = 0$.

Zu (Nor 2). Sei $f \in \mathrm{C}(X)$ und $\lambda \in \mathbf{R}$. Es ist

$$\|\lambda f\| \ =\ \max_{x\in X} |\lambda f(x)| \ =\ \max_{x\in X} |\lambda||f(x)| \ =\ |\lambda| \max_{x\in X} |f(x)| = |\lambda|\|f\|\ .$$

Zu (Nor 3). Seien $f,\ g\ \in\ \mathrm{C}(X)$. Es ist

$$\|f+g\| \ =\ \max_{x\in X} |f(x)+g(x)| \ =\ |f(x_0)+g(x_0)|$$

für ein gewisses $x_0 \in X$. Wir setzen fort mit

$$|f(x_0)+g(x_0)| \ \leqslant\ |f(x_0)|+|g(x_0)| \ \leqslant\ (\max_{x\in X} |f(x)|) + (\max_{x\in X} |g(x)|) \ =\ \|f\|+\|g\|\ .$$

□

Defintion. Eine Teilmenge $A \subseteq \mathrm{C}(X)$, für die gilt, daß wann immer $f,\ g\ \in\ A$ und $\lambda \in \mathbf{R}$, dann auch $f+g \in A$, $f\cdot g \in A$ und $\lambda f \in A$, nennt man eine *Teilalgebra* (nicht notwendig mit Eins) von $\mathrm{C}(X)$.

Ist die Funktion $X \to \mathbf{R}$, $x \mapsto 1$ aus $\mathrm{C}(X)$ auch in A enthalten, so spricht man von einer Teilalgebra mit Eins – daher der Zusatz.

Lemma. *Sei $A \subseteq \mathrm{C}(X)$ eine Teilalgebra. Dann ist auch $\bar{A} \subseteq \mathrm{C}(X)$ eine Teilalgebra.*

Beweis. Seien $f,\, g \in \bar{A}$. Sei $\lambda \in \mathbf{R}$.

Sei $(f_n)_n$ eine Folge in A, die gegen f konvergiert; sei $(g_n)_n$ eine Folge in A, die gegen g konvergiert; cf. Aufgabe 42.(2).

Es konvergiert die in A gelegene Folge $(f_n + g_n)_n$ gegen $f + g$; cf. Aufgabe 47.(5). Also ist $f + g \in \bar{A}$; cf. Aufgabe 42.(2).

Es konvergiert die in A gelegene Folge $(f_n \cdot g_n)_n$ gegen $f \cdot g$; cf. Aufgabe 47.(5). Also ist $f \cdot g \in \bar{A}$; cf. Aufgabe 42.(2).

Es konvergiert die in A gelegene Folge $(\lambda f_n)_n$ gegen λf; cf. Aufgabe 47.(5). Also ist $\lambda f \in \bar{A}$; cf. Aufgabe 42.(2). $\square$

Lemma. *Sei $B \overset{\text{abg.}}{\subseteq} \mathrm{C}(X)$ eine Teilalgebra. Sind $f,\, g \in B$, so sind auch die Funktionen*

$$\begin{array}{rcccl} & & X & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ |f| & : & x & \longmapsto & |f(x)| \\ \max\{f,g\} & : & x & \longmapsto & \max\{f(x), g(x)\} \\ \min\{f,g\} & : & x & \longmapsto & \min\{f(x), g(x)\} \end{array}$$

in B enthalten.

Analog definiert man auch das Maximum und das Minimum von endlich vielen Funktionen in $\mathrm{C}(X)$. Sind diese alle in B, so auch deren Maximum und deren Minimum, wie eine iterierte Anwendung dieses Lemmas zeigt.

Beweis. Für $x \in X$ ist

$$\begin{array}{rcl} \max\{f(x),\, g(x)\} & = & \frac{1}{2}\big(f(x) + g(x) + |f(x) - g(x)|\big) \\ \min\{f(x),\, g(x)\} & = & \frac{1}{2}\big(f(x) + g(x) - |f(x) - g(x)|\big)\ . \end{array}$$

In anderen Worten, es ist $\max\{f,g\} = \frac{1}{2}\big(f+g+|f-g|\big)$ und $\min\{f,g\} = \frac{1}{2}\big(f+g-|f-g|\big)$.

Da nun B eine Teilalgebra von $\mathrm{C}(X)$ ist, genügt es, aus $f \in B$ zu folgern, daß $|f| \in B$. O.E. ist $f \neq 0$.

Schreibe $a := \|f\| = \max_{x \in X} |f(x)| \in \mathbf{R}_{>0}$. Dann ist $f(x) \in [-a, +a]$ für alle $x \in X$.

Wähle eine Folge von Polynomen $(q_n : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R})_{n \in \mathbf{Z}_{\geqslant 1}}$ so, daß für alle $\varepsilon \in \mathbf{R}_{>0}$ ein $m \in \mathbf{Z}_{\geqslant 1}$ existiert mit

$$\big|q_n(t) - |t|\big| \ <\ \varepsilon$$

für alle $t \in [-a, +a]$ und alle $n \in \mathbf{Z}_{\geqslant m}$; cf. Korollar aus §5.1.

Sei $r_n(x) := q_n(f(x))$ für $x \in X$ und $n \in \mathbf{Z}_{\geqslant 1}$. Da q_n ein Polynom ist und da B eine Teilalgebra von $\mathrm{C}(X)$ ist, ist mit f auch r_n in B für alle $n \in \mathbf{Z}_{\geqslant 1}$.

Wir behaupten, daß die Folge $(r_n)_n$ in $\mathrm{C}(X)$ gegen $|f|$ konvergiert. Sei $\varepsilon \in \mathbf{R}_{>0}$. Sei $m \in \mathbf{Z}_{\geqslant 1}$ so, daß $\big|q_n(t) - |t|\big| < \varepsilon$ für alle $t \in [-a, +a]$ und alle $n \in \mathbf{Z}_{\geqslant m}$. Dann wird

$$\big|r_n(x) - |f(x)|\big| \;=\; \big|q_n(\underbrace{f(x)}_{t}) - |\underbrace{f(x)}_{t}|\big| \;<\; \varepsilon$$

für $x \in X$ und also $\|r_n - |f|\,\| = \max_{x\in X} \big|r_n(x) - |f(x)|\big| < \varepsilon$ für alle $n \in \mathbf{Z}_{\geqslant m}$.

Da $B \overset{\text{abg.}}{\subseteq} \mathrm{C}(X)$, folgt $|f| \in B$; vgl. Aufgabe 42.(1). ▫

5.3 Der Satz von Stone-Weierstraß

Lemma. *Sei (Y, d) ein metrischer Raum. Sei $A \subseteq Y$ eine Teilmenge.*

Folgende Aussagen sind äquivalent.

(i) *Für alle $g \in Y$ und alle $\varepsilon \in \mathbf{R}_{>0}$ existiert ein $\tilde{f} \in \bar{A}$ mit $d(\tilde{f}, g) < \varepsilon$.*

(ii) *Für alle $g \in Y$ und alle $\varepsilon \in \mathbf{R}_{>0}$ existiert ein $f \in A$ mit $d(f, g) < \varepsilon$.*

(iii) *Es ist A dicht in Y.*

Beweis.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Hierzu merken wir an, daß $A \subseteq \bar{A}$.

(iii) $\Rightarrow$ (ii). Seien $g \in Y$ und $\varepsilon \in \mathbf{R}_{>0}$ gegeben. Da A nach (iii) dicht ist in Y, ist $\mathrm{B}_\varepsilon(g) \cap A \neq \emptyset$; vgl. Bemerkung aus §4.1.2. Wähle $f \in \mathrm{B}_\varepsilon(g) \cap A$.

(i) $\Rightarrow$ (iii). Sei $\emptyset \neq U \overset{\text{off.}}{\subseteq} Y$. Sei $g \in U$. Sei $\varepsilon \in \mathbf{R}_{>0}$ mit $\mathrm{B}_\varepsilon(g) \subseteq U$. Nach (i) gibt es ein $\tilde{f} \in \bar{A}$ mit $d(\tilde{f}, g) < \varepsilon/2$. Da $\tilde{f} \in \bar{A}$, ist $\mathrm{B}_{\varepsilon/2}(\tilde{f}) \cap A \neq \emptyset$; vgl. Lemma (1) aus §1.4. Wähle $f \in \mathrm{B}_{\varepsilon/2}(\tilde{f}) \cap A$. Es folgt

$$d(f, g) \;\leqslant\; d(f, \tilde{f}) + d(\tilde{f}, g) \;<\; \varepsilon/2 + \varepsilon/2 \;=\; \varepsilon\,.$$

Also ist $f \in \mathrm{B}_\varepsilon(g) \cap A \subseteq U \cap A$, sodaß letzterer Schnitt in der Tat nichtleer ist. Somit ist A dicht in Y; vgl. Bemerkung aus §4.1.2. ▫

Satz 9 (Stone-Weierstraß) *Sei X ein kompakter topologischer Raum. Sei A eine Teilalgebra von $\mathrm{C}(X)$, in welcher es für alle $x \in X$ ein $\varphi_x \in A$ mit $\varphi_x(x) \neq 0$ gibt, und für alle $x,\, y \in X$ mit $x \neq y$ ein $\varphi_{x,y} \in A$ mit $\varphi_{x,y}(x) \neq \varphi_{x,y}(y)$.*

Dann ist A eine dichte Teilmenge von $\mathrm{C}(X)$, i.e. $\bar{A} = \mathrm{C}(X)$; cf. §4.1.2.

In anderen Worten, es gibt für alle $g \in \mathrm{C}(X)$ und alle $\varepsilon \in \mathbf{R}_{>0}$ ein $f \in A$ mit $\|f - g\| < \varepsilon$, i.e. mit $|f(x) - g(x)| < \varepsilon$ für alle $x \in X$.

Beweis. Seien $g \in \mathrm{C}(X)$ und $\varepsilon \in \mathbf{R}_{>0}$ vorgegeben. Es genügt, ein $\tilde{f} \in \bar{A}$ mit $\|g - \tilde{f}\| < \varepsilon$ zu finden; cf. vorstehendes Lemma, angewandt auf $Y = \mathrm{C}(X)$ mit $d(s,t) = \|s-t\|$ für $s,\ t \in \mathrm{C}(X)$.

Wir *behaupten,* daß es zu $x',\ x'' \in X$ ein $h \in A$ mit $h(x') = g(x')$ und $h(x'') = g(x'')$ gibt.

Fall $x' = x''$. Es erfüllt $h := (g(x')/\varphi_{x'}(x')) \cdot \varphi_{x'} \in A$ die Bedingungen.

Fall $x' \neq x''$. Seien $f' := (1/\varphi_{x'}(x')) \cdot \varphi_{x'}$ und $f'' := (1/\varphi_{x''}(x'')) \cdot \varphi_{x''}$. Es sind $f',\ f'' \in A$, und es ist $f'(x') = 1$ und $f''(x'') = 1$. Setze

$$u \;:=\; f' + f'' - f' \cdot f'' \;\in\; A\,.$$

Dann ist $u(x') = f'(x') + f''(x') - f'(x') \cdot f''(x') = 1 + f''(x') - 1 \cdot f''(x') = 1$.

Genauso ist auch $u(x'') = 1$.

Setze

$$h \;:=\; \frac{g(x') - g(x'')}{\varphi_{x',x''}(x') - \varphi_{x',x''}(x'')} \cdot \varphi_{x',x''} - \frac{g(x')\varphi_{x',x''}(x'') - g(x'')\varphi_{x',x''}(x')}{\varphi_{x',x''}(x') - \varphi_{x',x''}(x'')} \cdot u \;\in\; A\,.$$

Dann wird

$$\begin{aligned} h(x') &= \tfrac{g(x')-g(x'')}{\varphi_{x',x''}(x')-\varphi_{x',x''}(x'')} \cdot \varphi_{x',x''}(x') - \tfrac{g(x')\varphi_{x',x''}(x'')-g(x'')\varphi_{x',x''}(x')}{\varphi_{x',x''}(x')-\varphi_{x',x''}(x'')} \cdot \underbrace{u(x')}_{=1} \\ &= \tfrac{g(x')\varphi_{x',x''}(x')-g(x')\varphi_{x',x''}(x'')}{\varphi_{x',x''}(x')-\varphi_{x',x''}(x'')} \\ &= g(x') \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} h(x'') &= \tfrac{g(x')-g(x'')}{\varphi_{x',x''}(x')-\varphi_{x',x''}(x'')} \cdot \varphi_{x',x''}(x'') - \tfrac{g(x')\varphi_{x',x''}(x'')-g(x'')\varphi_{x',x''}(x')}{\varphi_{x',x''}(x')-\varphi_{x',x''}(x'')} \cdot \underbrace{u(x'')}_{=1} \\ &= \tfrac{-g(x'')\varphi_{x',x''}(x'')+g(x'')\varphi_{x',x''}(x')}{\varphi_{x',x''}(x')-\varphi_{x',x''}(x'')} \\ &= g(x'')\,. \end{aligned}$$

Dies zeigt die *Behauptung.*

Beachte, daß $\bar{A} \subseteq \mathrm{C}(X)$ eine Teilalgebra ist; vgl. vorletztes Lemma aus §5.2. Folglich ist das letzte Lemma aus §5.2 auf $\bar{A}$ anwendbar.

Wir *behaupten,* daß es für vorgegebenes $x \in X$ ein $k_x \in \bar{A}$ mit $k_x(x) = g(x)$ und mit $k_x(y) < g(y) + \varepsilon$ für alle $y \in X$ gibt.

Nach voriger Behauptung gibt es für alle $z \in X$ ein $h_z \in A$ mit $h_z(x) = g(x)$ und $h_z(z) = g(z)$. Setze $U_z := (h_z - g)^{-1}(\mathbf{R}_{<\varepsilon})$. Es ist $z \in U_z \overset{\text{off.}}{\subseteq} X$, da $h_z - g$ stetig ist. Da $X = \bigcup_{z \in X} U_z$ und da X kompakt ist, gibt es ein $\ell \in \mathbf{Z}_{\geqslant 0}$ und $z_i \in X$ für $1 \leqslant i \leqslant \ell$ mit $X = \bigcup_{i=1}^{\ell} U_{z_i}$. Setze

$$k_x \;:=\; \min_{1 \leqslant i \leqslant \ell} h_{z_i}\,.$$

Mit dem letzten Lemma aus §5.2, iteriert angewandt, ist $k_x \in \bar{A}$.

Zunächst ist $k_x(x) = \min_{1 \leqslant i \leqslant \ell} h_{z_i}(x) = \min_{1 \leqslant i \leqslant \ell} g(x) = g(x)$.

Ist nun $y \in X$, so wählen wir ein $1 \leqslant i \leqslant \ell$ mit $y \in U_{z_i}$ und erhalten

$$k_x(y) \ \leqslant \ h_{z_i}(y) \ < \ g(y) + \varepsilon \ .$$

Dies zeigt die *Behauptung.*

Setze $U'_x := (k_x - g)^{-1}(\mathbf{R}_{>-\varepsilon})$ für $x \in X$. Es ist $x \in U'_x \overset{\text{off.}}{\subseteq} X$, da $k_x - g$ stetig ist. Da $X = \bigcup_{x \in X} U'_x$ und da X kompakt ist, gibt es ein $m \in \mathbf{Z}_{\geqslant 0}$ und $x_j \in X$ für $1 \leqslant j \leqslant m$ mit $X = \bigcup_{j=1}^m U'_{x_j}$. Setze

$$\tilde{f} \ := \ \max_{1 \leqslant j \leqslant m} k_{x_j} \ .$$

Mit dem letzten Lemma aus §5.2, iteriert angewandt, ist $\tilde{f} \in \bar{A}$.

Ist nun $y \in X$, so wählen wir ein $1 \leqslant j \leqslant m$ mit $y \in U'_{x_j}$ und erhalten

$$\tilde{f}(y) \ \geqslant \ k_{x_j}(y) \ > \ g(y) - \varepsilon \ ,$$

sowie

$$\tilde{f}(y) \ = \ \max_{1 \leqslant i \leqslant m} k_{x_i}(y) \ < \ g(y) + \varepsilon \ ,$$

also insgesamt $|\tilde{f}(y) - g(y)| < \varepsilon$.

Somit ist ein $\tilde{f} \in A$ mit $\|\tilde{f} - g\| < \varepsilon$ gefunden. ▫

Korollar. *Sei $n \in \mathbf{Z}_{\geqslant 1}$. Sei $X \subseteq \mathbf{R}^n$ kompakt. Sei $f \in \mathrm{C}(X)$. Dann gibt es für alle $\varepsilon \in \mathbf{R}_{>0}$ ein Polynom $p : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}$ mit $|f(x) - p(x)| < \varepsilon$ für alle $x \in X$.*

Beweis. Es ist $A := \{p|_X \ : \ \mathbf{R}^n \xrightarrow{p} \mathbf{R} \text{ ist Polynom}\} \subseteq \mathrm{C}(X)$ eine Teilalgebra. Beachte hierzu, daß die Projektionen $\mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}$, $t \longmapsto t_j$ stetig sind für $1 \leqslant j \leqslant n$; vgl. Aufgabe 21.(5). Damit sind auch alle $\mathbf{R}$-Linearkombinationen von Produkten dieser Projektionen, i.e. alle Polynome, stetig; vgl. auch Aufgabe 20. Schließlich sind auch noch deren Einschränkungen auf X stetig; vgl. zweite Bemerkung aus §2.1.1.

Wir verwenden die Notation von Satz 9.

Für $x \in X$ setzen wir $\varphi_x(t) := 1$ für $t \in X$. Dann ist insbesondere $\varphi_x(x) = 1 \neq 0$.

Für $x, y \in X$ mit $x \neq y$ wählen wir ein $1 \leqslant i \leqslant n$ mit $x_i \neq y_i$ und setzen $\varphi_{x,y}(t) := t_i$ für $t \in X$. Dann ist insbesondere $\varphi_{x,y}(x) = x_i$ ungleich $\varphi_{x,y}(y) = y_i$.

Also findet Satz 9 Anwendung. ▫

Korollar (Weierstraß). *Seien $a, b \in \mathbf{R}$ mit $a \leqslant b$. Sei $f \in \mathrm{C}([a,b])$. Dann gibt es für alle $\varepsilon > 0$ ein Polynom $p : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ mit $|f(x) - p(x)| < \varepsilon$ für alle $x \in [a,b]$.*

Beweis. Dies ist ein Spezialfall des vorstehenden Korollars.

Die Tatsache, daß Polynome stetige Abbildungen von $\mathbf{R}$ nach $\mathbf{R}$ sind, kann man in diesem Spezialfall auch Aufgabe 21.(4) entnehmen. In Notation von Satz 9 kann für $x \in [a,b]$ hier $\varphi_x(t) = 1$ für $t \in \mathbf{R}$ gewählt werden; sowie für $x,\ y \in [a,b]$ mit $x \neq y$ schlicht $\varphi_{x,y}(t) = t$ für $t \in \mathbf{R}$. $\square$

Anhang A

Zorns Lemma

Wir folgen [**4,** App. 2, §2] und [**3**].

A.1 Halbordnungen

Sei M eine Menge.

Definition. Eine *Halbordnung* auf M ist eine Relation $(\leqslant)$ auf M, die *reflexiv, identitiv* und *transitiv* ist.

(Reflexivität) Es ist $x \leqslant x$ für $x \in M$.

(Identitivität) Aus $x \leqslant y$ und $y \leqslant x$ folgt $x = y$ für $x,\, y \in M$.

(Transitivität) Aus $x \leqslant y$ und $y \leqslant z$ folgt $x \leqslant z$ für $x,\, y,\, z \in M$.

Schreibe $x < y$ falls $x \leqslant y$, aber $x \neq y$, wobei $x,\, y \in M$.

Definition. Sei M mit einer Halbordnung $(\leqslant)$ versehen. Sei $N \subseteq M$.

Ein Element $z \in N$ heiße ein *maximales Element von N,* falls für $n \in N$ aus $z \leqslant n$ folgt, daß $z = n$.

Ein Element $t \in M$ heiße *obere Schranke* von N, falls $n \leqslant t$ für alle $n \in N$.

Ein Element $t \in M$ heiße *Supremum* von N, falls t obere Schranke von N ist, und falls für jede obere Schranke $t' \in M$ von N gilt, daß $t \leqslant t'$.

Es existiert in M höchstens ein Supremum von N. Denn sind t und $\tilde{t}$ Suprema von N, so ist $t \leqslant \tilde{t}$, da $\tilde{t}$ obere Schranke von N, und $\tilde{t} \leqslant t$, da t obere Schranke von N; also $t = \tilde{t}$. Falls es existiert, so werde das Supremum von N mit $\sup N$ bezeichnet.

Definition. Sei M mit einer Halbordnung $(\leqslant)$ versehen.

Eine Teilmenge $L \subseteq M$ heißt *Kette,* falls für alle $x,\, x' \in L$ gilt, daß $x \leqslant x'$ oder $x' \leqslant x$.

Es heißt die Halbordnung $(\leqslant)$ *induktiv,* falls jede nichtleere Kette $L \subseteq M$ eine obere Schranke in M hat.

Es heißt die Halbordnung $(\leqslant)$ *strikt induktiv,* falls jede nichtleere Kette $L \subseteq M$ ein Supremum in M hat.

Beispiel.

(1) Die übliche Ordnung $(\leqslant)$ auf $\mathbf{R}_{\leqslant 0}$ ist strikt induktiv. In der Tat ist jede nichtleere Teilmenge von $\mathbf{R}_{\leqslant 0}$ eine nichtleere Kette, und hat auch ein Supremum.

(2) Die übliche Ordnung $(\leqslant)$ auf $\mathbf{R}$ ist nicht induktiv. In der Tat hat etwa die volle Teilmenge $\mathbf{R} \subseteq \mathbf{R}$ keine obere Schranke.

(3) Sei M eine Menge. Es ist die Teilmengenrelation $(\subseteq)$ eine Halbordnung auf $\mathrm{Pot}(X)$. Diese ist strikt induktiv, da für eine nichtleere Kette $L \subseteq \mathrm{Pot}(M)$ die Teilmenge $\bigcup_{N \in L} N$ das Supremum von L ist. Denn $\bigcup_{N \in L} N$ ist nach Konstruktion eine obere Schranke von L; und ist N' eine obere Schranke von L, dann ist $N \subseteq N'$ für alle $N \in L$, und somit auch $\bigcup_{N \in L} N \subseteq N'$.

A.2 Ein Fixpunktlemma

Lemma. *Sei M eine Menge, versehen mit einer strikt induktiven Halbordnung $(\leqslant)$. Es gebe ein Element $i \in M$ mit $i \leqslant x$ für alle $x \in M$. Sei $f : M \longrightarrow M$ eine Abbildung mit*

$$x \leqslant f(x)$$

für alle $x \in M$. Dann gibt es ein $y \in M$ mit $y = f(y)$.

Beweis. Heiße eine Teilmenge $N \subseteq M$ *zulässig,* falls

(1) $i \in N$,

(2) $f(N) \subseteq N$ und

(3) für alle nichtleeren Ketten $L \subseteq N$ auch $\sup L \in N$ ist.

Es ist die volle Teilmenge $M \subseteq M$ zulässig.

Sei J eine Indexmenge, und sei N_j zulässig für alle $j \in J$. Wir *behaupten,* daß $N := \bigcap_{j \in J} N_j$ zulässig ist.

Zu (1). Es ist $i \in N$, da $i \in N_j$ für alle $j \in J$.

Zu (2). Es ist

$$f(N) = f(\bigcap_{j \in J} N_j) \subseteq \bigcap_{j \in J} f(N_j) \subseteq \bigcap_{j \in J} N_j = N .$$

Zu (3). Sei eine nichtleere Kette $L \subseteq N$ gegeben. Ist $j \in J$, so ist $L \subseteq N_j$, und also $\sup L \in N_j$. Insgesamt ist also $\sup L \in \bigcap_{j \in J} N_j = N$.

Dies zeigt die *Behauptung.*

Sei N_0 der Schnitt aller zulässigen Teilmengen von M. Nach vorstehender Behauptung ist N_0 zulässig. Insbesondere ist $i \in N_0$, und also N_0 nichtleer.

Heiße $e \in N_0$ *extremal,* falls für alle $x \in N_0$ mit $x < e$ noch $f(x) \leqslant e$ ist. Sei

$$E \ := \ \{e \in N_0 \ : \ e \text{ ist extremal}\} \ \subseteq \ N_0 \ .$$

Setze für $e \in E$

$$N(e) \ := \ \{x \in N_0 \ : \ x \leqslant e \text{ oder } f(e) \leqslant x\} \ \subseteq \ N_0 \ .$$

Wir *behaupten,* daß $N(e)$ zulässig ist für alle $e \in E$.

Zu (1). Es ist $i \leqslant e$, also $i \in N(e)$.

Zu (2). Sei $x \in N(e)$. Ist $x < e$, so ist $f(x) \leqslant e$ wegen e extremal, und also $f(x) \in N(e)$. Ist $x = e$, so ist $f(e) = f(x)$, und also $f(x) \in N(e)$. Ist $f(e) \leqslant x$, so ist $f(e) \leqslant x \leqslant f(x)$, und also $f(x) \in N(e)$.

Zu (3). Sei $L \subseteq N(e)$ eine nichtleere Kette. Zunächst ist $\sup L \in N_0$. Ist $x \leqslant e$ für alle $x \in L$, so ist e eine obere Schranke von L, und also $\sup L \leqslant e$, und somit auch $\sup L \in N(e)$. Gibt es dagegen ein $x \in L$ mit $f(e) \leqslant x$, so ist $f(e) \leqslant x \leqslant \sup L$, und also auch $\sup L \in N(e)$.

Dies zeigt die *Behauptung.*

Da N_0 in jeder zulässigen Teilmenge von M enthalten ist, folgt aus der Behauptung, daß $N_0 \subseteq N(e)$ und also $N_0 = N(e)$ für $e \in E$.

Wir *behaupten,* daß E zulässig ist.

Zu (1). Es ist $i \in E$, da es kein $x \in N_0$ mit $x < i$ gibt.

Zu (2). Sei $e \in E$. Wir haben zu zeigen, daß $f(e)$ extremal ist. Sei $x \in N_0$ mit $x < f(e)$ gegeben. Dann ist $f(e) \not\leqslant x$. Da mit voriger Behauptung $N_0 = N(e)$ ist, folgt $x \leqslant e$. Falls $x = e$, ist $f(x) = f(e)$; falls $x < e$, ist wegen e extremal noch $f(x) \leqslant e \leqslant f(e)$. In beiden Fällen ist $f(x) \leqslant f(e)$.

Zu (3). Sei $L \subseteq E$ eine nichtleere Kette. Zunächst ist $\sup L \in N_0$. Wir haben zu zeigen, daß $\sup L$ extremal ist. Sei $x \in N_0$ mit $x < \sup L$ gegeben. Es ist x keine obere Schranke für L. Also gibt es ein $\ell \in L$, für welches $\ell \not\leqslant x$ gilt. A fortiori ist auch $f(\ell) \not\leqslant x$. Nun ist mit voriger Behauptung $N_0 = N(\ell)$, und somit $x \leqslant \ell$. Es folgt $x < \ell$, da $\ell \not\leqslant x$. Aus ℓ extremal folgt nun $f(x) \leqslant \ell \leqslant \sup L$.

Dies zeigt die *Behauptung.*

Da N_0 in jeder zulässigen Teilmenge von M enthalten ist, folgt aus der Behauptung, daß $N_0 \subseteq E$ und also $N_0 = E$.

Wir *behaupten,* daß N_0 eine Kette ist. Seien $x, x' \in N_0$, und sei $x' \not\leqslant x$. Wir haben zu zeigen, daß $x \leqslant x'$. Da nach voriger Behauptung $x \in E$ ist, ist nach vorvoriger Behauptung

$N_0 = N(x)$. Aus $x' \not\leqslant x$ folgt also $f(x) \leqslant x'$. Insgesamt ist also $x \leqslant f(x) \leqslant x'$. Dies zeigt die *Behauptung.*

Mit dieser Behauptung dürfen wir $y := \sup N_0$ setzen und aus N_0 zulässig folgern, daß $y = \sup N_0 \in N_0$. Abermals da N_0 zulässig ist, folgt $f(y) \in N_0$, und somit $f(y) \leqslant \sup N_0 = y$. Insgesamt ist $y \leqslant f(y) \leqslant y$, und mithin $y = f(y)$. ▫

A.3 Der Satz von Kuratowski-Zorn, besser bekannt als Zorns Lemma

Lemma. *Sei M eine Menge, ausgestattet mit einer strikt induktiven Halbordnung $(\leqslant)$. Es gebe ein Element $i \in M$ mit $i \leqslant x$ für alle $x \in M$. Dann hat M ein maximales Element.*

Beweis. Nehmen wir *an,* es gibt kein maximales Element in M. Wähle für jedes $x \in M$ ein Element $f(x) \in M$ mit $x < f(x)$; dies definiert eine Abbildung $f : M \longrightarrow M$ ([2]). Eine Anwendung des Lemmas aus §A.2 auf diese Abbildung liefert ein $y \in M$ mit $y = f(y)$, im *Widerspruch* zu $y < f(y)$. ▫

Lemma. *Sei M eine nichtleere Menge, ausgestattet mit einer induktiven Halbordnung $(\leqslant)$. Dann hat M ein maximales Element.*

Beweis. Sei $\mathcal{K}$ die Menge der Ketten von M bezüglich $(\leqslant)$. Es ist $\mathcal{K}$ mit der Halbordnung der Inklusionsrelation $(\subseteq)$ ausgestattet.

Wir *behaupten,* daß diese Halbordnung strikt induktiv ist. Genauer gesagt, ist $\emptyset \neq \mathcal{L} \subseteq \mathcal{K}$ eine Kette bezüglich Inklusion, so behaupten wir, daß $\bigcup_{L\in\mathcal{L}} L$ das Supremum von $\mathcal{L}$ ist.

Zunächst begründen wir, daß $\bigcup_{L\in\mathcal{L}} L \in \mathcal{K}$, i.e. daß $\bigcup_{L\in\mathcal{L}} L$ eine Kette ist. Sind $x, x' \in \bigcup_{L\in\mathcal{L}} L$, so gibt es $x \in L \in \mathcal{L}$ und $x' \in L' \in \mathcal{L}$. Da $\mathcal{L}$ eine Kette ist, ist $L \subseteq L'$ oder $L' \subseteq L$. Sei o.E. $L \subseteq L'$. Dann sind $x, x' \in L'$. Da L' eine Kette ist, folgt $x \leqslant x'$ oder $x' \leqslant x$.

Nach Konstruktion ist $\bigcup_{L\in\mathcal{L}} L$ eine obere Schranke von $\mathcal{L}$. Ist ferner $\tilde{L} \in \mathcal{K}$ eine weitere obere Schranke von $\mathcal{L}$, i.e. ist $L \subseteq \tilde{L}$ für alle $L \in \mathcal{L}$, so folgt $\bigcup_{L\in\mathcal{L}} L \subseteq \tilde{L}$. Somit ist $\sup \mathcal{L} = \bigcup_{L\in\mathcal{L}} L$ nachgewiesen und die *Behauptung* gezeigt.

Ferner gibt es in $\mathcal{K}$ das Element $\emptyset$, welches in allen Elementen von $\mathcal{K}$ enthalten ist.

Mit vorigem Lemma, angewandt auf $\mathcal{K}$, ausgestattet mit $(\subseteq)$, gibt es also ein maximales Element $\hat{L} \in \mathcal{K}$. Es existiert eine obere Schranke $\hat{\ell} \in M$ von $\hat{L}$; falls $\hat{L} \neq \emptyset$, ist dies nach Voraussetzung der Fall; falls $\hat{L} = \emptyset$, ziehe man ein beliebig gewähltes Element von M heran.

Es bleibt zu zeigen, daß $\hat{\ell}$ ein maximales Element von M ist. Sei $\hat{\ell} \leqslant x$ für ein $x \in M$. Dann ist $\ell \leqslant \hat{\ell} \leqslant x$ für alle $\ell \in \hat{L}$, und also $\hat{L} \cup \{x\} \in \mathcal{K}$. Aus der Maximalität von $\hat{L}$ folgt, daß $x \in \hat{L}$, woraus $x \leqslant \hat{\ell}$, und insgesamt $x = \hat{\ell}$ folgt. ▫

---

[2] Hier geht das sog. Auswahlaxiom ein.

Satz 10 (Kuratowski-Zorn, besser bekannt als Zorns Lemma)

Sei M eine Menge, ausgestattet mit einer induktiven Halbordnung $(\leqslant)$. Dann gibt es für alle $x \in M$ ein maximales Element $\hat{x}$ von M mit $x \leqslant \hat{x}$.

Beweis. Die Einschränkung der Halbordnung $(\leqslant)$ auf $M_{\geqslant x} := \{y \in M \;:\; y \geqslant x\}$ ist ebenfalls induktiv, da für eine nichtleere Kette $L \subseteq M_{\geqslant x}$ mit oberer Schranke $\hat{\ell} \in M$ nach Wahl eines $\ell \in L$ folgt, daß $x \leqslant \ell \leqslant \hat{\ell}$, mithin $\hat{\ell} \in M_{\geqslant x}$.

Nach vorigem Lemma gibt es in $M_{\geqslant x}$ ein maximales Element $\hat{x}$. Dieses erfüllt $x \leqslant \hat{x}$ und ist auch maximal in M. Letzteres, da aus $\hat{x} \leqslant x'$ mit $x' \in M$ auch $x \leqslant \hat{x} \leqslant x'$ und somit $x' \in M_{\geqslant x}$ folgt, was wegen der Maximalität von $\hat{x}$ nach sich zieht, daß $\hat{x} = x'$. ▫

Wir behandeln nun die offengelassene Aussage des Lemmas aus §4.3.2.

Sei M eine Menge. Sei $P \subseteq \operatorname{Pot}(M)$. Es ist P mit der von $\operatorname{Pot}(M)$ auf P eingeschränkten Halbordnung $(\subseteq)$ ausgestattet.

Korollar. *Es gebe für jede nichtleere Kette $K \subseteq P$ eine obere Schranke in P, i.e. ein $\hat{R} \in P$ mit $R \subseteq \hat{R}$ für alle $R \in P$.*

Dann gibt es für alle $N \in P$ ein maximales Element $\hat{N} \in P$ von P mit $N \subseteq \hat{N}$.

Beweis. Dies folgt nun aus vorigem Satz 10, da nach Voraussetzung die eingeschränkte Halbordnung $(\subseteq)$ auf P induktiv ist. ▫

Anhang B

Aufgaben und Lösungen

B.1 Aufgaben

Aufgabe 1 (§1.1.1)

(1) Bestimme $\mathrm{Pot}(\{1,2,3\})$.

(2) Sei X eine Menge. Zeige, daß die Abbildung

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Abb}(X,\{0,1\}) & \longrightarrow & \mathrm{Pot}(X) \\ f & \longmapsto & f^{-1}(\{1\}) \end{array}$$

eine Bijektion ist.

(3) Sei X eine (nicht notwendig endliche) Menge. Zeige, daß es keine Surjektion von X nach $\mathrm{Pot}(X)$ gibt. (Hinweis: Angenommen, es sei $X \xrightarrow{f} \mathrm{Pot}(X)$ surjektiv. Betrachte $Y = \{x \in X \;:\; x \notin f(x)\} \subseteq X$. Sei $y \in X$ mit $f(y) = Y$. Ist $y \in Y$? Ist $y \notin Y$?)

Aufgabe 2 (§1.1.2, §1.2.3; Sierpinski-Raum)

Bestimme eine weder verklumpte noch diskrete Topologie auf der Menge $\{1,2\}$.

Aufgabe 3 (§1.1.2) Zeige (durch Beweis) oder widerlege (durch Gegenbeispiel).

Sei X eine Menge.

(1) Sei $T := \{U \subseteq X \;:\; U \text{ ist endlich}\} \cup \{X\}$. Es ist (X,T) ein topologischer Raum.

(2) Sei $T := \{U \subseteq X \;:\; X \smallsetminus U \text{ ist endlich}\} \cup \{\emptyset\}$. Es ist (X,T) ein topologischer Raum.

Aufgabe 4 (§1.1.3) Zeige oder widerlege.

Sei X ein topologischer Raum. Sei I eine Indexmenge. Sei $k \in \mathbf{Z}_{\geqslant 1}$.

(1) Ist $Y \subseteq X$, so ist Y offen oder abgeschlossen.

(2) Ist $U_i \overset{\text{off.}}{\subseteq} X$ für alle $i \in I$, so ist $\bigcap_{i \in I} U_i \overset{\text{off.}}{\subseteq} X$.

(3) Ist $U_i \overset{\text{off.}}{\subseteq} X$ für alle $i \in \{1, \ldots, k\}$, so ist $\bigcap_{i=1}^{k} U_i \overset{\text{off.}}{\subseteq} X$.

(4) Ist $A_i \overset{\text{abg.}}{\subseteq} X$ für alle $i \in I$, so ist $\bigcup_{i \in I} A_i \overset{\text{abg.}}{\subseteq} X$.

(5) Ist $A_i \overset{\text{abg.}}{\subseteq} X$ für alle $i \in \{1, \ldots, k\}$, so ist $\bigcup_{i=1}^{k} A_i \overset{\text{abg.}}{\subseteq} X$.

Aufgabe 5 (§1.1.3, §1.2.2) Sei (X, T) ein topologischer Raum.

(1) Sei I eine Indexmenge. Seien $A_i \overset{\text{abg.}}{\subseteq} X$ für $i \in I$. Zeige, daß $\bigcap_{i \in I} A_i \overset{\text{abg.}}{\subseteq} X$.

(2) Sei $Y \subseteq X$. Zeige, daß $Z \subseteq Y$ genau dann eine (bzgl. Spurtopologie) abgeschlossene Teilmenge ist, wenn es eine abgeschlossene Teilmenge $Z' \subseteq X$ mit $Z = Z' \cap Y$ gibt.

Aufgabe 6 (§1.1.3, §1.2.2) Zeige oder widerlege.

Sei (X, T) ein topologischer Raum. Sei $Y \subseteq X$.

(1) Ist U eine offene Teilmenge von Y, so ist U auch eine offene Teilmenge von X.

(2) Ist U eine offene Teilmenge von Y, und ist Y eine offene Teilmenge von X, so ist U auch eine offene Teilmenge von X.

(3) Ist A eine abgeschlossene Teilmenge von Y, und ist Y eine abgeschlossene Teilmenge von X, so ist A auch eine abgeschlossene Teilmenge von X.

Aufgabe 7 (§1.3.2, §1.2.2) Sei (X, d) ein metrischer Raum. Sei $Y \subseteq X$ eine Teilmenge.

(1) Zeige, daß $(Y, d|_{Y \times Y})$ ein metrischer Raum ist.

(2) Zeige, daß die von der Metrik $d|_{Y \times Y}$ auf Y induzierte Topologie $T^{(Y, d|_{Y \times Y})}$ gleich der Spurtopologie ist.

Aufgabe 8 (§1.3.1) Sei $X := \{1, 2\}$. Sei eine Prämetrik d auf X definiert durch

$$d(1,1) \ := \ 1 \ , \quad d(2,2) \ := \ 1 \ , \quad d(1,2) \ := \ d(2,1) \ := 0 \ .$$

Zeige, daß $T^{(X,d)} = T_{X,\,\text{verklumpt}}$. Zeige, daß $\mathrm{B}_1(1)$ keine offene Teilmenge von X ist.

Aufgabe 9 (§1.3.2) Sei (X, d) ein metrischer Raum.

Sei $\bar{\mathrm{B}}_\varepsilon(x) := \{y \in X \;:\; d(y,x) \leqslant \varepsilon\}$ für $x \in X$ und $\varepsilon \in \mathbf{R}_{>0}$.

Zeige, daß (bzgl. der Topologie $T^{(X,d)}$)

$$\bar{\mathrm{B}}_\varepsilon(x) \overset{\text{abg.}}{\subseteq} X \; .$$

Aufgabe 10 (§1.3.4) Seien a, b, $c \in \mathbf{R}$.

Zeige mittels Cauchy-Schwarz für $\left(\begin{smallmatrix} a \\ b \\ c \end{smallmatrix}\right)$ und $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$, daß

$$ab + ac + bc \;\leqslant\; a^2 + b^2 + c^2 \; ,$$

und daß Gleichheit genau dann gilt, wenn $a = b = c$.

Aufgabe 11 (§1.3.3, §1.3.5.4, §1.3.5.5)

(1) Sei V ein $\mathbf{R}$-Vektorraum, der den beiden normierten Räumen $(V, \|{-}\|)$ und $(V, \|{-}\|')$ zugrundeliege.

Gebe es α, $\beta \in \mathbf{R}_{>0}$ mit $\alpha\|x\| \leqslant \|x\|' \leqslant \beta\|x\|$ für alle $x \in V$.

Seien $d := d^{(V,\|-\|)}$ und $d' := d^{(V,\|-\|')}$ die zugehörigen Metriken auf V.

Seien $T := T^{(V,d)}$ und $T' := T^{(V,d')}$ die zugehörigen Topologien.

Zeige, daß $T = T'$.

(2) Sei $n \geqslant 1$. Zeige mittels (1) erneut, daß $T^{(\mathbf{R}^n,\, d^{(2)})} = T^{(\mathbf{R}^n,\, d^{(\infty)})}$; cf. §1.3.5.4, §1.3.5.5.

Aufgabe 12 (§1.2.2) Sei (X, T) ein topologischer Raum. Sei $Y \subseteq X$. Zeige.

(1) Sei $U \subseteq Y$ mit $U \overset{\text{off.}}{\subseteq} X$. Es ist $U \overset{\text{off.}}{\subseteq} Y$.

(2) Sei $A \subseteq Y$ mit $A \overset{\text{abg.}}{\subseteq} X$. Es ist $A \overset{\text{abg.}}{\subseteq} Y$.

Aufgabe 13 (§1.3.3, Aufgabe 11) Sei $n \geqslant 0$.

(1) Sei $\|x\|_1 := \sum_{i=1}^n |x_i|$ für $x \in \mathbf{R}^n$. Zeige, daß $(\mathbf{R}^n, \|-\|_1)$ ein normierter Raum ist.

(2) Sei $d^{(1)}(x,y) := \|x - y\|_1$ für x, $y \in \mathbf{R}^n$. Sei $\mathrm{B}_\varepsilon^{(1)}(x) := \{y \in \mathbf{R}^n \;:\; d^{(1)}(y,x) < \varepsilon\}$ für $x \in \mathbf{R}^n$ und $\varepsilon \in \mathbf{R}_{>0}$. Skizziere $\mathrm{B}_1^{(1)}(\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right))$, wobei $n = 2$.

(3) Zeige, daß $T^{(\mathbf{R}^n,d^{(1)})} = T^{(\mathbf{R}^n,d^{(2)})}$. (Hinweis: Aufgabe 11.)

Aufgabe 14 (§1.4, Aufgabe 9)

(1) Bestimme $\overline{\{2^{-n} \;:\; n \in \mathbf{Z}_{\geqslant 0}\}} \subseteq \mathbf{R}$. Begründung!

(2) Bestimme $\overline{\{\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \;:\; x \in [-1,+1],\, y \in (-1,+1)\}} \subseteq \mathbf{R}^2$. Begründung!

(3) Bestimme Y° für alle $Y \subseteq \{1,2\}$ bezüglich der Sierpinski-Topologie $\{\emptyset,\, \{1\},\, \{1,2\}\}$; cf. Aufgabe 2. Begründung!

(4) Sei $(V, \|-\|)$ ein normierter Raum. Schreibe $d := d^{(V,\|-\|)}$. Es ist also $d(x,y) = \|x-y\|$ für $x,\, y \in V$.

Sei $x \in V$. Sei $\varepsilon \in \mathbf{R}_{>0}$. Zeige, daß (bzgl. $T^{(V,d)}$)

$$\overline{\mathrm{B}_\varepsilon(x)} \;=\; \bar{\mathrm{B}}_\varepsilon(x) \;\stackrel{\text{def.}}{=}\; \{y \in V \;:\; d(y,x) \leqslant \varepsilon\}\ ;$$

cf. Aufgabe 9.

Aufgabe 15 (§1.4) Zeige oder widerlege.

Sei X ein topologischer Raum. Seien $Y,\, Z \subseteq X$.

(1) Es ist $\overline{X \setminus Y} = X \setminus Y^\circ$.

(2) Es ist $\overline{Y \cap Z} = \overline{Y} \cap \overline{Z}$.

(3) Es ist $\overline{Y \cup Z} = \overline{Y} \cup \overline{Z}$.

Aufgabe 16 (§1.3.4) Sei $(V, \langle -, = \rangle)$ ein euklidscher Raum. Seien $x,\, y \in V \setminus \{0\}$. Schreibe $\| - \| := \| - \|_{\langle -,= \rangle}$, i.e. $\|x\| = \langle x, x\rangle^{1/2}$.

Zeige, daß $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$ genau dann zutrifft, wenn $y = \lambda x$ für ein $\lambda \in \mathbf{R}_{>0}$.

Aufgabe 17 (§2.1.1, §2.1.3)

Sei $X = (X, T_X) := (\{1,2,3\}, \big\{\emptyset, \{1\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{1,2,3\}\big\})$.

Sei $Y = (Y, T_Y) := (\{1,2\}, \big\{\emptyset, \{1\}, \{1,2\}\big\})$ der Sierpinski-Raum; cf. Aufgabe 2.

(1) Zeige, daß (X, T_X) ein topologischer Raum ist.

(2) Bestimme alle stetigen Abbildungen von X nach Y.

(3) Bestimme alle Homöomorphismen von X nach X.

Aufgabe 18 (§2.1.1, §1.4) Zeige oder widerlege.

Seien X und Y topologische Räume. Sei $X \xrightarrow{f} Y$ eine Abbildung.

(1) Es ist f stetig genau dann, wenn $f^{-1}(B) \overset{\text{abg.}}{\subseteq} X$ für alle $B \overset{\text{abg.}}{\subseteq} Y$.

(2) Es ist f stetig genau dann, wenn $f(\overline{X'}) \subseteq \overline{f(X')}$ für alle $X' \subseteq X$.

(3) Falls f stetig ist, dann ist $f(X'^\circ) \supseteq f(X')^\circ$ für alle $X' \subseteq X$.

(4) Falls f stetig ist, dann ist $f(X'^\circ) \subseteq f(X')^\circ$ für alle $X' \subseteq X$.

Aufgabe 19 (§2.1.3) Zeige.

Seien X und Y topologische Räume. Sei $X \xrightarrow{f} Y$ eine Abbildung.

(1) Sei f ein Homöomorphismus. Sei $U \subseteq X$.
Es ist $U \overset{\text{off.}}{\subseteq} X$ genau dann, wenn $f(U) \overset{\text{off.}}{\subseteq} Y$.

(2) Es ist f genau dann ein Homöomorphismus, wenn f stetig ist und es eine stetige Abbildung $X \xleftarrow{g} Y$ gibt mit $g \circ f = \mathrm{id}_X$ und $f \circ g = \mathrm{id}_Y$.

Aufgabe 20 (§2.1.1) Zeige.

Sei X ein topologischer Raum. Seien $f,\, g \in \mathrm{C}(X)$.

(1) Sei $(f+g)(x) := f(x) + g(x)$ für $x \in X$. Zeige, daß $f + g \in \mathrm{C}(X)$.

(2) Sei $(f \cdot g)(x) := f(x) \cdot g(x)$ für $x \in X$. Zeige, daß $f \cdot g \in \mathrm{C}(X)$.

Aufgabe 21 (§2.3.3, §2.2, §1.3.3) Seien X, Y topologische Räume.

Sei $X \xrightarrow{f} Y$ eine Abbildung. Entscheide, ob f stetig ist.

(1) Sei $X = Y = \mathbf{R}$. Sei $f(x) := |x|$ für $x \in \mathbf{R}$. (Hinweis: Satz 2.)

(2) Sei $X = Y = \mathbf{R}$. Sei $f(x) := \sin(1/x)$ für $x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$. Sei $f(0) := 0$.

(3) Sei $X = \mathbf{R}_{>0}$. Sei $Y = \mathbf{R}$. Sei $f(x) := 1/x$ für $x \in \mathbf{R}_{>0}$.

(4) Sei $X = Y = \mathbf{R}$. Sei $n \geqslant 0$. Seien $a_0, \ldots, a_n \in \mathbf{R}$. Sei $f(x) := a_n x^n + \cdots + a_0 x^0$ für $x \in \mathbf{R}$. (Hinweis: Aufgabe 20.)

(5) Sei $n \geqslant 0$, sei $X = \mathbf{R}^n$, normiert mit $\|-\|_2$. Sei Y ein normierter Raum. Sei $X \xrightarrow{f} Y$ eine lineare Abbildung. (Hinweis: Bilder der Standardbasisvektoren betrachten.)

(6) Sei $X = (X, \|-\|)$ ein normierter Raum. Sei $Y = \mathbf{R}$. Sei $f(x) := \|x\|$ für $x \in X$.

Aufgabe 22 (§2.1.1, §1.4) Seien X und Y topologische Räume.

Sei $X \xrightarrow{f} Y$ eine stetige Abbildung.

(1) Sei $Y' \subseteq Y$. Zeige, daß $\overline{f^{-1}(Y')} \subseteq f^{-1}(\bar{Y}')$. Gilt stets die Gleichheit?

(2) Sei $X' \subseteq X$. Zeige, daß genau dann $\partial X' = \emptyset$ ist, wenn X' eine offene und abgeschlossene Teilmenge von X ist.

(3) Sei $X' \subseteq X$. Zeige, daß $\partial \bar{X}' \subseteq \partial X'$. Gilt stets die Gleichheit?

Aufgabe 23 (§2.1.2, §2.1.3, Aufgabe 21.(3)) Zeige oder widerlege.

(1) Seien X, Y topologische Räume. Sei $X \xrightarrow{f} Y$ eine surjektive offene Abbildung. Sei $X' \subseteq X$. Schreibe $Y' := f(X') \subseteq Y$. Dann ist $X' \xrightarrow{f|_{X'}^{Y'}} Y'$ offen (jeweils bezüglich der Spurtopologie).

(2) Es ist das Intervall $(0,1)$ homöomorph zu $\mathbf{R}_{>1}$. (Hinweis: Aufgabe 21.(3).)

Aufgabe 24 (§3.1) Sei X eine Menge. Sei $S \subseteq \mathrm{Pot}(X)$. Bestimme $\langle S \rangle_X$.

(1) $X = \{1,2,3,4\}$, $S = \big\{\{1,2,3\},\ \{1,2,4\}\big\}$.

(2) $X = \{1,2,3,4,5,6\}$, $S = \big\{\{1,2,3,4\},\ \{1,2,3,5\},\ \{3,4,5,6\}\big\}$.

Aufgabe 25 (§3.1, §3.2) Zeige.

Sei X ein topologischer Raum. Sei S eine Subbasis von X.

(1) Es ist S genau dann eine Basis von X, wenn für $k \geqslant 0$, $U_i \in S$ für $1 \leqslant i \leqslant k$ und $x \in \bigcap_{i=1}^k U_i$ ein $V \in S$ existiert mit $x \in V \subseteq \bigcap_{i=1}^k U_i$.

(2) Ist $U \cap V \in S$ für alle $U,\ V \in S$, so ist S eine Basis. (Hinweis: Teil (1).)

(3) Ist S eine Subbasis von X, so ist $S' := \{\bigcap_{i=1}^k U_i \,:\, k \in \mathbf{Z}_{\geqslant 0},\ U_i \in S \text{ für } 1 \leqslant i \leqslant k\}$ eine Basis von X. (Hinweis: Teil (2).)

Aufgabe 26 (§3.2, §1.2.3.2) Sei X eine Menge.

Zeige, daß $\big\{\{x\} \,:\, x \in X\big\}$ eine Basis von $T_{X,\,\mathrm{diskret}}$ ist.

Aufgabe 27 (§3.2; Abzählbarkeit)
Eine Menge X heiße *abzählbar,* wenn $X = \emptyset$ ist oder eine Surjektion $\mathbf{Z}_{\geqslant 1} \longrightarrow X$ existiert.
Zeige.

(1) Ist $X \xrightarrow{f} Y$ eine Abbildung, und ist X abzählbar, so auch $f(X)$.

(2) Eine Teilmenge einer abzählbaren Menge ist abzählbar.

(3) Für abzählbare Mengen X und Y ist auch $X \times Y$ abzählbar.

(4) Es ist $\mathbf{Q}$ abzählbar.

(5) Sei $n \geqslant 0$. Es besitzt $\mathbf{R}^n$ eine abzählbare Basis. (Hinweis: Beispiel (4) aus §3.2.)

Aufgabe 28 (§3.3.1)
Sei $X = \{1, 2, 3, 4\}$.
Sei $(Y_1, T_{Y_1}) = \big(\{1, 2, 3\}\,,\ \{\emptyset, \{1\},\, \{1, 2\},\, \{1, 3\},\, \{1, 2, 3\}\}\big)$.
Sei $(Y_2, T_{Y_2}) = \big(\{1, 2\}\,,\ \{\emptyset, \{1\},\, \{1, 2\}\}\big)$. Cf. Aufgabe 17.
Seien $X \xrightarrow{f_1} Y_1$ und $X \xrightarrow{f_2} Y_2$ gegeben.
Bestimme die diesbezüglich initiale Topologie $T_{X,\,\text{initial},\,(f_1,f_2)}$ auf X.

(1) Seien $f_1 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ und $f_2 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{smallmatrix}\right)$.

(2) Seien $f_1 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \end{smallmatrix}\right)$ und $f_2 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.

Aufgabe 29 (§3.3.2) Seien X, (Y_1, T_{Y_1}) und (Y_2, T_{Y_2}) wie in Aufgabe 28.
Seien $f_1 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{smallmatrix}\right) : Y_1 \longrightarrow X$ und $f_2 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{smallmatrix}\right) : Y_2 \longrightarrow X$.
Bestimme die diesbezüglich finale Topologie $T_{X,\,\text{final},\,(f_1,f_2)}$ auf X.

Aufgabe 30 (§3.3.1) Seien X und Y Mengen. Sei (Z, T_Z) ein topologischer Raum.
Seien $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ Abbildungen.
Sei T_Y die initiale Topologie auf Y bezüglich g und (Z, T_Z).
Sei T_X die initiale Topologie auf X bezüglich f und (Y, T_Y).
Sei T'_X die initiale Topologie auf X bezüglich $g \circ f$ und (Z, T_Z).
Zeige, daß $T_X = T'_X$.

Aufgabe 31 (§3.3.2) Sei auf $\mathbf{R}$ die Äquivalenzrelation $(\sim)$ dadurch erklärt, daß $x \sim y$ falls $x - y \in \mathbf{Z}$, wobei $x,\, y \,\in\, \mathbf{R}$. Dies liefert den topologischen Raum $\mathbf{R}/(\sim)$, ausgestattet mit der finalen Topologie bezüglich $\mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}/(\sim)$, $x \longmapsto [x]_\sim$.

Sei $\mathrm{S}^1 := \{\binom{x}{y} \in \mathbf{R}^2 \;:\; x^2 + y^2 = 1\}$ die 1-*Sphäre*, eine Kreislinie, ausgestattet mit der Spurtopologie bzgl. $\mathrm{S}^1 \subseteq \mathbf{R}^2$.

Zeige, daß $\mathbf{R}/(\sim)$ zu S^1 homöomorph ist.

Hierzu dürfen aus der Analysis bekannte Eigenschaften der Funktionen $\sin x$ und $\cos x$ ohne Beweis verwandt werden.

Aufgabe 32 (§3.1, §3.2, §1.2.2) Sei (X, T_X) ein topologischer Raum. Sei $Y \subseteq X$.

(1) Ist S eine Subbasis von X, so ist $\{U \cap Y \;:\; U \in S\}$ eine Subbasis von Y.

(2) Ist B eine Basis von X, so ist $\{U \cap Y \;:\; U \in B\}$ eine Basis von Y.

Aufgabe 33 (§3.4) Sei $n \geqslant 0$. Zeige, daß die Bijektion

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{R}^n & \xrightarrow{\varphi} & \mathbf{R}^{\times n} \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} & \longmapsto & (x_1, \ldots, x_n) \end{array}$$

ein Homöomorphismus ist.

Aufgabe 34 (§3.4, §1.3.2, §1.3.4, Aufgabe 20)

(1) Sei (X, d) ein metrischer Raum. Seien $x_1,\, x_2,\, x_3,\, x_4 \,\in\, X$. Zeige, daß

$$-d(x_1, x_2) + d(x_2, x_3) - d(x_3, x_4) \;\leqslant\; d(x_1, x_4) \;\leqslant\; d(x_1, x_2) + d(x_2, x_3) + d(x_3, x_4)\ .$$

(2) Sei (X, d) ein metrischer Raum. Zeige, daß $d : X \times X \longrightarrow \mathbf{R}_{\geqslant 0}$ stetig ist.
(Hinweis: (1).)

(3) Sei (X, d) ein metrischer Raum. Sei $\emptyset \neq Y \subseteq X$. Sei $d_Y(x) := \inf_{y \in Y} d(x, y)$ für $x \in X$. Zeige, daß $d_Y : X \longrightarrow \mathbf{R}_{\geqslant 0}$, $x \longmapsto d_Y(x)$ stetig ist.
(Hinweis: Zeige $d_Y(x) - d(\xi, x) \leqslant d_Y(\xi) \leqslant d_Y(x) + d(\xi, x)$.)

(4) Sei $(V, \langle -, = \rangle)$ ein euklidscher Raum. Zeige, daß $\langle -, = \rangle \;:\; V \times V \longrightarrow \mathbf{R}$, $(x, y) \longmapsto \langle x, y \rangle$ stetig ist.

(5) Zeige, daß $\mathbf{R} \times \mathbf{R} \xrightarrow{(+)} \mathbf{R}$, $(x, y) \longmapsto x + y$ und $\mathbf{R} \times \mathbf{R} \xrightarrow{(\cdot)} \mathbf{R}$, $(x, y) \longmapsto x \cdot y$ stetige Abbildungen sind. Folgere hiermit erneut die Aussage von Aufgabe 20.
(Hinweis: $X \longrightarrow \mathbf{R} \times \mathbf{R} \xrightarrow{(+)} \mathbf{R}$.)

Aufgabe 35 (§3.4, §1.2.2)

(1) Seien X, Y, Z topologische Räume. Zeige, daß $(X \times Y) \times Z \simeq X \times Y \times Z$ und $X \times Y \simeq Y \times X$.

(2) Sei $k \geqslant 1$. Sei X_i ein topologischer Raum und sei $X_i' \subseteq X_i$ für $1 \leqslant i \leqslant k$. Zeige, daß auf $\prod_{i=1}^k X_i'$ die Produkttopologie der Spurtopologien mit der Spurtopologie bzgl. $\prod_{i=1}^k X_i' \subseteq \prod_{i=1}^k X_i$ übereinstimmt.

Aufgabe 36 (§4.1.1, §3.4) Seien X und Y Hausdorffräume.

(1) Sei $x \in X$. Zeige, daß $\{x\} \overset{\text{abg.}}{\subseteq} X$.

(2) Zeige, daß $X \times Y$ hausdorffsch ist.

(3) Sei X endlich. Zeige, daß X die diskrete Topologie trägt.

Aufgabe 37 (§4.1.1, §4.2.1) Seien X und Y topologische Räume.

Sei $X \xrightarrow[\sim]{f} Y$ ein Homöomorphismus.

(1) Zeige, daß X genau dann hausdorffsch ist, wenn Y hausdorffsch ist.

(2) Zeige, daß X genau dann kompakt ist, wenn Y kompakt ist.
(Hinweis: Lemma (3) aus §4.2.1.)

Aufgabe 38 (§4.1.1) Sei X ein topologischer Raum. Seien $U, V \overset{\text{off.}}{\subseteq} X$. Seien U und V hausdorffsch. Zeige oder widerlege, daß $U \cup V$ hausdorffsch ist.

Aufgabe 39 (§4.2.1) Sei X ein topologischer Raum.

Sei $k \geqslant 1$. Sei $Y_j \subseteq X$ kompakt für $1 \leqslant j \leqslant k$. Sei $X = \bigcup_{j=1}^k Y_j$.

Zeige, daß X kompakt ist.

Aufgabe 40 (§4.1.2, §3.2, Aufgabe 27) Sei (X, d) ein metrischer Raum.

Sei $D \subseteq X$ eine abzählbare dichte Teilmenge. Zeige, daß X eine abzählbare Basis besitzt.
(Hinweis: Vgl. Beispiel (4) aus §3.2 und Aufgabe 27.(5).)

Aufgabe 41 (§3.4, §1.4) Seien X und Y topologische Räume.

Sei $A \subseteq X$ und $B \subseteq Y$. Zeige, daß $(A \times B)^\circ = A^\circ \times B^\circ$.

Aufgabe 42 (§4.2.5)

(1) Sei X ein topologischer Raum. Sei $Y \overset{\text{abg.}}{\subseteq} X$. Sei $(y_n)_n$ eine Folge in Y. Sei $x \in X$ ein Häufungspunkt der Folge $(y_n)_n$, gesehen als Folge in X. Zeige, daß $x \in Y$.

(2) Sei X ein metrischer Raum. Sei $Y \subseteq X$. Sei $x \in X$. Es ist $x \in \bar{Y}$ genau dann, wenn es eine Folge $(y_n)_n$ in Y gibt, die, gesehen als Folge in X, gegen x konvergiert.

(3) Sei X ein folgenkompakter topologischer Raum. Sei $f \in \mathrm{C}(X)$. Zeige, daß es ein $\hat{x} \in X$ gibt mit $f(x) \leqslant f(\hat{x})$ für alle $x \in X$. In anderen Worten, zeige, daß f auf X ein Maximum annimmt.

(4) Sei X ein metrischer Raum. Sei $K \subseteq U \overset{\text{off.}}{\subseteq} X$, und sei K folgenkompakt. Zeige, daß es ein $\varepsilon \in \mathbf{R}_{>0}$ so gibt, daß $d(k, x) \geqslant \varepsilon$ für alle $k \in K$ und alle $x \in X \smallsetminus U$.

Aufgabe 43 (§4.2.4) Zeige oder widerlege.

(1) Sei X ein topologischer Raum. Sei $x \in X$. Sei $(x_n)_n$ die konstante Folge in X mit $x_n = x$ für alle $n \in \mathbf{Z}_{\geqslant 1}$. Dann ist x ein Konvergenzpunkt von $(x_n)_n$.

(2) Sei X ein topologischer Raum. Sei $(x_n)_n$ eine Folge in X mit Konvergenzpunkten x und x'. Dann ist $x = x'$.

(3) Sei X ein metrischer Raum. Sei $(x_n)_n$ eine Folge in X, für welche für alle $\varepsilon \in \mathbf{R}_{>0}$ ein $m \in \mathbf{Z}_{\geqslant 1}$ existiert mit $d(x_n, x_{n'}) < \varepsilon$ für $n,\, n' \in \mathbf{Z}_{\geqslant m}$. Dann konvergiert $(x_n)_n$.

Aufgabe 44 (§4.2.5, §3.4)

(1) Seien X und Y topologische Räume. Sei $(x_n)_n$ eine Folge in X mit Konvergenzpunkt $x \in X$. Sei $(y_n)_n$ eine Folge in Y mit Konvergenzpunkt $y \in Y$. Zeige, daß die Folge $\big((x_n, y_n)\big)_n$ in $X \times Y$ den Konvergenzpunkt (x, y) hat.

(2) Sei X ein folgenkompakter topologischer Raum. Sei Y ein metrischer Raum. Sei Z ein metrischer Raum. Sei $f : X \times Y \longrightarrow Z$, $(x, y) \longmapsto f(x, y)$ eine stetige Abbildung. Sei $y_0 \in Y$.

Zeige, daß es für alle $\varepsilon \in \mathbf{R}_{>0}$ ein $\delta \in \mathbf{R}_{>0}$ gibt mit $|f(x, y) - f(x, y_0)| < \varepsilon$ für alle $y \in \mathrm{B}_\delta(y_0)$ und alle $x \in X$.

Aufgabe 45 (§4.2.1, §4.3.1) Zeige oder widerlege.

Sei X ein endlicher topologischer Raum.

(1) Es ist X zusammenhängend.

(2) Es ist X kompakt.

Aufgabe 46 (§4.2.6, §4.3.1, §4.3.3)
Sei $X := \{\binom{x_1}{x_2} \in \mathbf{R}^2 \;:\; 0 \leqslant x_1 \leqslant 1 \text{ und } |x_2| \leqslant x_1\}$.

(1) Skizziere X.

(2) Zeige, daß X zusammenhängend ist.

(3) Zeige, daß X kompakt ist.

Aufgabe 47 (§5.2, §1.3.3, §3.4, §4.2.7) Sei X ein kompakter topologischer Raum. Wir erinnern daran, daß $\mathrm{C}(X)$ ein normierter Raum ist; cf. Bemerkung in §5.2.

(1) Seien $u,\, v \in \mathrm{C}(X)$. Zeige, daß $\|u \cdot v\| \leqslant \|u\| \cdot \|v\|$.

(2) Sei $(V, \| - \|)$ ein normierter Raum. Zeige, daß die Abbildung $V \times V \xrightarrow{(+)} V$, $(x,y) \longmapsto x + y$ stetig ist. Folgere, daß die Abbildung $\mathrm{C}(X) \times \mathrm{C}(X) \longrightarrow \mathrm{C}(X)$, $(f,g) \longmapsto f + g$ stetig ist.

(3) Zeige, daß die Abbildung $\mathrm{C}(X) \times \mathrm{C}(X) \xrightarrow{(\cdot)} \mathrm{C}(X)$, $(f,g) \longmapsto f \cdot g$ stetig ist.

(4) Sei $\lambda \in \mathbf{R}$. Sei $(V, \| - \|)$ ein normierter Raum. Zeige, daß die Abbildung $V \xrightarrow{\lambda(-)} V$, $x \longmapsto \lambda x$ stetig ist. Folgere, daß die Abbildung $\mathrm{C}(X) \longrightarrow \mathrm{C}(X)$, $f \longmapsto \lambda f$ stetig ist.

(5) Sei $(f_n)_n$ eine Folge in $\mathrm{C}(X)$, die gegen $f \in \mathrm{C}(X)$ konvergiert. Sei $(g_n)_n$ eine Folge in $\mathrm{C}(X)$, die gegen $g \in \mathrm{C}(X)$ konvergiert. Sei $\lambda \in \mathbf{R}$. Zeige, daß $(f_n + g_n)_n$ gegen $f + g$ konvergiert, daß $(f_n \cdot g_n)_n$ gegen $f \cdot g$ konvergiert und daß $(\lambda f_n)_n$ gegen λf konvergiert.

Aufgabe 48 (§4.3.1, §4.3.3, §3.4, §2.3.3) Seien X und Y topologische Räume. Zeige.

(1) Sind X und Y zusammenhängend, so auch $X \times Y$. (Hinweis: i_y und j_x aus §3.4.)

(2) Sind X und Y wegzusammenhängend, so auch $X \times Y$.

B.2 Lösungen

Aufgabe 1

(1) Es ist

$$\mathrm{Pot}(\{1,2,3\}) \;=\; \{\emptyset,\, \{1\},\, \{2\},\, \{3\},\, \{1,2\},\, \{1,3\},\, \{2,3\},\, \{1,2,3\},\, \}\,.$$

(2) Für $Y \subseteq X$ sei die charakteristische Funktion

$$\begin{array}{rcl} X & \xrightarrow{\chi_Y} & \{0,1\} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 0 & \text{falls } x \notin Y \\ 1 & \text{falls } x \in Y \end{cases} \end{array}$$

definiert. Setze

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Abb}(X,\{0,1\}) & \longleftrightarrow & \mathrm{Pot}(X) \\ f & \longmapsto & f^{-1}(\{1\}) \\ \chi_Y & \longleftarrow\!\shortmid & Y \end{array}$$

Wir *behaupten,* daß sich diese beiden Abbildungen gegenseitig invertieren.

Sei $f \in \mathrm{Abb}(X,\{0,1\})$. Wir haben $f \stackrel{!}{=} \chi_{f^{-1}(\{1\})}$ zu zeigen. Sei $x \in X$.
Ist $f(x) = 0$, so ist $x \notin f^{-1}(\{1\})$, und also auch $\chi_{f^{-1}(\{1\})}(x) = 0$.
Ist $f(x) = 1$, so ist $x \in f^{-1}(\{1\})$, und also auch $\chi_{f^{-1}(\{1\})}(x) = 1$.
In beiden Fällen ist also $f(x) = \chi_{f^{-1}(\{1\})}(x)$. Es folgt $f = \chi_{f^{-1}(\{1\})}$.

Sei $Y \subseteq X$. Wir haben $Y \stackrel{!}{=} \chi_Y^{-1}(\{1\})$ zu zeigen. Nun ist aber

$$\chi_Y^{-1}(\{1\}) \;=\; \{x \in X \;:\; \chi_Y(x) = 1\} \;=\; Y$$

nach Definition von Y.
Dies zeigt die *Behauptung,* und damit insbesondere die Bijektivität der ersten Abbildung.

(3) Dem Hinweis folgend, *nehmen wir an,* es gebe eine Surjektion $X \xrightarrow{f} \mathrm{Pot}(X)$. Sei

$$Y \;:=\; \{x \in X \;:\; x \notin f(x)\}\,.$$

Da f surjektiv ist, gibt es ein $y \in X$ mit $f(y) = U$.
Falls $y \in Y$, ist $y \notin f(y) = Y$.
Falls $y \notin Y$, ist nicht $y \notin f(y)$, also $y \in f(y) = Y$.
In beiden Fällen landen wir bei einem *Widerspruch.* Also kann es keine solche Surjektion geben.

Aufgabe 2 (Sierpinski-Raum)

Wir *behaupten,* daß $T := \{\emptyset,\, \{1\},\, \{1,2\}\}$ eine Topologie auf $\{1,2\}$ ist.

1. Beweis. Am einfachsten geht der Nachweis mit einer geeigneten Prämetrik, vgl. §1.3.1.

Setze $d(1,1) := 0$, $d(2,2) := 0$, $d(1,2) := 0$ und $d(2,1) := 1$. Wir betrachten $T^{(\{1,2\},d)}$.

Diesbezüglich wird $\mathrm{B}_\varepsilon(2) = \{y \in \{1,2\} \;:\; d(y,2) < \varepsilon\} = \{1,2\}$ für alle $\varepsilon \in \mathbf{R}_{>0}$. Insbesondere ist $\{2\} \notin T^{(\{1,2\},d)}$, da $\mathrm{B}_\varepsilon(2) \not\subseteq \{2\}$ für alle $\varepsilon \in \mathbf{R}_{>0}$.

Ferner wird $\mathrm{B}_1(1) = \{y \in \{1,2\} \;:\; d(y,1) < \varepsilon\} = \{1\}$. Insbesondere ist $\{1\} \in T^{(\{1,2\},d)}$, da $\mathrm{B}_1(1) \subseteq \{1\}$.

Somit ist $T = T^{(\{1,2\},d)}$, und letzteres ist bekanntermaßen eine Topologie. Dies zeigt die *Behauptung.*

2. Beweis. Möchte man direkt argumentieren, so beobachte man, daß T bezüglich Inklusion zu einer Kette geordnet ist, also

$$\emptyset \;\subseteq\; \{1\} \;\subseteq\; \{1,2\}\,.$$

Es folgt, daß die beliebige Vereinigung von Elementen aus T wieder in T liegt, denn diese Vereinigung ist das maximale Kettenglied ihrer Teilnehmer. Dies zeigt (Top 2).

Genauso folgt, daß der beliebige Schnitt von Elementen aus T wieder in T liegt, denn dieser Schnitt ist das minimale Kettenglied ihrer Teilnehmer. Von dieser Aussage brauchen wir allerdings nur, daß der Schnitt zweier Elemente von T wieder in T liegt, haben also etwas mehr gezeigt als für (Top 3) benötigt.

Ferner sind $\emptyset$ und $\{1,2\}$ in der Tat in T enthalten. Dies zeigt (Top 1).

Insgesamt zeigt dies die *Behauptung* abermals.

Es ist T auch weder gleich $T_{\text{diskret}} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$ noch gleich $T_{\text{verklumpt}} = \{\emptyset, \{1,2\}\}$, wie verlangt.

Der topologische Raum $(\{1,2\}, T)$ heißt auch *Sierpinski*-Raum.

Er dient hauptsächlich als Lieferant von Gegenbeispielen.

Aufgabe 3

Sei X eine Menge.

(1) Die Aussage ist falsch. Sei etwa $X = \mathbf{Z}$. Sei $I = \mathbf{Z}_{\geqslant 0}$. Sei $U_i = \{i\} \in T$. Es ist

$$\bigcup_{i\in I} U_i \;=\; \bigcup_{i\in \mathbf{Z}_{\geqslant 0}} \{i\} \;=\; \mathbf{Z}_{\geqslant 0} \;\not\in\; T\;,$$

da $\mathbf{Z}_{\geqslant 0}$ weder eine endliche Teilmenge von $\mathbf{Z}$ noch gleich $\mathbf{Z}$ selbst ist.

(2) Die Aussage ist richtig.

Zu (Top 1). Es ist $\emptyset \in T$. Es ist $X = X \setminus \emptyset \in T$, da $\emptyset$ eine endliche Menge ist.

Zu (Top 2). Sei I eine Indexmenge. Seien $U_i \in T$ für $i \in I$. Wir wollen zeigen, daß $\bigcup_{i\in I} U_i \overset{!}{\in} T$. Ohne Einschränkung ist $U_i \neq \emptyset$ für alle $i \in I$. Ohne Einschränkung ist $I \neq \emptyset$. Schreibe $U_i = X \setminus M_i$ mit $M_i \subseteq X$ endlich. Es wird

$$\bigcup_{i\in I} U_i \;=\; \bigcup_{i\in I}(X \setminus M_i) \;=\; X \setminus (\bigcap_{i\in I} M_i) \;\in\; T\;,$$

da $\bigcap_{i\in I} M_i$ eine endliche Menge ist.

Zu (Top 3). Seien $U, V \in T$. Wir wollen zeigen, daß $U \cap V \overset{!}{\in} T$. Ohne Einschränkung ist $U \neq \emptyset$ und $V \neq \emptyset$. Schreibe $U = X \setminus M$ und $V = X \setminus N$ mit endlichen Teilmengen $M, N \subseteq X$. Es wird

$$U \cap V \;=\; (X \setminus M) \cap (X \setminus N) \;=\; X \setminus (M \cup N) \;\in\; T\;,$$

da $M \cup N$ eine endliche Menge ist.

Aufgabe 4

(1) Die Aussage ist falsch. Sei $X := \mathbf{R}$, mit der Topologie aus §1.2.1. Sei $Y = [0,1) \subseteq \mathbf{R}$.

Es ist Y nicht offen. Denn obwohl $0 \in Y$, ist $\mathrm{B}_\varepsilon(0) \not\subseteq Y$ für alle $\varepsilon > 0$. In der Tat ist $-\varepsilon/2 \in \mathrm{B}_\varepsilon(0) \setminus Y$.

Es ist Y nicht abgeschlossen, i.e. $X \setminus Y$ nicht offen. Denn obwohl $1 \in X \setminus Y$, ist $\mathrm{B}_\varepsilon(1) \not\subseteq X \setminus Y$ für alle $\varepsilon > 0$. In der Tat ist $\max\{1 - \varepsilon/2,\, 1/2\} \in \mathrm{B}_\varepsilon(1) \setminus (X \setminus Y)$.

(2) Die Aussage ist falsch. Sei etwa $X = \mathbf{R}$, sei $I = \mathbf{Z}_{\geqslant 1}$ und sei $U_i = (-1/i, 1/i)$ für $i \in \mathbf{Z}_{\geqslant 1}$, was nach Bemerkung (3) in §1.2.1 eine offene Teilmenge in $\mathbf{R}$ ist. Es ist $\bigcap_{i\in I} U_i = \bigcap_{i\in \mathbf{Z}_{\geqslant 1}} (-1/i, 1/i) = \{0\}$ nicht offen, da $(0-\varepsilon, 0+\varepsilon)$ für kein $\varepsilon > 0$ eine Teilmenge von $\{0\}$ ist.

Als ein weiteres Gegenbeispiel kann man die in Aufgabe 3.(2) eingeführte Topologie im Falle $X = \mathbf{Z}$ heranziehen. Sei $I = \mathbf{Z}_{\geqslant 1}$. Sei $U_i = \mathbf{Z} \setminus \{i\}$. Da $\{i\}$ endlich ist, ist $U_i \overset{\text{off.}}{\subseteq} \mathbf{Z}$. Dahingegen ist

$$\bigcap_{i\in I} U_i \;=\; \bigcap_{i\in \mathbf{Z}_{\geqslant 1}} (\mathbf{Z} \setminus \{i\}) \;=\; \mathbf{Z} \setminus (\bigcup_{i\in \mathbf{Z}_{\geqslant 1}} \{i\}) \;=\; \mathbf{Z}_{\leqslant 0}$$

nicht offen, da $\mathbf{Z} \setminus \mathbf{Z}_{\leqslant 0} = \mathbf{Z}_{\geqslant 1}$ keine endliche Menge ist.

(3) Die Aussage ist richtig. Wir zeigen sie durch Induktion nach k. Für $k = 1$ trifft die Aussage zu. Sei $k \geqslant 2$ und sei die Aussage für $k-1$ vorausgesetzt. Wir haben sie für k zu zeigen. Es wird

$$\bigcap_{i=1}^{k} U_i \;=\; (\bigcap_{i=1}^{k-1} U_i) \cap U_k \;.$$

Da nach Induktionsvoraussetzung $\bigcap_{i=1}^{k-1} U_i \overset{\text{off.}}{\subseteq} X$ und nach Voraussetzung $U_k \overset{\text{off.}}{\subseteq} X$, ist mit (Top 3) auch der Schnitt dieser beiden Teilmengen eine offene Teilmenge von X.

(4) Die Aussage ist falsch. Da die Aussage (2) im allgemeinen falsch ist, können wir X, I und $U_i \overset{\text{off.}}{\subseteq} X$ so wählen, daß $\bigcap_{i \in I} U_i$ keine offene Teilmenge in X ist. Dann aber wird mit $A_i := X \smallsetminus U_i \overset{\text{abg.}}{\subseteq} X$ auch

$$\bigcup_{i \in I} A_i \;=\; \bigcup_{i \in I} (X \smallsetminus U_i) \;=\; X \smallsetminus (\bigcap_{i \in I} U_i)$$

keine abgeschlossene Teilmenge von X mehr.

(5) Die Aussage ist richtig. Denn mit der richtigen Aussage (3) folgt, daß

$$X \smallsetminus (\bigcup_{i=1}^{k} A_i) \;=\; \bigcap_{i=1}^{k} (X \smallsetminus A_i) \;\overset{\text{off.}}{\subseteq}\; X \;.$$

Aufgabe 5

(1) Es ist $U_i := X \smallsetminus A_i \overset{\text{off.}}{\subseteq} X$ für $i \in I$. Mit (Top 2) ist $\bigcup_{i \in I} U_i \overset{\text{off.}}{\subseteq} X$, und also

$$\bigcap_{i \in I} A_i \;=\; \bigcap_{i \in I} (X \smallsetminus U_i) \;=\; X \smallsetminus \big(\bigcup_{i \in I} U_i\big) \;\overset{\text{abg.}}{\subseteq}\; X \;.$$

(2) Ist $Z \overset{\text{abg.}}{\subseteq} Y$, so ist $Y \smallsetminus Z \overset{\text{off.}}{\subseteq} Y$. Also gibt es nach Definition der Spurtopologie in §1.2.2 ein $U' \subseteq X$ mit $Y \smallsetminus Z = Y \cap U'$. Setze $Z' := X \smallsetminus U' \overset{\text{abg.}}{\subseteq} X$. Es wird

$$Y \cap Z' \;=\; Y \cap (X \smallsetminus U') \;=\; Y \smallsetminus (Y \cap U') \;=\; Y \smallsetminus (Y \smallsetminus Z) \;=\; Z \;.$$

Sei umgekehrt $Z = Z' \cap Y$ für ein $Z' \overset{\text{abg.}}{\subseteq} X$. Dann ist $X \smallsetminus Z' \overset{\text{off.}}{\subseteq} X$, also

$$Y \smallsetminus Z \;=\; Y \smallsetminus (Z' \cap Y) \;=\; Y \cap (X \smallsetminus Z') \;\overset{\text{off.}}{\subseteq}\; Y \;,$$

und somit $Z \overset{\text{abg.}}{\subseteq} Y$.

Aufgabe 6

(1) Die Aussage ist falsch. Sei etwa $X = \mathbf{R}$, $Y = \{0\}$ und $Z = Y$. Dann ist

$$Z \;=\; \{0\} \;\overset{\text{off.}}{\subseteq}\; \{0\} \;=\; Y \;,$$

da die volle Teilmenge stets eine offene Teilmenge ist, aber

$$Z \;=\; \{0\} \;\overset{\text{nicht off.}}{\subseteq}\; \mathbf{R} \;=\; X \;,$$

da es für $0 \in \{0\}$ kein $\varepsilon \in \mathbf{R}_{>0}$ mit $(0 - \varepsilon,\, 0 + \varepsilon) \subseteq \{0\}$ gibt.

(2) Die Aussage ist richtig. Wir haben hierzu zu zeigen, daß aus $U \overset{\text{off.}}{\subseteq} Y \overset{\text{off.}}{\subseteq} X$ folgt, daß $U \overset{\text{off.!}}{\subseteq} X$.

Da $U \overset{\text{off.}}{\subseteq} Y$, gibt es nach Definition der Spurtopologie in §1.2.2 ein $U' \overset{\text{off.}}{\subseteq} X$ mit $U = Y \cap U'$. Da $Y \overset{\text{off.}}{\subseteq} X$ und $U' \overset{\text{off.}}{\subseteq} X$, ist auch $U = Y \cap U' \overset{\text{off.}}{\subseteq} X$ dank (Top 3).

(3) Die Aussage ist richtig. Wir haben hierzu zu zeigen, daß aus $A \overset{\text{abg.}}{\subseteq} Y \overset{\text{abg.}}{\subseteq} X$ folgt, daß $A \overset{\text{abg.!}}{\subseteq} X$.

Da $A \overset{\text{abg.}}{\subseteq} Y$, gibt es ein $A' \overset{\text{abg.}}{\subseteq} X$ mit $A = A' \cap Y$; cf. Aufgabe 5.(2). Da $A' \overset{\text{abg.}}{\subseteq} X$ und $Y \overset{\text{abg.}}{\subseteq} X$, folgt mit Aufgabe 5.(1), daß $A = A' \cap Y \overset{\text{abg.}}{\subseteq} X$.

Aufgabe 7

(1) Wir haben die Axiome (Met 1, 2, 3) zu verifizieren.

Zu (Met 1). Für $y,\, y' \in Y$ ist $d|_{Y\times Y}(y,y') = d(y,y')$ in der Tat genau dann gleich 0, wenn $y = y'$, wie aus (Met 1) für X folgt.

Zu (Met 2). Für $y,\, y' \in Y$ ist $d|_{Y\times Y}(y,y') = d(y,y') = d(y',y) = d|_{Y\times Y}(y',y)$, wie aus (Met 2) für X folgt.

Zu (Met 3). Für $y,\, y',\, y'' \in Y$ ist

$$d|_{Y\times Y}(y,y') + d|_{Y\times Y}(y',y'') \;=\; d(y,y') + d(y',y'') \;\geqslant\; d(y,y'') \;=\; d|_{Y\times Y}(y,y'')\ ,$$

wie aus (Met 3) für X folgt.

Kurz, die in (Met 1, 2, 3) für $d|_{Y\times Y}(y,y')$ verlangten Eigenschaften vererben sich aus denjenigen für d.

(2) Beachte zunächst, daß für $y \in Y$ und $\varepsilon \in \mathbf{R}_{>0}$

$$\mathrm{B}_\varepsilon^{(Y,d|_{Y\times Y})}(y) \;=\; \{y' \in Y \;:\; d|_{Y\times Y}(y',y) < \varepsilon\} \;=\; \{y' \in Y \;:\; d(y',y) < \varepsilon\} \;=\; \mathrm{B}_\varepsilon^{(X,d)}(y) \cap Y\ .$$

Bezüglich $T^{(Y,\,d|_{Y\times Y})}$ ist eine Teilmenge $Z \subseteq Y$ also genau dann offen, wenn es für jedes $z \in Z$ ein $\varepsilon \in \mathbf{R}_{>0}$ gibt mit $\mathrm{B}_\varepsilon^{(X,d)}(z) \cap Y \subseteq Z$.

Bezüglich der Spurtopologie ist eine Teilmenge $Z \subseteq Y$ dagegen genau dann offen, wenn es ein $U \overset{\text{off.}}{\subseteq} X$ mit $Z = Y \cap U$ gibt.

Sei $Z \subseteq Y$ bezüglich der Spurtopologie offen. Gebe es also ein $U \overset{\text{off.}}{\subseteq} X$ mit $Z = Y \cap U$. Sei $z \in Z$. Sei $\varepsilon \in \mathbf{R}_{>0}$ so, daß $\mathrm{B}_\varepsilon^{(X,d)}(z) \subseteq U$. Dann ist

$$\mathrm{B}_\varepsilon^{(X,d)}(z) \cap Y \;\subseteq\; U \cap Y \;=\; Z\ .$$

Also ist $Z \subseteq Y$ bezüglich $T^{(Y,\,d|_{Y\times Y})}$ offen.

Sei $Z \subseteq Y$ bezüglich $T^{(Y,\,d|_{Y\times Y})}$ offen. Gebe es also für jedes $z \in Z$ ein $\varepsilon_z \in \mathbf{R}_{>0}$ mit $\mathrm{B}_{\varepsilon_z}^{(X,d)}(z) \cap Y \subseteq Z$. Sei

$$U \;:=\; \textstyle\bigcup_{z\in Z} \mathrm{B}_{\varepsilon_z}^{(X,d)}(z)\ .$$

Mit dem Lemma aus §1.3.2 ist $\mathrm{B}_{\varepsilon_z}^{(X,d)}(z) \overset{\text{off.}}{\subseteq} X$. Dank (Top 3) ist also $U \overset{\text{off.}}{\subseteq} X$. Folglich genügt es zu zeigen, daß $Z \overset{!}{=} Y \cap U$.

Ist $z \in Z$, so ist $z \in Z \subseteq Y$ und $z \in \mathrm{B}_{\varepsilon_z}^{(X,d)}(z) \subseteq U$, also $z \in Y \cap U$. Somit ist $Z \subseteq Y \cap U$.

Andererseits ist

$$Y \cap U \;=\; Y \cap \textstyle\bigcup_{z\in Z} \mathrm{B}_{\varepsilon_z}^{(X,d)}(z) \;=\; \textstyle\bigcup_{z\in Z} (\mathrm{B}_{\varepsilon_z}^{(X,d)}(z) \cap Y) \;\subseteq\; Z$$

nach Wahl der ε_z .

Insgesamt ist also in der Tat $Z = Y \cap U$.

Aufgabe 8

Wir haben für $T^{(X,d)} = T_{X,\,\text{verklumpt}}$ zu zeigen, daß weder $\{1\}$ noch $\{2\}$ offene Teilmengen von X sind. Mit Ausnutzung von Symmetrie genügt es zu zeigen, daß $\{2\}$ keine offene Teilmenge von X ist.

Für $\varepsilon \in \mathbf{R}_{>0}$ ist $\mathrm{B}_\varepsilon(2) = \{1\}$, falls $\varepsilon \leqslant 1$, und $\mathrm{B}_\varepsilon(2) = \{1, 2\}$, falls $\varepsilon > 1$. Für kein $\varepsilon \in \mathbf{R}_{>0}$ ist also $\mathrm{B}_\varepsilon(2) \subseteq \{2\}$. Somit ist $\{2\}$ keine offene Teilmenge von X.

Nun ist $\mathrm{B}_1(1) = \{2\}$. Wie schon festgestellt, ist dies keine offene Teilmenge von X.

Aufgabe 9

Wir haben zu zeigen, daß $X \smallsetminus \bar{\mathrm{B}}_\varepsilon(x) \overset{\text{off.}}{\subseteq} X$. Sei $y \in X \smallsetminus \bar{\mathrm{B}}_\varepsilon(x)$, d.h. sei $d(y, x) > \varepsilon$.

Sei $\eta := d(y, x) - \varepsilon$. Wir behaupten, daß $\mathrm{B}_\eta(y) \overset{!}{\subseteq} X \smallsetminus \bar{\mathrm{B}}_\varepsilon(x)$.

Sei $z \in \mathrm{B}_\eta(y)$, i.e. $d(z, y) < \eta$. Wir müssen zeigen, daß $z \in X \smallsetminus \bar{\mathrm{B}}_\varepsilon(x)$, i.e. daß $d(z, x) > \varepsilon$. In der Tat wird mit (Met 3)

$$d(x, z) + d(z, y) \;\geqslant\; d(x, y)\;,$$

und also

$$d(z, x) \;\geqslant\; d(x, y) - d(z, y) \;>\; d(x, y) - \eta \;=\; d(x, y) - (d(y, x) - \varepsilon) \;=\; \varepsilon\;.$$

Vgl. auch das Lemma in §1.3.2.

Aufgabe 10

Das Lemma von Cauchy-Schwarz aus §1.3.4 liefert bezüglich des Standardskalarprodukts $\langle x, y\rangle := x^{\mathrm{t}} y$ für $x,\, y \in \mathbf{R}^3$, daß

$$\left(\begin{pmatrix} a & b & c\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)^2 \;\leqslant\; \left(\begin{pmatrix} a & b & c\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}\right)\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)\;,$$

also daß

$$(a+b+c)^2 \;\leqslant\; 3(a^2+b^2+c^2)\;,$$

was wiederum zu

$$2ab + 2ac + 2bc \;\leqslant\; 2(a^2+b^2+c^2)$$

und also zu

$$ab + ac + bc \;\leqslant\; a^2+b^2+c^2$$

äquivalent ist.

In der ersten, und damit auch in jeder weiteren dieser Ungleichungen gilt nach der Zusatzaussage im Lemma von Cauchy-Schwarz Gleichheit genau dann, wenn $\left(\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)$ linear abhängig ist, i.e. wenn $a = b = c$.

Aufgabe 11

(1) Beachte, daß $\beta^{-1}\|x\|' \leqslant \|x\| \leqslant \alpha^{-1}\|x\|'$ für $x \in V$. Die Situation ist also symmetrisch in $\|-\|$ und $\|-\|'$, so daß es genügt, $T' \overset{!}{\subseteq} T$ zu zeigen.

Sei $U \subseteq V$ eine bezüglich T' offene Teilmenge, i.e. $U \in T'$. Wir haben zu zeigen, daß sie bezüglich T offen ist, i.e. $U \overset{!}{\in} T$. Sei also $x \in U$. Wir müssen ein $\eta \in \mathbf{R}_{>0}$ finden mit $\mathrm{B}_\eta^{(V,d)}(x) \overset{!}{\subseteq} U$.

Da $U \subseteq V$ bezüglich T' offen ist, gibt es ein $\varepsilon \in \mathbf{R}_{>0}$ mit $\mathrm{B}_\varepsilon^{(V,d')}(x) \subseteq U$. Setze $\eta := \varepsilon/\beta \in \mathbf{R}_{>0}$. Es wird

$$\mathrm{B}_\eta^{(V,d)}(x) \;\subseteq\; \mathrm{B}_\varepsilon^{(V,d')}(x)\;,$$

da für $y \in \mathrm{B}_\eta^{(V,d)}(x)$, also für $d(y,x) < \eta$, in der Tat

$$d'(y,x) \;=\; \|y-x\|' \;\leqslant\; \beta\|y-x\| \;=\; \beta\cdot d(y,x) \;<\; \beta\cdot\eta \;=\; \varepsilon\;,$$

und somit $y \in \mathrm{B}_\varepsilon^{(V,d')}(x)$ ist. Also ist insgesamt

$$\mathrm{B}_\eta^{(V,d)}(x) \;\subseteq\; \mathrm{B}_\varepsilon^{(V,d')}(x) \;\subseteq\; U\;,$$

wie verlangt.

(2) Zum einen ist wegen $|x_j| = \sqrt{x_j^2} \leqslant \sqrt{x_1^2+\cdots+x_n^2}$ für $1 \leqslant j \leqslant n$ auch

$$\|x\|_\infty \;=\; \max\{|x_i| \;:\; 1 \leqslant i \leqslant n\} \;\leqslant\; \sqrt{x_1^2+\cdots+x_n^2} \;=\; \|x\|_2\;.$$

für $x = (x_i)_i \in \mathbf{R}^n$.
Zum anderen ist

$$\|x\|_2 \;=\; \sqrt{x_1^2+\cdots+x_n^2} \;\leqslant\; \sqrt{n\cdot\max\{|x_i| \;:\; 1 \leqslant i \leqslant n\}^2} \;=\; \sqrt{n}\cdot\|x\|_\infty$$

für $x \in \mathbf{R}^n$.
Also ist insgesamt, wie in (1) verlangt,

$$1\cdot\|x\|_\infty \;\leqslant\; \|x\|_2 \;\leqslant\; \sqrt{n}\cdot\|x\|_\infty$$

für $x \in \mathbf{R}^n$.

Aufgabe 12

(1) Es ist $U = U \cap Y$ mit $U \overset{\text{off.}}{\subseteq} X$. Nach Definition der Spurtopologie ist also $U \overset{\text{off.}}{\subseteq} Y$.

(2) Es ist $A = A \cap Y$ mit $A \overset{\text{abg.}}{\subseteq} X$. Nach Aufgabe 5.(2) ist also $A \overset{\text{abg.}}{\subseteq} Y$.

Aufgabe 13

(1) Wir überprüfen die Axiome (Nor 1, 2, 3). Davon sind (Nor 1, 2) nahezu evident.
Zu (Nor 1). Sei $x \in \mathbf{R}^n$. Es ist $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i| = 0$ genau dann, wenn $|x_i| = 0$ für alle $1 \leqslant i \leqslant n$, was wiederum genau dann zutrifft, wenn $x = 0$.
Zu (Nor 2). Sei $x \in \mathbf{R}^n$. Sei $\lambda \in \mathbf{R}$. Es wird

$$\|\lambda x\|_1 \;=\; \textstyle\sum_{i=1}^n|\lambda x_i| \;=\; \sum_{i=1}^n|\lambda||x_i| \;=\; |\lambda|\sum_{i=1}^n|x_i| \;=\; |\lambda|\|x\|_1\;.$$

Zu (Nor 3). Seien $x,\, y \in \mathbf{R}^n$. Es wird

$$\|x+y\|_1 \;=\; \textstyle\sum_{i=1}^n|x_i+y_i| \;\leqslant\; \sum_{i=1}^n(|x_i|+|y_i|) \;=\; \|x\|_1+\|y\|_1\;.$$

dank $(*)$ in Beispiel (1) von §1.3.2.

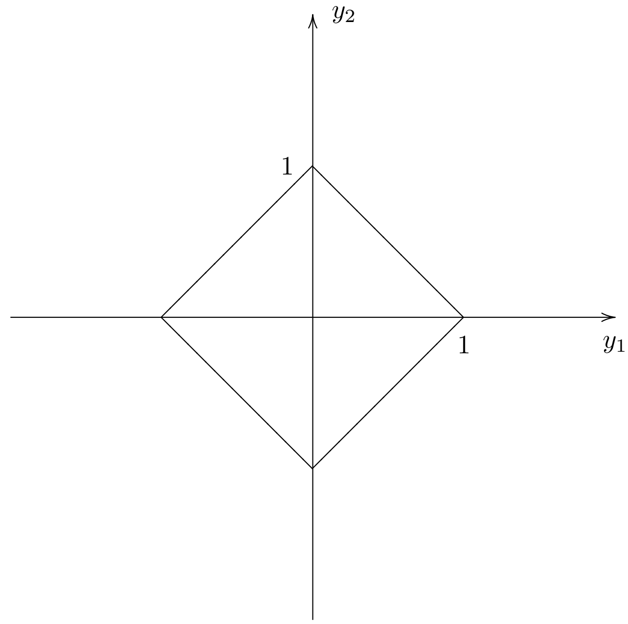
(2) Es ist allgemein

$$\mathrm{B}_\varepsilon^{(1)}(x) \;=\; \{y \in \mathbf{R}^n \;:\; |y_1-x_1|+\cdots+|y_n-x_n| < \varepsilon\}\;,$$

und speziell

$$\mathrm{B}_1^{(1)}(\tbinom{0}{0}) \;=\; \{y \in \mathbf{R}^2 \;:\; |y_1|+|y_2| < 1\}\;.$$

Somit ist $\mathrm{B}_1^{(1)}(\binom{0}{0})$ das Innere des folgenden Quadrats.



(3) Gemäß Aufgabe 11 genügt es, $\alpha,\,\beta\,\in\,\mathbf{R}_{>0}$ mit

$$\alpha\|x\|_1 \;\leqslant\; \|x\|_2 \;\leqslant\; \beta\|x\|_1$$

für $x \in \mathbf{R}^n$ zu finden.
Zum einen wird

$$\|x\|_1^2 \;=\; (\textstyle\sum_{i=1}^n |x_i|)^2 \;\geqslant\; (\sum_{i=1}^n x_i^2) \;=\; \|x\|_2^2\;,$$

und also $\|x\|_2 \leqslant \|x\|_1$, weswegen wir $\beta = 1$ wählen können.
Zum anderen ist $|x_i|^2 \leqslant \sum_{i=1}^n x_i^2$ für $1 \leqslant i \leqslant n$, woraus wir $|x_i| \leqslant \|x\|_2$ und also

$$\|x\|_1 \;=\; \textstyle\sum_{i=1}^n |x_i| \;\leqslant\; \sum_{i=1}^n \|x\|_2 \;=\; n\|x\|_2$$

entnehmen, weswegen wir $\alpha = 1/n$ wählen können.

Der Faktor $\alpha = 1/n$ ist zulässig, aber nicht optimal.

Aufgabe 14

(1) Schreibe $Y := \{2^{-n}\;:\;n \in \mathbf{Z}_{\geqslant 0}\}$.
Wir behaupten, daß

$$\bar{Y} \;\overset{!}{=}\; Y \cup \{0\}\;.$$

Wir verwenden hierzu die Charakterisierung aus Lemma (1) aus §1.4.

Wir zeigen $\subseteq$. Sei $x \in \mathbf{R} \smallsetminus (Y \cup \{0\})$. Wir haben $x \overset{!}{\notin} \bar{Y}$ zu zeigen. Wir unterscheiden drei Fälle.
Falls $x < 0$, so ist $(x - |x|,\, x + |x|) \cap Y = \emptyset$, und also $x \notin \bar{Y}$.
Falls $x > 1$, so ist $(x - (x-1),\, x + (x-1)) \cap Y = \emptyset$, und also $x \notin \bar{Y}$.
Falls $x \in (0,1)$, so sei $n \in \mathbf{Z}_{\geqslant 1}$ mit $2^{-n} < x < 2^{-(n-1)}$. Explizit wird $n := -\lfloor \log_2 x \rfloor$. Sei

$$\varepsilon \;:=\; \min\{x - 2^{-n},\; 2^{-n+1} - x\}\;.$$

Dann ist $(x-\varepsilon,\, x+\varepsilon)\cap Y = \emptyset$, und also $x \notin \bar{Y}$.

Wir zeigen $\supseteq$. Da ohnehin $Y \subseteq \bar{Y}$, genügt es zu zeigen, daß $0 \in \bar{Y}$.

Sei $\varepsilon \in \mathbf{R}_{>0}$. Für $n = -\lfloor \log_2 \varepsilon \rfloor$ ist $2^{-n} \in (0-\varepsilon,\, 0+\varepsilon)$, und also $(0-\varepsilon,\, 0+\varepsilon)\cap Y \neq \emptyset$.

Somit ist in der Tat $0 \in \bar{Y}$.

(2) Schreibe $Y := \{\binom{x}{y} \;:\; x \in [-1,+1],\, y \in (-1,+1)\}$.

Schreibe $Y^- := \{\binom{x}{y} \;:\; x \in [-1,+1],\, y = -1\}$ und $Y^+ := \{\binom{x}{y} \;:\; x \in [-1,+1],\, y = +1\}$

Wir behaupten, daß

$$\bar{Y} \overset{!}{=} Y \cup Y^- \cup Y^+ \;=\; \{\tbinom{x}{y} \;:\; x \in [-1,+1],\, y \in [-1,+1]\}\ .$$

Wir verwenden hierzu die Charakterisierung aus Lemma (1) aus §1.4.

Wir zeigen $\subseteq$. Sei $\binom{x}{y} \in \mathbf{R}^2 \smallsetminus (Y \cup Y^- \cup Y^+)$. Wir haben $x \overset{!}{\notin} \bar{Y}$ zu zeigen. Wir unterscheiden zwei nicht disjunkte Fälle.

Falls $y \notin [-1,+1]$, so sei $\varepsilon := |y| - 1$. Dann ist $\mathrm{B}_\varepsilon(\binom{x}{y}) \cap Y = \emptyset$.

Falls $x \notin [-1,+1]$, so sei $\varepsilon := |x| - 1$. Dann ist $\mathrm{B}_\varepsilon(\binom{x}{y}) \cap Y = \emptyset$.

Wir zeigen $\supseteq$. Da ohnehin $Y \subseteq \bar{Y}$, genügt es zu zeigen, daß $Y^- \overset{!}{\subseteq} \bar{Y}$ und $Y^+ \overset{!}{\subseteq} \bar{Y}$.

Sei $\binom{x}{y} \in Y^-$, i.e. sei $x \in [-1,+1]$ und $y = -1$. Sei $\varepsilon \in \mathbf{R}_{>0}$. Falls $\varepsilon \leqslant 1$, dann ist $\binom{x}{-1+\varepsilon/2} \in \mathrm{B}_\varepsilon(\binom{x}{y}) \cap Y$; falls $\varepsilon > 1$, dann ist $\binom{x}{0} \in \mathrm{B}_\varepsilon(\binom{x}{y}) \cap Y$. Jedenfalls ist $\mathrm{B}_\varepsilon(\binom{x}{y}) \cap Y \neq \emptyset$. Somit ist $\binom{x}{y} \in \bar{Y}$.

Sei $\binom{x}{y} \in Y^+$, i.e. sei $x \in [-1,+1]$ und $y = +1$. Sei $\varepsilon \in \mathbf{R}_{>0}$. Falls $\varepsilon \leqslant 1$, dann ist $\binom{x}{1-\varepsilon/2} \in \mathrm{B}_\varepsilon(\binom{x}{y}) \cap Y$; falls $\varepsilon > 1$, dann ist $\binom{x}{0} \in \mathrm{B}_\varepsilon(\binom{x}{y}) \cap Y$. Jedenfalls ist $\mathrm{B}_\varepsilon(\binom{x}{y}) \cap Y \neq \emptyset$. Somit ist $\binom{x}{y} \in \bar{Y}$.

(3) Da $\emptyset \overset{\text{off.}}{\subseteq} \{1,2\}$, ist

$$\emptyset^\circ \;=\; \emptyset\ .$$

Da $\{1\} \overset{\text{off.}}{\subseteq} \{1,2\}$, ist

$$\{1\}^\circ \;=\; \{1\}\ .$$

Da $\{1,2\} \overset{\text{off.}}{\subseteq} \{1,2\}$, ist

$$\{1,2\}^\circ \;=\; \{1,2\}\ .$$

Betrachten wir die Teilmenge $\{2\}$. Die einzige offene Teilmenge von $\{1,2\}$, die in $\{2\}$ enthalten ist, ist $\emptyset$. Nach Definition des Inneren ist also

$$\{2\}^\circ \;=\; \emptyset\ .$$

(4) Nach Aufgabe 9 wissen wir, daß $\mathrm{B}_\varepsilon(x) \overset{\text{abg.}}{\subseteq} V$. Also ist $\overline{\mathrm{B}_\varepsilon(x)} \subseteq \bar{\mathrm{B}}_\varepsilon(x)$; vgl. Bemerkung (2) aus §1.4. Bleibt $\overline{\mathrm{B}_\varepsilon(x)} \overset{!}{\supseteq} \bar{\mathrm{B}}_\varepsilon(x)$ zu zeigen.

Ohnehin ist $\overline{\mathrm{B}_\varepsilon(x)} \supseteq \mathrm{B}_\varepsilon(x)$. Es bleibt also für $y \in \bar{\mathrm{B}}_\varepsilon(x) \smallsetminus \mathrm{B}_\varepsilon(x)$ zu zeigen, daß $y \overset{!}{\in} \overline{\mathrm{B}_\varepsilon(x)}$.

Für ein solches y ist $d(y,x) = \varepsilon$. Wir wollen Lemma (1) aus loc. cit. anwenden.

Sei $\eta > 0$. Wir haben zu zeigen, daß $\mathrm{B}_\eta(y) \cap \mathrm{B}_\varepsilon(x) \neq \emptyset$. Falls $\eta > \varepsilon$, so ist x in der Schnittmenge.

Betrachten wir noch den Fall $\eta \leqslant \varepsilon$.

Nun benötigen wir die Tatsache, daß V ein normierter Raum ist. Setze

$$z \;:= y + \tfrac{\eta}{2\varepsilon}(x-y)\ .$$

Es wird
$$\|z-y\| \;=\; \tfrac{\eta}{2\varepsilon}\|x-y\| \;=\; \tfrac{\eta}{2} \;<\; \eta\;,$$
und also $z \in \mathrm{B}_\eta(y)$. Es wird
$$\|z-x\| \;=\; \|(y-x)+\tfrac{\eta}{2\varepsilon}(x-y)\| \;=\; \|(1-\tfrac{\eta}{2\varepsilon})(y-x)\| \;=\; (1-\tfrac{\eta}{2\varepsilon})\|y-x\| \;=\; \varepsilon-\eta/2 \;<\; \varepsilon\;,$$
und also $z \in \mathrm{B}_\varepsilon(x)$. Somit ist $z \in \mathrm{B}_\eta(y)\cap \mathrm{B}_\varepsilon(x)$, und also $\mathrm{B}_\eta(y)\cap\mathrm{B}_\varepsilon(x) \neq \emptyset$

In einem metrischen Raum kann es passieren, daß $\overline{\mathrm{B}_\varepsilon(x)} \subsetneq \bar{\mathrm{B}}_\varepsilon(x)$. Sei etwa der metrische Raum $\mathbf{Z}$ mit der von der reellen Geraden eingeschränkten Metrik versehen. Dann wird $\mathrm{B}_1(0) = \{0\} \overset{\text{abg.}}{\subseteq} \mathbf{Z}$, und also $\overline{\mathrm{B}_1(0)} = \mathrm{B}_1(0) = \{0\}$. Auf der anderen Seite ist aber $\bar{\mathrm{B}}_1(0) = \{-1,0,+1\}$.

Aufgabe 15

(1) Die Aussage ist richtig.

Zum einen ist $X \smallsetminus Y \subseteq X \smallsetminus Y^\circ \overset{\text{abg.}}{\subseteq} X$, was $\overline{X \smallsetminus Y} \subseteq X \smallsetminus Y^\circ$ zeigt; cf. Bemerkung (2) aus §1.4.

Zum anderen ist $X \smallsetminus (\overline{X\smallsetminus Y}) \overset{\text{off.}}{\subseteq} X$ und $X \smallsetminus (\overline{X\smallsetminus Y}) \subseteq Y$, was $X \smallsetminus (\overline{X\smallsetminus Y}) \subseteq Y^\circ$ zeigt; cf. Bemerkung (3) aus loc. cit. Dies wiederum ist gleichbedeutend mit $\overline{X\smallsetminus Y} \supseteq X \smallsetminus Y^\circ$.

Insgesamt haben wir also $\overline{X\smallsetminus Y} = X\smallsetminus Y^\circ$ nachgewiesen.

(2) Die Aussage ist falsch

Zwar ist $Y\cap Z \subseteq \overline{Y}\cap\overline{Z} \overset{\text{abg.}}{\subseteq} X$, was $\overline{Y\cap Z} \subseteq \overline{Y}\cap\overline{Z}$ zeigt; cf. Bemerkung (2) aus §1.4.

Aber diese Inklusion kann zuweilen echt sein. Sei z.B. $Y := [0,1) \subseteq \mathbf{R}$, sei $Z := \mathbf{R}_{\geqslant 1}$. Wir haben im Beispiel in loc. cit. ermittelt, daß $\overline{Y} = [0,1]$. Ferner ist $Z \overset{\text{abg.}}{\subseteq} \mathbf{R}$, und also $\bar{Z} = Z = \mathbf{R}_{\geqslant 1}$. Nun aber wird
$$\overline{Y\cap Z} \;=\; \bar{\emptyset} \;=\; \emptyset\;,$$
da $\emptyset \overset{\text{abg.}}{\subseteq} \mathbf{R}$. Auf der anderen Seite ist jedoch
$$\overline{Y}\cap\overline{Z} \;=\; [0,1]\cap\mathbf{R}_{\geqslant 1} \;=\; \{1\}\;.$$

(3) Die Aussage ist richtig.

Zum einen ist $Y\cup Z \subseteq \overline{Y}\cup\overline{Z} \overset{\text{abg.}}{\subseteq} X$; cf. Aufgabe 4.(5). Dies zeigt $\overline{Y\cup Z} \subseteq \overline{Y}\cup\overline{Z}$; cf. Bemerkung (2) aus §1.4.

Zum anderen folgt aus $Y \subseteq Y\cup Z \subseteq \overline{Y\cup Z}$, daß $\bar{Y} \subseteq \overline{Y\cup Z}$; cf. Bemerkung (2) aus loc. cit. Genauso folgt $\bar{Z} \subseteq \overline{Y\cup Z}$. Somit ist also auch $\bar{Y}\cup\bar{Z} \subseteq \overline{Y\cup Z}$.

Insgesamt ist mithin $\overline{Y\cup Z} = \overline{Y}\cup\overline{Z}$.

Aufgabe 16

Ist $y = \lambda x$ für ein $\lambda \in \mathbf{R}_{>0}$, so folgt
$$\|x+y\| \;=\; \|(1+\lambda)x\| \;=\; (1+\lambda)\|x\| \;=\; \|x\|+\lambda\|x\| \;=\; \|x\|+\|\lambda x\| \;=\; \|x\|+\|y\|\;.$$

Sei umgekehrt $\|x+y\| = \|x\|+\|y\|$ vorausgesetzt. Dann ist
$$\begin{array}{rcl}
0 & = & (\|x\|+\|y\|)^2 - \|x+y\|^2 \\
& = & (\langle x,x\rangle^{1/2}+\langle y,y\rangle^{1/2})^2 - \langle x+y,x+y\rangle \\
& = & (\langle x,x\rangle + 2\langle x,x\rangle^{1/2}\langle y,y\rangle^{1/2} + \langle y,y\rangle) - (\langle x,x\rangle + 2\langle x,y\rangle + \langle y,y\rangle) \\
& = & 2(\langle x,x\rangle^{1/2}\langle y,y\rangle^{1/2} - \langle x,y\rangle)\;,
\end{array}$$

also $\langle x,y\rangle = \langle x,x\rangle^{1/2}\langle y,y\rangle^{1/2}$ und somit $\langle x,y\rangle^2 = \langle x,x\rangle\langle y,y\rangle$. Mit der Zusatzaussage aus dem Lemma von Cauchy-Schwarz aus §1.3.4 ist mithin (x,y) linear abhängig. Da $x \neq 0$ vorausgesetzt ist, gibt es somit ein $\lambda \in \mathbf{R}$ mit $y = \lambda x$. Wir wollen $\lambda \overset{!}{>} 0$ zeigen.

Da $x \neq 0$ und $y \neq 0$, ist $\langle x,x\rangle^{1/2}\langle y,y\rangle^{1/2} > 0$, und also auch $\langle x,y\rangle > 0$. Nun aber ist $\langle x,y\rangle = \langle x,\lambda x\rangle = \lambda\langle x,x\rangle$. Da $\langle x,x\rangle > 0$, folgt in der Tat, daß $\lambda > 0$.

Für einen normierten Raum ist die Aussage im allgemeinen falsch. Sei etwa $(\mathbf{R}^2, \| - \|_\infty)$ betrachtet. Dann ist zwar

$$\| \left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right) + \left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right) \|_\infty \;=\; 2 \;=\; \| \left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right) \|_\infty + \| \left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right) \|_\infty\,,$$

aber $(\left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right))$ ist linear unabhängig.

Aufgabe 17

(1) Mit einiger Berechtigung kann man sagen, diese Aussage sei ersichtlich richtig. Um es sauber durchzuführen, gehen wir einmal den Weg über einen prämetrischen Raum.

Betrachte folgende Prämetrik d auf $\{1,2,3\}$.

$$\begin{array}{lclclclclcl} d(1,1) & := & 0 & \quad d(1,2) & := & 0 & \quad d(1,3) & := & 0 \\ d(2,1) & := & 1 & \quad d(2,2) & := & 0 & \quad d(2,3) & := & 1 \\ d(3,1) & := & 1 & \quad d(3,2) & := & 1 & \quad d(3,3) & := & 0 \end{array}$$

Wir *behaupten,* daß diese Prämetrik die Topologie

$$T^{(\{1,2,3\},d)} \overset{!}{=} \big\{\emptyset, \{1\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{1,2,3\}\big\}$$

induziert.

Es wird $\mathrm{B}_1(1) = \{1\}$. Es wird $\mathrm{B}_1(2) = \{1,2\}$. Es wird $\mathrm{B}_1(3) = \{1,3\}$.

Somit sind $\{1\} \overset{\text{off.}}{\subseteq} \{1,2,3\}$, $\{1,2\} \overset{\text{off.}}{\subseteq} \{1,2,3\}$ und $\{1,3\} \overset{\text{off.}}{\subseteq} \{1,2,3\}$.

Nun ist $1 \in \mathrm{B}_\varepsilon(3)$ für alle $\varepsilon \in \mathbf{R}_{>0}$. Also sind $\{3\}$ und $\{2,3\}$ keine offenen Teilmengen.

Ferner ist $1 \in \mathrm{B}_\varepsilon(2)$ für alle $\varepsilon \in \mathbf{R}_{>0}$. Also ist $\{2\}$ keine offene Teilmenge.

Dies zeigt die *Behauptung.* Insbesondere liegt eine Topologie vor.

(2) Wir notieren eine Abbildung f von $\{1,2,3\}$ nach $\{1,2\}$ in der Form $\left(\begin{smallmatrix}1 & 2 & 3\\ f(1) & f(2) & f(3)\end{smallmatrix}\right)$; vgl. Konventionen.

Bekanntermaßen sind die beiden konstanten Abbildungen $\left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\1&1&1\end{smallmatrix}\right)$ und $\left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\2&2&2\end{smallmatrix}\right)$ stetig; cf. Beispiel (2) aus §2.1.1. Bleiben 6 weitere Abbildungen zu untersuchen.

Da das Urbild von $\emptyset$ unter einer solchen Abbildung leer ist, und damit offen, und da das Urbild von $\{1,2\}$ unter einer solchen Abbildung gleich $\{1,2,3\}$ ist, und damit offen, ist eine solche Abbildung stetig genau dann, wenn das Urbild der verbleibenden offenen Menge $\{1\}$ offen ist.

Unter $\left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\1&1&2\end{smallmatrix}\right)$ ist das Urbild von $\{1\}$ gleich $\{1,2\}$, und damit offen. Diese Abbildung ist also stetig.

Unter $\left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\1&2&1\end{smallmatrix}\right)$ ist das Urbild von $\{1\}$ gleich $\{1,3\}$, und damit offen. Diese Abbildung ist also stetig.

Unter $\left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\1&2&2\end{smallmatrix}\right)$ ist das Urbild von $\{1\}$ gleich $\{1\}$, und damit offen. Diese Abbildung ist also stetig.

Unter $\left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\2&1&1\end{smallmatrix}\right)$ ist das Urbild von $\{1\}$ gleich $\{2,3\}$, und damit nicht offen. Diese Abbildung ist also nicht stetig.

Unter $\left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\2&1&2\end{smallmatrix}\right)$ ist das Urbild von $\{1\}$ gleich $\{2\}$, und damit nicht offen. Diese Abbildung ist also nicht stetig.

Unter $\left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\2&2&1\end{smallmatrix}\right)$ ist das Urbild von $\{1\}$ gleich $\{3\}$, und damit nicht offen. Diese Abbildung ist also nicht stetig.

Wir können folgendes Ergebnis festhalten.

$$\mathrm{C}(X,Y) \;=\; \mathrm{C}(\{1,2,3\},\{1,2\}) \;=\; \Big\{ \left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\1&1&1\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\1&1&2\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\1&2&1\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\1&2&2\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\2&2&2\end{smallmatrix}\right) \Big\}\,.$$

(3) Wir sollen nun unter den $3! = 6$ Bijektionen von X nach X die Homöomorphismen heraussuchen, i.e. die Bijektionen, die stetig und offen sind.

Um offen zu sein, muß die einelementige Teilmenge $\{1\}$ auf eine offene einelementige Teilmenge abgebildet werden, d.h. auf $\{1\}$.

Bekanntlich ist $\mathrm{id}_X = \left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{smallmatrix}\right)$ ein Homöomorphismus; cf. Beispiel (1) aus §2.1.3.

Da, wie gesagt, 1 auf 1 zu gehen hat, bleibt als andere Möglichkeit nurmehr $\left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{smallmatrix}\right)$. Und in der Tat ist dies eine stetige und offene Bijektion, welche via Bild- und via Urbildnahme die offenen Teilmengen $\{1,2\}$ und $\{1,3\}$ vertauscht.

Als Ergebnis können wir festhalten, daß der Raum X zwei Homöomorphismen auf sich selbst besitzt, $\left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{smallmatrix}\right)$ und $\left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{smallmatrix}\right)$.

Aufgabe 18

(1) Die Aussage ist richtig.

Sei f stetig. Sei $B \overset{\text{abg.}}{\subseteq} Y$. Es wird

$$X \smallsetminus f^{-1}(B) \;=\; f^{-1}(Y \smallsetminus B) \;\overset{\text{off.}}{\subseteq}\; X\,,$$

und also $f^{-1}(B) \overset{\text{abg.}}{\subseteq} X$.

Sei umgekehrt $f^{-1}(B) \overset{\text{abg.}}{\subseteq} X$ für alle $B \overset{\text{abg.}}{\subseteq} Y$. Sei $V \overset{\text{off.}}{\subseteq} Y$. Es wird

$$X \smallsetminus f^{-1}(V) \;=\; f^{-1}(Y \smallsetminus V) \;\overset{\text{abg.}}{\subseteq}\; X\,,$$

und also $f^{-1}(V) \overset{\text{off.}}{\subseteq} X$.

(2) Die Aussage ist richtig.

Sei f stetig. Wir wollen zeigen, daß $f(\overline{X'}) \overset{!}{\subseteq} \overline{f(X')}$, i.e. daß $\overline{X'} \overset{!}{\subseteq} f^{-1}(\overline{f(X')})$. Nach (1) ist $f^{-1}(\overline{f(X')})$ abgeschlossen, so daß es nach Bemerkung (2) aus §1.4 zu zeigen genügt, daß $X' \overset{!}{\subseteq} f^{-1}(\overline{f(X')})$, i.e. daß $f(X') \overset{!}{\subseteq} \overline{f(X')}$. Dies allerdings trifft zu.

Sei umgekehrt $f(\overline{X'}) \subseteq \overline{f(X')}$ für alle $X' \subseteq X$, i.e. sei $\overline{X'} \subseteq f^{-1}(\overline{f(X')})$ für alle $X' \subseteq X$. Sei $B \overset{\text{abg.}}{\subseteq} Y$. Nach (1) haben wir zu zeigen, daß $f^{-1}(B) \overset{\text{abg.}}{\subseteq} X$.

Sei $X' := f^{-1}(B)$. Es ist $f(X') = B \cap f(X)$. Es wird

$$\overline{f(X')} \;=\; \overline{B \cap f(X)} \;\subseteq\; \bar{B} \cap \overline{f(X)} \;=\; B \cap \overline{f(X)}\,,$$

vgl. Lösung zu Aufgabe 15.(2), und also

$$\overline{f^{-1}(B)} \;=\; \overline{X'} \;\subseteq\; f^{-1}(\overline{f(X')}) \;\subseteq\; f^{-1}(B \cap \overline{f(X)}) \;=\; f^{-1}(B) \cap f^{-1}(\overline{f(X)}) \;=\; f^{-1}(B)\,.$$

Da ohnehin $\overline{f^{-1}(B)} \supseteq f^{-1}(B)$, folgt $\overline{f^{-1}(B)} \;=\; f^{-1}(B)$, i.e. $f^{-1}(B) \overset{\text{abg.}}{\subseteq} X$.

Um ein Beispiel mit $f(\bar{X}') \subsetneq \overline{f(X')}$ zu bekommen, kann man von einem nichtleeren diskreten Raum X in einen verklumpten Raum Y via f nichtsurjektiv abbilden. Für $X' = X$ wird dann $f(\bar{X}') = f(X) \subsetneq Y$. Dahingegen ist $\overline{f(X')} = Y$, schon allein da der Abschluß jeder nichtleeren Teilmenge von Y gleich Y ist.

(3) Die Aussage ist falsch.

Seien etwa $X = \{1,2,3\}$ und $Y = \{1,2\}$ wie in Aufgabe 17.(2). Sei $f := \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{smallmatrix}\right)$, es ist f, wie in loc. cit. festgestellt, stetig. Sei $X' := \{2,3\}$.

Es ist $X'^\circ = \emptyset$, da dies die einzige in $\{2,3\}$ liegende offene Menge ist. Insbesondere ist $f(X'^\circ) = \emptyset$.

Es ist $f(X') = \{1,2\} \overset{\text{off.}}{\subseteq} Y$. Insbesondere ist $f(X')^\circ = \{1,2\}$.

Wir sehen, daß $f(X'^\circ) = \emptyset$ keine Obermenge von $f(X')^\circ = \{1,2\}$ ist.

(4) Die Aussage ist falsch.

Seien etwa $X = \{1,2,3\}$ und $Y = \{1,2\}$ wie in Aufgabe 17.(2). Sei $f := \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \end{smallmatrix}\right)$. Als konstante Abbildung ist f stetig; cf. Beispiel (2) aus §2.1.1. Sei $X' := \{1\}$.

Es ist $X' \overset{\text{off.}}{\subseteq} X$, und also $X'^\circ = X' = \{1\}$. Insbesondere ist $f(X'^\circ) = \{2\}$.

Es ist $f(X') = \{2\}$. Also ist $f(X')^\circ = \{2\}^\circ = \emptyset$.

Wir sehen, daß $f(X'^\circ) = \{2\}$ keine Teilmenge von $f(X')^\circ = \emptyset$ ist.

Aufgabe 19

(1) Sei f ein Homöomorphismus, also stetig, offen und bijektiv. Ist $U \overset{\text{off.}}{\subseteq} X$, so ist wegen f offen auch $f(U)$ offen.

Ist umgekehrt $f(U)$ offen, so ist wegen f stetig auch $f^{-1}(f(U))$ offen. Da f injektiv ist, ist $f^{-1}(f(U)) = U$. Also ist U offen.

(2) Ist f Homöomorphismus, so ist f stetig, offen und bijektiv. Insbesondere gibt es eine Umkehrabbildung $X \xleftarrow{f^{-1}} Y$. Setzen wir $g := f^{-1}$, so haben wir zu zeigen, daß g stetig ist. Sei $U \overset{\text{off.}}{\subseteq} X$. Es ist zu zeigen, daß $g^{-1}(U) \overset{\text{off.!}}{\subseteq} Y$.

Da f bijektiv ist, und da $g = f^{-1}$, ist $g^{-1}(U) = f(U)$. Da f offen ist, ist nun in der Tat $g^{-1}(U) = f(U) \overset{\text{off.}}{\subseteq} Y$.

Sei nun umgekehrt ein $X \xleftarrow{g} Y$ stetig mit $g \circ f = \mathrm{id}_X$ und $f \circ g = \mathrm{id}_Y$ existent. Dann ist zunächst f bijektiv mit $f^{-1} = g$. Wir haben zu zeigen, daß f offen ist. Sei $U \overset{\text{off.}}{\subseteq} X$. Es ist $f(U) = g^{-1}(U) \overset{\text{off.}}{\subseteq} Y$, da g als stetig vorausgesetzt ist. Somit ist f als offen nachgewiesen.

Aufgabe 20

(1) Schreibe $h := f + g$. Sei $V \overset{\text{off.}}{\subseteq} \mathbf{R}$. Wir wollen $h^{-1}(V) \overset{\text{off.!}}{\subseteq} X$ zeigen.

Sei $x \in h^{-1}(V)$. Es genügt zu zeigen, daß es $U_x \overset{\text{off.}}{\subseteq} X$ gibt mit $x \in U_x \subseteq h^{-1}(V)$; vgl. Bemerkung aus §1.1.3.

Es ist $h(x) \in V$. Sei $\varepsilon \in \mathbf{R}_{>0}$ mit $\mathrm{B}_\varepsilon(h(x)) \subseteq V$.

Wegen f stetig ist $f^{-1}\big(\mathrm{B}_{\varepsilon/2}(f(x))\big) \overset{\text{off.}}{\subseteq} X$.

Wegen g stetig ist $g^{-1}\big(\mathrm{B}_{\varepsilon/2}(g(x))\big) \overset{\text{off.}}{\subseteq} X$.

Sei

$$U_x \;:=\; f^{-1}\big(\mathrm{B}_{\varepsilon/2}(f(x))\big) \cap g^{-1}\big(\mathrm{B}_{\varepsilon/2}(g(x))\big) \;\overset{\text{off.}}{\subseteq}\; X\,.$$

Da x in beiden Teilnehmern liegt, ist $x \in U_x$.

Bleibt zu zeigen, daß $U_x \subseteq h^{-1}(V)$. Sei $y \in U_x$, i.e. sei $|f(y) - f(x)| < \varepsilon/2$ und $|g(y) - g(x)| < \varepsilon/2$. Es wird

$$\begin{array}{rcl} |h(y) - h(x)| & = & |(f(y) + g(y)) - (f(x) + g(x))| \\ & \leqslant & |f(y) - f(x)| + |g(y) - g(x)| \\ & < & \varepsilon/2 + \varepsilon/2 \\ & = & \varepsilon\,, \end{array}$$

und somit $h(y) \in \mathrm{B}_\varepsilon(h(x)) \subseteq V$, woraus $y \in h^{-1}(V)$.

(2) Schreibe $h := f \cdot g$. Sei $V \overset{\text{off.}}{\subseteq} \mathbf{R}$. Wir wollen $h^{-1}(V) \overset{\text{off.!}}{\subseteq} X$ zeigen.

Sei $x \in h^{-1}(V)$. Es genügt zu zeigen, daß es $U_x \overset{\text{off.}}{\subseteq} X$ gibt mit $x \in U_x \subseteq h^{-1}(V)$; vgl. Bemerkung aus §1.1.3.

Es ist $h(x) \in V$. Sei $\varepsilon \in \mathbf{R}_{>0}$ mit $\mathrm{B}_\varepsilon(h(x)) \subseteq V$.

Sei $m := \max\{1, |f(x)|, |g(x)| + \varepsilon\}$ ([3]). Es ist $m \in \mathbf{R}_{>0}$. Es ist $\varepsilon/m \leqslant \varepsilon$.

Wegen f stetig ist $f^{-1}\big(\mathrm{B}_{\varepsilon/m}(f(x))\big) \overset{\text{off.}}{\subseteq} X$.

Wegen g stetig ist $g^{-1}\big(\mathrm{B}_{\varepsilon/m}(g(x))\big) \overset{\text{off.}}{\subseteq} X$.

Sei

$$U_x \;:=\; f^{-1}\big(\mathrm{B}_{\varepsilon/m}(f(x))\big) \cap g^{-1}\big(\mathrm{B}_{\varepsilon/m}(g(x))\big) \;\overset{\text{off.}}{\subseteq}\; X\,.$$

Da x in beiden Teilnehmern liegt, ist $x \in U_x$.

Bleibt zu zeigen, daß $U_x \subseteq h^{-1}(V)$. Sei $y \in U_x$, i.e. sei $|f(y)-f(x)| < \varepsilon/m$ und $|g(y)-g(x)| < \varepsilon/m$. Insbesondere ist

$$|g(y)| \;\leqslant\; |g(x)| + \varepsilon/m \;\leqslant\; |g(x)| + \varepsilon$$

Es wird

$$\begin{array}{rcl} |h(y) - h(x)| & = & |f(y) \cdot g(y) - f(x) \cdot g(x)| \\ & = & |f(y) \cdot g(y) - f(x) \cdot g(y) + f(x) \cdot g(y) - f(x) \cdot g(x)| \\ & \leqslant & |f(y) \cdot g(y) - f(x) \cdot g(y)| + |f(x) \cdot g(y) - f(x) \cdot g(x)| \\ & = & |f(y) - f(x)||g(y)| + |f(x)||g(y) - g(x)| \\ & \leqslant & |f(y) - f(x)|(|g(x)| + \varepsilon) + |f(x)||g(y) - g(x)| \\ & < & (\varepsilon/m) \cdot m + m \cdot (\varepsilon/m) \\ & = & \varepsilon\,, \end{array}$$

und somit $h(y) \in \mathrm{B}_\varepsilon(h(x)) \subseteq V$, woraus $y \in h^{-1}(V)$.

Vgl. auch Aufgabe 33.(5).

Aufgabe 21

(1) Es ist f stetig. Wir wollen Satz 2 anwenden und verfahren wie folgt.

Sei $A_1 := \mathbf{R}_{\leqslant 0}$. Sei $A_2 := \mathbf{R}_{\geqslant 0}$. Es ist (A_1, A_2) eine lokalendliche (da endliche) abgeschlossene Überdeckung von $\mathbf{R}$.

Sei $f_1 : A_1 \longrightarrow \mathbf{R}$, $x \longmapsto -x$. Es ist f_1 stetig, etwa als Einschränkung der Identität von $\mathbf{R}$ auf A_1, multipliziert mit der konstanten Abbildung $x \longmapsto -1$; cf. Aufgabe 20.

Sei $f_2 : A_2 \longrightarrow \mathbf{R}$, $x \longmapsto x$. Es ist f_2 stetig, etwa als Einschränkung der Identität von $\mathbf{R}$ auf A_2.

Es ist $A_1 \cap A_2 = \{0\}$, und es ist $f_1|_{A_1 \cap A_2} = f_2|_{A_1 \cap A_2}$, da $f_1(0) = 0 = f_2(0)$.

Da nun $f|_{A_1} = f_1$ (i.e. $|x| = -x$ für $x \in \mathbf{R}_{\leqslant 0}$) und $f|_{A_2} = f_2$ (i.e. $|x| = x$ für $x \in \mathbf{R}_{\geqslant 0}$), folgt mit Satz 2, daß f stetig ist.

[3] Wie sich beim Lösen der Aufgabe am Ende als zweckmäßig herausstellt.

Man kann auch direkt die ε-δ-Charakterisierung aus §2.2 anwenden.

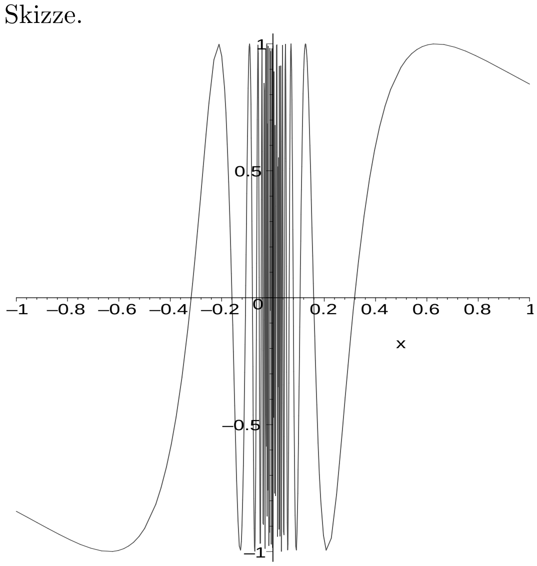
(2) Es ist f nicht stetig. Wir wollen die ε-δ-Charakterisierung aus §2.2 anwenden.

Sei $x = 0$. Sei $\varepsilon = 1/2$. Sei $\delta \in \mathbf{R}_{>0}$. Wir wollen zeigen, daß $f(\mathrm{B}_\delta(x)) \not\subseteq \mathrm{B}_\varepsilon(f(x))$, i.e. daß $f\big((-\delta, +\delta)\big) \not\subseteq (-1/2, +1/2)$.

Dazu genügt es, ein $x \in (0, \delta)$ so anzugeben, daß $f(x) = 1$. Wähle $n \in \mathbf{Z}$ mit $n \geqslant 1/(2\pi\delta)$. Wähle $x = 1/(\pi/2 + 2\pi n)$. Dann ist $1/x = \pi/2 + 2\pi n > 1/\delta$, also $x < \delta$, und also auch $x \in (0, \delta)$. Ferner ist

$$\begin{array}{rcl} f(x) & = & \sin(1/x) \\ & = & \sin(\pi/2 + 2\pi n) \\ & = & \sin(\pi/2) \\ & = & 1\,. \end{array}$$

Skizze.



(3) Es ist f stetig. Wir wollen dazu die ε-δ-Charakterisierung aus §2.2 anwenden.

Sei $x \in \mathbf{R}_{>0}$. Sei $\varepsilon \in \mathbf{R}_{>0}$. Wir müssen ein $\delta \in \mathbf{R}_{>0}$ finden mit $f(\mathrm{B}_\delta(x) \cap \mathbf{R}_{>0}) \subseteq \mathrm{B}_\varepsilon(f(x))$. Beachte hierzu, daß der Ball mit Radius δ im metrischen Teilraum $\mathbf{R}_{>0}$ von $\mathbf{R}$ sich als Schnitt des Balles $\mathrm{B}_\delta(x)$ in $\mathbf{R}$ mit $\mathbf{R}_{>0}$ ergibt.

Es sollte also für alle $\tilde{x} \in \mathbf{R}_{>0}$ mit $|\tilde{x} - x| < \delta$ gelten, daß

$$\left|\frac{1}{\tilde{x}} - \frac{1}{x}\right| \overset{!}{<} \varepsilon\,,$$

i.e. daß

$$|x - \tilde{x}| \overset{!}{<} \varepsilon x \tilde{x}\,.$$

Sei dementsprechend $\delta := \min\{\varepsilon x^2/2,\, x/2\}$. Falls $|\tilde{x} - x| < \delta$, ist also insbesondere $x/2 < \tilde{x}$. Für ein solches $\tilde{x}$ wird somit in der Tat

$$|x - \tilde{x}| \;<\; \delta \;\leqslant\; \varepsilon x (x/2) \;<\; \varepsilon x \tilde{x}\,.$$

(4) Es ist f stetig.

Dank Aufgabe 20 dürfen wir verwenden, daß die Summe und das Produkt stetiger Funktionen wiederum stetig ist.

Nun ist eine konstante Funktion stetig. Ferner ist die Identität $\mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$, $x \longmapsto x$ stetig. Ein Produkt solcher Funktionen liefert die stetige Monomfunktion $\mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$, $x \longmapsto a_i x^i$.

Als Summe von solchen Monomfunktionen ist nun auch die Polynomfunktion

$$\mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}\,, \quad x \longmapsto a_n x^n + \cdots a_0 x^0$$

stetig.

(5) Es ist f stetig. Wir wollen dazu die ε-δ-Charakterisierung aus §2.2 anwenden.

Die Norm auf Y werde mit $\| - \|_Y$ bezeichnet.

Sei $x \in X$. Sei $\varepsilon > 0$. Wir müssen ein $\delta \in \mathbf{R}_{>0}$ so finden, daß $f(\mathrm{B}_\delta(x)) \subseteq \mathrm{B}_\varepsilon(f(x))$, i.e. so, daß für alle $\tilde{x} \in X$ mit $\|x - \tilde{x}\|_2 < \delta$ auch $\|f(x) - f(\tilde{x})\|_Y < \varepsilon$.

Nun aber ist $f(x) - f(\tilde{x}) = f(x - \tilde{x})$. Also genügt es, ein $\delta \in \mathbf{R}_{>0}$ so zu finden, daß aus $\|\xi\|_2 < \delta$ schon $\|f(\xi)\|_Y < \varepsilon$ folgt – denn dies kann man dann auf $\xi = x - \tilde{x}$ anwenden.

Sei $(e_1, \ldots, e_k)$ die $\mathbf{R}$-lineare Standardbasis von X. Schreibe $\xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} = \xi_1 e_1 + \cdots + \xi_n e_n$. Damit wird jedenfalls

$$\|f(\xi)\|_Y \;=\; \|\xi_1 f(e_1) + \cdots + \xi_n f(e_n)\|_Y \;\leqslant\; |\xi_1|\|f(e_1)\|_Y + \cdots + |\xi_n|\|f(e_n)\|_Y \;.$$

Auf der anderen Seite ist für $1 \leqslant i \leqslant n$

$$|\xi_i| \;=\; \sqrt{\xi_i^2} \;\leqslant\; \sqrt{\xi_1^2 + \cdots + \xi_n^2} \;=\; \|\xi\|_2 \;.$$

Ist also $\|\xi\|_2 < \delta$, so ist

$$\begin{array}{rcl} \|f(\xi)\|_Y & \leqslant & |\xi_1|\|f(e_1)\|_Y + \cdots + |\xi_n|\|f(e_n)\|_Y \\ & \leqslant & \|\xi\|_2\|f(e_1)\|_Y + \cdots + \|\xi\|_2\|f(e_n)\|_Y \\ & < & \delta(\|f(e_1)\|_Y + \cdots + \|f(e_n)\|_Y) \end{array}$$

falls $(\|f(e_1)\|_Y + \cdots + \|f(e_n)\|_Y) \neq 0$. Wählen wir

$$\delta \;:=\; \begin{cases} \varepsilon/(\|f(e_1)\|_Y + \cdots + \|f(e_n)\|_Y) & \text{falls } \|f(e_1)\|_Y + \cdots + \|f(e_n)\|_Y \neq 0 \\ 1 & \text{falls } \|f(e_1)\|_Y + \cdots + \|f(e_n)\|_Y = 0\,, \end{cases}$$

so ist jedenfalls $\|f(\xi)\|_Y < \varepsilon$, falls $\|\xi\|_2 < \delta$.

(6) Es ist f stetig. Wir wollen dazu die ε-δ-Charakterisierung aus §2.2 anwenden.

Sei $x \in X$. Sei $\varepsilon \in \mathbf{R}_{>0}$. Wähle $\delta := \varepsilon$.

Sei $\tilde{x} \in X$. Mit (Nor 3) erhalten wir

$$\|x\| \;=\; \|x - \tilde{x} + \tilde{x}\| \;\leqslant\; \|x - \tilde{x}\| + \|\tilde{x}\|\;,$$

und also

$$\|x\| - \|\tilde{x}\| \;\leqslant\; \|x - \tilde{x}\|\;.$$

Mit vertauschten Rollen von x und $\tilde{x}$ folgt genauso

$$\|\tilde{x}\| - \|x\| \;\leqslant\; \|\tilde{x} - x\| \;=\; \|x - \tilde{x}\|\;.$$

Zusammengenommen gilt also

$$|\,\|x\| - \|\tilde{x}\|\,| \;\leqslant\; \|x - \tilde{x}\|\;.$$

Ist nun $\|x - \tilde{x}\| < \varepsilon$, so ist auch $|\,\|x\| - \|\tilde{x}\|\,| < \varepsilon$. Also ist $f(\mathrm{B}_\varepsilon(x)) \subseteq \mathrm{B}_\varepsilon(f(x))$.

Wir bemerken noch, daß (1) ein Spezialfall von (6) ist.

Aufgabe 22

(1) Es ist $f^{-1}(Y') \subseteq f^{-1}(\bar{Y}') \overset{\text{abg.}}{\subseteq} X$; cf. Aufgabe 18.(1). Also ist $\overline{f^{-1}(Y')} \subseteq f^{-1}(\bar{Y}')$; vgl. Bemerkung (2) aus §1.4.

Sei nun $X = \{1,2\}$, ausgestattet mit der diskreten Topologie. Sei $Y = \{1,2\}$, ausgestattet mit der Sierpinski-Topologie $\big\{\emptyset,\, \{1\},\, \{1,2\}\big\}$.

Sei die Abbildung f von X nach Y die Identität, also $f(1) = 1$, $f(2) = 2$.

Sei $Y' = \{1\}$. Es ist $\overline{\{1\}} = \{1,2\}$, da dies die einzige abgeschlossene Menge in Y ist, die $\{1\}$ umfaßt. Also ist $f^{-1}(\overline{\{1\}}) = \{1,2\}$.

Dahingegen ist $\overline{f^{-1}(\{1\})} = \overline{\{1\}} = \{1\}$, da in X alle Teilmengen abgeschlossen sind.

Gleichheit gilt hier also im allgemeinen nicht.

(2) Es ist $\emptyset = \partial X' = \bar{X}' \smallsetminus X'^{\circ}$ genau dann, wenn $X'^{\circ} = \bar{X}'$. Da X' zwischen diesen beiden Mengen liegt, ist dies genau dann erfüllt, wenn $X'^{\circ} = X' = \bar{X}'$. Dies wiederum ist genau dann der Fall, wenn $X' \overset{\text{off.}}{\subseteq} X$ und $X' \overset{\text{abg.}}{\subseteq} X$; vgl. Bemerkung $(4,5)$ in §1.4.

(3) Da $X' \subseteq \bar{X}'$, ist $X'^{\circ} \subseteq (\bar{X}')^{\circ}$. Ferner ist $\bar{\bar{X}}' = \bar{X}'$; cf. Bemerkung $(4,5)$ in §1.4. Also ist

$$\partial \bar{X}' \;=\; \bar{\bar{X}}' \smallsetminus (\bar{X}')^{\circ} \;=\; \bar{X}' \smallsetminus (\bar{X}')^{\circ} \;\supseteq\; \bar{X}' \smallsetminus X'^{\circ} \;=\; \partial X'\ .$$

Sei nun $X = \mathbf{R}$. Sei $X' = \mathbf{R} \smallsetminus \{0\}$. Es ist $X' = \mathbf{R}_{<0} \cup \mathbf{R}_{>0} \overset{\text{off.}}{\subseteq} \mathbf{R} = X$. Ferner ist $\bar{X}' = \mathbf{R} = X$, da insbesondere $0 \in \bar{X}'$, da für alle $\varepsilon \in \mathbf{R}_{>0}$ noch $\varepsilon/2 \in (0-\varepsilon, 0+\varepsilon) \cap X'$ liegt und damit dieser Schnitt nicht leer ist.

Also wird $\partial X' = \bar{X}' \smallsetminus X'^{\circ} = X \smallsetminus X' = \{0\}$.

Auf der anderen Seite wird $\partial \bar{X}' = \partial X = \emptyset$, da $X \overset{\text{off.}}{\subseteq} X$ und $X \overset{\text{abg.}}{\subseteq} X$; vgl. (2).

Gleichheit gilt hier also im allgemeinen nicht.

Aufgabe 23

(1) Die Aussage ist falsch. Für ein Gegenbeispiel begeben wir uns in die Situation von Aufgabe 17.

Sei $X = \{1,2,3\}$ mit der Topologie $\big\{\emptyset, \{1\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{1,2,3\}\big\}$).

Sei $Y = \{1,2\}$ mit der Topologie $\big\{\emptyset, \{1\}, \{1,2\}\big\}$ der Sierpinski-Raum.

Sei

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ 1 & \longmapsto & 1 \\ 2 & \longmapsto & 1 \\ 3 & \longmapsto & 2\,. \end{array}$$

Es ist f offen, da jedes Bild einer offenen Mengen in X wieder offen in Y ist.

Sei $X' = \{2,3\}$. Es ist $Y' = f(X') = \{1,2\} = Y$.

Es ist $\{3\} = \{1,3\} \cap X' \overset{\text{off.}}{\subseteq} X'$ nach Definition der Spurtopologie.

Dahingegen ist $f|_{X'}^{Y'}(\{3\}) = f(\{3\}) = \{2\}$ nicht offen in Y'.

(2) Die Aussage ist richtig. Wir wollen zeigen, daß

$$\begin{array}{rcl} (0,1) & \xrightarrow{f} & \mathbf{R}_{>1} \\ x & \longmapsto & 1/x \end{array}$$

ein Homöomorphismus ist. Nach Aufgabe 21.(3) ist diese Abbildung als Einschränkung einer stetigen Abbildung stetig; vgl. zweite Bemerkung aus §2.1.1.

Nun ist mit derselben Begründung auch

$$\begin{array}{ccc} (0,1) & \xleftarrow{g} & \mathbf{R}_{>1} \\ 1/y & \longleftarrow\!\!\shortmid & y \end{array}$$

stetig.

Es ist $(g \circ f)(x) = g(1/x) = x$ für $x \in (0,1)$, also $g \circ f = \mathrm{id}$.

Es ist $(f \circ g)(y) = f(1/y) = y$ für $y \in \mathbf{R}_{>1}$, also $f \circ g = \mathrm{id}$.

Nach Aufgabe 19.(2) ist f also ein Homömorphismus. Mithin sind $(0,1)$ und $\mathbf{R}_{>1}$ homöomorph.

Aufgabe 24

(1) In den Bezeichnungen der Bemerkung (3) aus §3.1 erhalten wir folgendes.

$$\begin{array}{rcl} S' & = & \big\{\{1,2\},\ \{1,2,3\},\ \{1,2,4\},\ \{1,2,3,4\}\big\} \\ S'' & = & \big\{\emptyset,\ \{1,2\},\ \{1,2,3\},\ \{1,2,4\},\ \{1,2,3,4\}\big\} \end{array}$$

Und $\langle S\rangle_X = S''$ nach loc. cit.

(2) In den Bezeichnungen der Bemerkung (3) aus §3.1 erhalten wir folgendes.

$$\begin{array}{rcl} S' & = & \big\{\{3\},\ \{3,4\},\ \{3,5\},\ \{1,2,3\},\ \{1,2,3,4\},\ \{1,2,3,5\},\ \{3,4,5,6\},\ \{1,2,3,4,5,6\}\big\} \\ S'' & = & \big\{\emptyset,\ \{3\},\ \{3,4\},\ \{3,5\},\ \{1,2,3\},\ \{3,4,5\},\ \{1,2,3,4\},\ \{1,2,3,5\},\ \{1,2,3,4,5\}, \\ & & \qquad \{3,4,5,6\},\ \{1,2,3,4,5,6\}\big\} \end{array}$$

Und $\langle S\rangle_X = S''$ nach loc. cit.

Aufgabe 25

(1) Ist S eine Basis von X, so gibt es für jedes $x \in U \overset{\text{off.}}{\subseteq} X$ noch ein $V \in S$ mit $x \in V \subseteq U$. Insbesondere trifft dies für $U := \bigcap_{i=1}^k U_i$ zu.

Sei umgekehrt die genannte Eigenschaft für S erfüllt. Wir wollen zeigen, daß S eine Basis von X ist. Ist $x \in U \overset{\text{off.}}{\subseteq} X$, so haben wir ein $V \in S$ mit $x \in V \subseteq U$ zu finden.

Da S als Subbasis von X vorausgesetzt ist, ist U eine Vereinigung von endlichen Schnitten von in S gelegenen Mengen. Insbesondere liegt x in einem solchen Schnitt, sagen wir, $x \in \bigcap_{i=1}^k U_i \subseteq U$ mit $k \geqslant 1$ und gewissen $U_i \in S$. Nach Voraussetzung gibt es nun ein $V \in S$ mit

$$x \ \in\ V\ \subseteq\ \textstyle\bigcap_{i=1}^k U_i\ \subseteq\ U\ .$$

Es ist S bereits dann eine Basis, wenn die genannte Eigenschaft für $k = 0$ und $k = 2$ gilt; i.e. wenn $\bigcup_{U\in S} U = X$ ist und für alle $U,\ V \in S$ und alle $x \in U \cap V$ ein $W \in S$ mit $x \in W \subseteq U \cap V$ existiert. Denn der Fall $k = 1$ ist trivial. Und der Fall $k \geqslant 3$ folgt per Induktion aus dem Fall $k = 2$. Denn ist $x \in \bigcap_{i=1}^k U_i$ mit $U_i \in S$ für $i \in \{1,\dots,k\}$ gegeben, so gibt es dank des Falls $k = 2$ ein $W \in S$ mit $x \in W \subseteq U_1 \cap U_2$. Somit ist $x \in W \cap \bigcap_{i=3}^k U_i$. Mit Induktionsvoraussetzung gibt es also ein $W' \in S$ mit $x \in W' \subseteq W \cap \bigcap_{i=3}^k U_i$. Insgesamt ist $x \in W' \subseteq W \cap \bigcap_{i=3}^k U_i \subseteq U_1 \cap U_2 \cap \bigcap_{i=3}^k U_i = \bigcap_{i=1}^k U_i$.

(2) Ist der Schnitt von zwei Elementen von S wieder ein Element von S, so ist mit Induktion auch der Schnitt von $k \geqslant 1$ Elementen von S wieder ein Element von S. Somit ist die in (1) von S geforderte Eigenschaft in dortigen Bezeichnungen mit der Wahl $V = \bigcap_{i=1}^k U_i$ erfüllt.

(3) Da $S \subseteq S' \subseteq \langle S' \rangle_X$, ist $\langle S \rangle_X \subseteq \langle S' \rangle_X$.
Nun ist aber auch $S' \subseteq S'' = \langle S \rangle_X$, und folglich $\langle S' \rangle_X \subseteq \langle S \rangle_X$; vgl. Bemerkung (3) in §3.1.
Zusammengenommen ist also $\langle S \rangle_X = \langle S' \rangle_X$, und damit auch S' eine Subbasis von X.

Sind nun $U,\, V \in S'$, und schreiben wir $U = \bigcap_{i=1}^{k} U_i$ und $V = \bigcap_{i=k+1}^{k+k'} U_i$, wobei $k,\, k' \in \mathbf{Z}_{\geqslant 0}$ und $U_i \in S$ stets, so wird

$$U \cap V \;=\; \big(\textstyle\bigcap_{i=1}^{k} U_i\big) \cap \big(\textstyle\bigcap_{i=k+1}^{k+k'} U_i\big) \;=\; \textstyle\bigcap_{i=1}^{k+k'} U_i \;\in\; S' \,.$$

Also ist die in (2) geforderte Eigenschaft erfüllt, und S' ist in der Tat eine Basis von X.

Aufgabe 26

Nach Definition ist eine Teilmenge B von $T_{X,\,\mathrm{diskret}}$ eine Basis von $(X, T_{X,\,\mathrm{diskret}})$, falls für alle $U \overset{\text{off.}}{\subseteq} X$ und alle $x \in U$ noch ein Element $V \in B$ existiert mit $x \in V \subseteq U$.

Sei nun $B := \big\{\{x\} \;:\; x \in X\big\}$. Sicher ist $B \subseteq T_{X,\,\mathrm{diskret}} = \mathrm{Pot}(X)$. Sei nun $U \subseteq X$ gegeben – jede Teilmenge von X ist ja nun offen. Sei ferner $x \in U$. Dann gilt $\{x\} \in B$ und $x \in \{x\} \subseteq U$.

Aufgabe 27

(1) Ist $X = \emptyset$, so ist auch $f(X) = \emptyset$, und mithin abzählbar. Also ist o.E. $X \neq \emptyset$.
Sei $\mathbf{Z}_{\geqslant 1} \longrightarrow X$ surjektiv. Es ist $f|^{f(X)} : X \longrightarrow f(X)$ surjektiv. Also ist auch das Kompositum $\mathbf{Z}_{\geqslant 1} \longrightarrow f(X)$ surjektiv. Somit ist $f(X)$ abzählbar.

(2) Sei X abzählbar. Sei $Y \subseteq X$. Ist $Y = \emptyset$, so ist auch Y abzählbar. Somit ist o.E. $Y \neq \emptyset$.
Mit (1) genügt es, eine Surjektion von X auf Y anzugeben, um zu zeigen, daß auch Y abzählbar ist. Wähle $y_0 \in Y$. Sei

$$\begin{array}{ccl} X & \longrightarrow & Y \\ x & \longmapsto & \begin{cases} x & \text{falls } x \in Y \\ y_0 & \text{falls } x \in X \smallsetminus Y \end{cases} \end{array}$$

Diese Abbildung ist surjektiv, da jedes $y \in Y$ im Bild liegt, als Bild von ebendiesem y.

(3) O.E. sind $X,\, Y \neq \emptyset$. Da wir Surjektionen $\mathbf{Z}_{\geqslant 1} \longrightarrow X$, $i \longmapsto x_i$ und $\mathbf{Z}_{\geqslant 1} \longrightarrow Y$, $j \longmapsto y_j$ haben, existiert auch eine Surjektion

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbf{Z}_{\geqslant 1} & \times & \mathbf{Z}_{\geqslant 1} & \longmapsto & X & \times & Y \\ (i & , & j) & \longmapsto & (x_i & , & y_j) \end{array}$$

Mit (1) genügt es also zu zeigen, daß $\mathbf{Z}_{\geqslant 1} \times \mathbf{Z}_{\geqslant 1}$ abzählbar ist.
Dazu kann man die Surjektion

$$\begin{array}{rcccc} \mathbf{Z}_{\geqslant 1} & \longrightarrow & \mathbf{Z}_{\geqslant 1} & \times & \mathbf{Z}_{\geqslant 1} \\ 1 & \longmapsto & (1 & , & 1) \\ 2 & \longmapsto & (1 & , & 2) \\ 3 & \longmapsto & (2 & , & 1) \\ 4 & \longmapsto & (1 & , & 3) \\ 5 & \longmapsto & (2 & , & 2) \\ 6 & \longmapsto & (3 & , & 1) \\ 7 & \longmapsto & (1 & , & 4) \\ 8 & \longmapsto & (2 & , & 3) \\ 9 & \longmapsto & (3 & , & 2) \\ 10 & \longmapsto & (4 & , & 1) \\ \vdots & & \vdots & & \end{array}$$

verwenden.

(4) Wir haben eine Surjektion $\mathbf{Z} \times (\mathbf{Z} \smallsetminus \{0\}) \longrightarrow \mathbf{Q}$, $(z,w) \longmapsto z/w$. Also genügt es zu zeigen, daß $\mathbf{Z} \times (\mathbf{Z} \smallsetminus \{0\})$ abzählbar ist. Mit (3) genügt es zu zeigen, daß $\mathbf{Z}$ und $\mathbf{Z} \smallsetminus \{0\}$ abzählbar sind. Mit (2) genügt es zu zeigen, daß $\mathbf{Z}$ abzählbar ist. Dazu kann man die Surjektion

$$\begin{array}{rcr} \mathbf{Z}_{\geqslant 1} & \longrightarrow & \mathbf{Z} \\ 1 & \longmapsto & 0 \\ 2 & \longmapsto & 1 \\ 3 & \longmapsto & -1 \\ 4 & \longmapsto & 2 \\ 5 & \longmapsto & -2 \\ 6 & \longmapsto & 3 \\ 7 & \longmapsto & -3 \\ \vdots & & \vdots \end{array}$$

verwenden.

(5) Nach Beispiel (4) aus §3.2 besitzt $\mathbf{R}^n$ die Basis

$$B \;=\; \{\mathrm{B}_\varepsilon(x) \;:\; x \in \mathbf{Q}^n,\; \varepsilon \in \mathbf{Q}_{>0}\}\;.$$

Wir haben also eine Surjektion $\mathbf{Q}^n \times \mathbf{Q}_{>0} \longrightarrow B$, $(x,\varepsilon) \longmapsto \mathrm{B}_\varepsilon(x)$. Somit genügt es zu zeigen, daß $\mathbf{Q}^n \times \mathbf{Q}_{>0}$ abzählbar ist.

Mit (3), iteriert angewandt, genügt es, dafür zu zeigen, daß $\mathbf{Q}$ und $\mathbf{Q}_{>0}$ abzählbar sind. Das aber folgt aus (4) und (2).

Es ist auch nicht schwierig zu zeigen, daß $\mathbf{R}$ **keine** abzählbare Menge ist. *Annahme,* doch. Dann ist auch das Intervall $(0,1)$ abzählbar. Sei $\mathbf{Z}_{\geqslant 1} \to (0,1)$, $i \mapsto x_i$ eine Surjektion. Sei $y \in (0,1)$ ein Dezimalbruch, der in der i-ten Nachkommastelle sich von x_i unterscheidet, und dies für alle $i \in \mathbf{Z}_{\geqslant 1}$. Insbesondere ist dann $y \neq x_i$ für alle $i \in \mathbf{Z}_{\geqslant 1}$, im *Widerspruch* zur Surjektivität unserer Abbildung. (Hierbei seien keine Neunerperioden in einer Dezimalbruchdarstellung zugelassen.)

Aufgabe 28

(1) Wir haben

$$\begin{array}{rcl} \{f_1^{-1}(V_1) \;:\; V_1 \overset{\text{off.}}{\subseteq} Y_1\} & = & \big\{\emptyset,\, \{1,4\},\, \{1,3,4\},\, \{1,2,4\},\, \{1,2,3,4\}\big\} \\ \{f_2^{-1}(V_2) \;:\; V_2 \overset{\text{off.}}{\subseteq} Y_2\} & = & \big\{\emptyset,\, \{1,3\},\, \{1,2,3,4\}\big\} \end{array}$$

Somit haben wir die von der Vereinigung

$$S \;:=\; \big\{\emptyset,\, \{1,3\},\, \{1,4\},\, \{1,2,4\},\, \{1,3,4\},\, \{1,2,3,4\}\big\}$$

dieser beiden Mengen erzeugte Topologie zu berechnen. Wir erhalten, in der Notation der Bemerkung von §3.1,

$$\begin{array}{rcl} S' & = & \big\{\emptyset,\, \{1\},\, \{1,3\},\, \{1,4\},\, \{1,2,4\},\, \{1,3,4\},\, \{1,2,3,4\}\big\} \\ S'' & = & \big\{\emptyset,\, \{1\},\, \{1,3\},\, \{1,4\},\, \{1,2,4\},\, \{1,3,4\},\, \{1,2,3,4\}\big\}\;. \end{array}$$

Es ist $T_{X,\,\text{initial},\,(f_1,f_2)} = S''$.

(2) Wir haben

$$\begin{array}{rcl} \{f_1^{-1}(V_1) \;:\; V_1 \overset{\text{off.}}{\subseteq} Y_1\} & = & \big\{\emptyset,\, \{1\},\, \{1,2,3\},\, \{1,4\},\, \{1,2,3,4\}\big\} \\ \{f_2^{-1}(V_2) \;:\; V_2 \overset{\text{off.}}{\subseteq} Y_2\} & = & \big\{\emptyset,\, \{2,4\},\, \{1,2,3,4\}\big\} \end{array}$$

Somit haben wir die von der Vereinigung

$$S \;:=\; \big\{\emptyset,\, \{1\},\, \{1,4\},\, \{2,4\},\, \{1,2,3\},\, \{1,2,3,4\}\big\}$$

dieser beiden Mengen erzeugte Topologie zu berechnen. Wir erhalten, in der Notation der Bemerkung von §3.1,

$$\begin{array}{rcl} S' & = & \big\{\emptyset,\, \{1\},\, \{2\},\, \{4\},\, \{1,4\},\, \{2,4\},\, \{1,2,3\},\, \{1,2,3,4\}\big\} \\ S'' & = & \big\{\emptyset,\, \{1\},\, \{2\},\, \{4\},\, \{1,2\},\, \{1,4\},\, \{2,4\},\, \{1,2,3\},\, \{1,2,4\},\, \{1,2,3,4\}\big\}\;. \end{array}$$

Es ist $T_{X,\,\text{initial},\,(f_1,f_2)} = S''$.

Aufgabe 29

Wir erhalten

$$\begin{array}{rl} & T_{X,\,\text{final},\,(f_1,f_2)} \\ = & \{U \subseteq X \;:\; f_1^{-1}(U) \overset{\text{off.}}{\subseteq} Y_1\} \,\cap\, \{U \subseteq X \;:\; f_2^{-1}(U) \overset{\text{off.}}{\subseteq} Y_2\} \\ = & \big\{\emptyset,\, \{1\},\, \{3\},\, \{1,2\},\, \{1,3\},\, \{1,4\},\, \{1,2,3\},\, \{1,2,4\},\, \{1,3,4\},\, \{1,2,3,4\}\big\} \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \cap\, \{U \subseteq X \;:\; f_2^{-1}(U) \overset{\text{off.}}{\subseteq} Y_2\} \\ = & \big\{\emptyset,\, \{3\},\, \{1,2\},\, \{1,2,3\},\, \{1,2,4\},\, \{1,2,3,4\}\big\}\;. \end{array}$$

Aufgabe 30

Wir haben

$$T_Y \;=\; \{g^{-1}(W) \;:\; W \overset{\text{off.}}{\subseteq} Z\}\;,$$

und also

$$\begin{array}{rcl} T_X & = & \{f^{-1}(V) \;:\; V \overset{\text{off.}}{\subseteq} Y\} \\ & = & \{f^{-1}(V) \;:\; V = g^{-1}(W) \text{ für ein } W \overset{\text{off.}}{\subseteq} Z\} \\ & = & \{f^{-1}(g^{-1}(W)) \;:\; W \overset{\text{off.}}{\subseteq} Z\} \\ & = & \{(g\circ f)^{-1}(W) \;:\; W \overset{\text{off.}}{\subseteq} Z\} \\ & = & T'_X\;. \end{array}$$

Aufgabe 31

Wir haben die stetige Abbildung

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{R} & \xrightarrow{f} & \mathbf{R}^2 \\ t & \longmapsto & f(t) := \left(\begin{smallmatrix} \cos(2\pi t) \\ \sin(2\pi t) \end{smallmatrix}\right)\;, \end{array}$$

wie aus der Analysis bekannt.

Wegen $(\sin x)^2 + (\cos x)^2 = 1$ für $x \in \mathbf{R}$ existiert $f|^{\mathrm{S}^1}$, ist stetig, und dazuhin, wie aus der Analysis bekannt, surjektiv.

Sind nun $t,\, t' \in \mathbf{R}$ mit $t - t' \in \mathbf{Z}$ gegeben, so ist $f(t) = \left(\begin{smallmatrix} \cos(2\pi t) \\ \sin(2\pi t) \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} \cos(2\pi t') \\ \sin(2\pi t') \end{smallmatrix}\right) = f(t')$, da $\sin x$ und $\cos x$ die Periode 2π besitzen. Somit gibt Beispiel (2) aus §3.3.2 die stetige Funktion

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{R}/(\sim) & \xrightarrow{\bar f} & \mathrm{S}^1 \\ [t]_\sim & \longmapsto & \bar f([t]_\sim) = f|^{\mathrm{S}^1}(t) = f(t) = \left(\begin{smallmatrix} \cos(2\pi t) \\ \sin(2\pi t) \end{smallmatrix}\right)\;, \end{array}$$

von der wir zeigen wollen, daß sie ein Homömorphismus ist. Sie ist zunächst einmal surjektiv, wie sich von $f|^{\mathrm{S}^1}$ vererbt.

Sind $t,\, t' \in \mathbf{R}$ so, daß $\binom{\cos(2\pi t)}{\sin(2\pi t)} = \bar{f}([t]_\sim) = \bar{f}([t']_\sim) = \binom{\cos(2\pi t')}{\sin(2\pi t')}$, so wird, wie aus der Analysis bekannt, $t - t' \in \mathbf{Z}$, und also $[t]_\sim = [t']_\sim$. Somit ist $\bar{f}$ injektiv.

Insgesamt ist $\bar{f}$ nun als bijektiv und stetig erkannt. Bleibt zu zeigen, daß $\bar{f}$ offen ist.

Schreibe $\mathbf{R} \xrightarrow{q} \mathbf{R}/(\sim)$, $t \longmapsto [t]_\sim$.

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{R} \arrow[r, "f|^{\mathrm{S}^1}"] \arrow[d, "q"'] & \mathrm{S}^1 \\
\mathbf{R}/(\sim) \arrow[ur, "\bar{f}"'] &
\end{tikzcd}$$

Ist $\bar{U} \subseteq \mathbf{R}/(\sim)$ offen, so auch $q^{-1}(\bar{U})$, und zu zeigen ist, daß

$$\bar{f}(\bar{U}) \;=\; (\bar{f} \circ q)(q^{-1}(U)) \;=\; f|^{\mathrm{S}^1}(q^{-1}(U)) \;\overset{\text{off.!}}{\subseteq}\; \mathrm{S}^1 \,.$$

Somit genügt es zu zeigen, daß $f|^{\mathrm{S}^1}$ offen ist.

Da die Intervalle der Form (a, b) mit $a,\, b \in \mathbf{R}$ und $a < b$ eine Basis von $\mathbf{R}$ bilden, und da Bild zu nehmen mit Vereinigung vertauscht, genügt es, $f\big((a, b)\big) \overset{\text{off.!}}{\subseteq} \mathrm{S}^1$ zu zeigen.

Mit einer Drehung, die umkehrbar linear und damit ein Homöomorphismus ist, vgl. Aufgabe 21.(5), und auch zu einem Homöomorphismus auf S^1 einschränkt, dürfen wir $a = 0$ annehmen.

Fall $b \in [0, 1/2]$. Dann ist

$$f\big((0, b)\big) \;=\; \{\tbinom{x}{y} \;:\; y > 0 \text{ und } x > \cos(2\pi b)\} \,\cap\, \mathrm{S}^1$$

und

$$\{\tbinom{x}{y} \;:\; y > 0 \text{ und } x > \cos(2\pi b)\} \;\overset{\text{off.}}{\subseteq}\; \mathbf{R}^2 \,.$$

Fall $b \in [1/2, 1]$. Dann ist

$$f\big((0, b)\big) \;=\; \{\tbinom{x}{y} \;:\; y > 0 \text{ oder } x < \cos(2\pi b)\} \,\cap\, \mathrm{S}^1$$

und

$$\{\tbinom{x}{y} \;:\; y > 0 \text{ oder } x < \cos(2\pi b)\} \;\overset{\text{off.}}{\subseteq}\; \mathbf{R}^2 \,.$$

Fall $b > 1$. Dann ist $f\big((0, b)\big) = \mathrm{S}^1$.

Jedenfalls ist $f\big((0, b)\big) \overset{\text{off.}}{\subseteq} \mathrm{S}^1$.

Aufgabe 32

(1) Gegeben ist $S \subseteq T_X$ mit $\langle S\rangle_X = T_X$. Sei $T_Y = \{\tilde{U} \cap Y \;:\; \tilde{U} \in T_X\}$ die Spurtopologie auf Y. Wir haben zu zeigen, daß

$$\langle\{U \cap Y \;:\; U \in S\}\rangle_Y \;\overset{!}{=}\; T_Y \;=\; \{\tilde{U} \cap Y \;:\; \tilde{U} \in T_X\} \,.$$

Zunächst ist $\{U \cap Y \;:\; U \in S\} \subseteq \{\tilde{U} \cap Y \;:\; \tilde{U} \in T_X\}$, da $S \subseteq T_X$.

Es bleibt zu zeigen, daß sich für jedes $\tilde{U} \in T_X$ die Menge $\tilde{U} \cap Y$ als beliebige Vereinigung endlicher Schnitte von Elementen von $\{U \cap Y \;:\; U \in S\}$ schreiben läßt; cf. Bemerkung (4) aus §3.1.

Da $\langle S\rangle_X = T_X$, können wir

$$\tilde{U} \;=\; \textstyle\bigcup_{i \in I} \bigcap_{j=1}^{k_i} U_{i,j}$$

schreiben, wobei I eine Indexmenge ist, $k_i \in \mathbf{Z}_{\geqslant 0}$ und $U_{i,j} \in S$; cf. Bemerkung (3) aus §3.1.
Es wird

$$\begin{aligned} \tilde{U} \cap Y &= \big(\bigcup_{i\in I} \bigcap_{j=1}^{k_i} U_{i,j}\big) \cap Y \\ &= \bigcup_{i\in I} \big(\big(\bigcap_{j=1}^{k_i} U_{i,j}\big) \cap Y\big) \\ &= \bigcup_{i\in I} \bigcap_{j=1}^{k_i} \big(U_{i,j} \cap Y\big)\ , \end{aligned}$$

wobei $U_{i,j} \cap Y \in \{U \cap Y \ :\ U \in S\}$, wie gewünscht.

(2) Wir wollen zeigen, daß $\{U \cap Y \ :\ U \in B\}$ eine Basis von Y ist. Sei $y \in V \overset{\text{off.}}{\subseteq} Y$. Wir haben ein $U \in B$ so zu finden, daß $y \in U \cap Y \subseteq V \subseteq Y$.

Da Y die Spurtoplogie trägt, können wir $V = \tilde{U} \cap Y$ für ein $\tilde{U} \overset{\text{off.}}{\subseteq} X$ schreiben. Insbesondere ist $y \in \tilde{U} \overset{\text{off.}}{\subseteq} X$. Da B eine Basis von X ist, existiert ein $U \in B$ mit $y \in U \subseteq \tilde{U} \overset{\text{off.}}{\subseteq} X$. Somit ist

$$y \ \in\ U \cap Y \ \subseteq\ \tilde{U} \cap Y = V \ \overset{\text{off.}}{\subseteq}\ X\ ,$$

wie verlangt.

Aufgabe 33

Halten wir zunächst fest, daß φ bijektiv ist.

Um die Stetigkeit von φ zu zeigen, müssen wir nur die Offenheit der Urbilder der der Subbasis aus §3.4 angehörigen Teilmengen überprüfen; cf. Lemma aus §3.1. Dazu sei $1 \leqslant i \leqslant n$ und $U_i \subseteq \mathbf{R}$ offen. Wir haben zu zeigen, daß

$$\varphi^{-1}\big(\pi_i^{-1}(U_i)\big) \ \overset{\text{off.!}}{\subseteq}\ \mathbf{R}^n\ .$$

Es ist aber $\varphi^{-1}\big(\pi_i^{-1}(U_i)\big) = (\pi_i \circ \varphi)^{-1}(U_i)$ und $\pi_i \circ \varphi : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}$, $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \longmapsto x_i$ stetig; cf. Aufgabe 21.(5).

Bleibt die Offenheit von φ nachzuweisen. Da Bild unter φ zu nehmen mit beliebigem Vereinigen vertauscht, genügt es Bilder unter φ einer Basis von $\mathbf{R}^n$ als offen in $\mathbf{R}^{\times n}$ nachzuweisen; cf. Bemerkung (1) in §3.2. Somit genügt es, für $x \in \mathbf{R}^n$ und $\varepsilon > 0$ das Bild $\varphi(\mathrm{B}_\varepsilon^{(\infty)}(x))$ als offen in $\mathbf{R}^{\times n}$ nachzuweisen; cf. Beispiel (3) in §3.2. Aber in der Tat ist

$$\begin{aligned} \varphi(\mathrm{B}_\varepsilon^{(\infty)}(x)) &= \varphi(\{y \in \mathbf{R}^n \ :\ \|y - x\|_\infty < \varepsilon\}) \\ &= \varphi(\{y \in \mathbf{R}^n \ :\ |y_i - x_i| < \varepsilon \text{ für } 1 \leqslant i \leqslant n\}) \\ &= \varphi(\textstyle\bigcap_{i=1}^n \{y \in \mathbf{R}^n \ :\ |y_i - x_i| < \varepsilon\}) \\ &\overset{\varphi \text{ inj.}}{=} \textstyle\bigcap_{i=1}^n \varphi(\{y \in \mathbf{R}^n \ :\ |y_i - x_i| < \varepsilon\}) \\ &= \textstyle\bigcap_{i=1}^n \{(y_1, \ldots, y_n) \in \mathbf{R}^{\times n} \ :\ |y_i - x_i| < \varepsilon\}) \\ &= \textstyle\bigcap_{i=1}^n \pi_i^{-1}\big((x_i - \varepsilon,\, x_i + \varepsilon)\big) \\ &\overset{\text{off.}}{\subseteq} \mathbf{R}^{\times n}\ , \end{aligned}$$

da $(x_i - \varepsilon,\, x_i + \varepsilon) \overset{\text{off.}}{\subseteq} \mathbf{R}$ für $1 \leqslant i \leqslant n$.

Aufgabe 34

(1) Für $x_1,\, x_2,\, x_3,\, x_4 \in X$ ist

$$d(x_1, x_4) \ \leqslant\ d(x_1, x_3) + d(x_3, x_4) \ \leqslant\ d(x_1, x_2) + d(x_2, x_3) + d(x_3, x_4)\ .$$

Genauso ist

$$d(x_2, x_3) \leqslant d(x_2, x_1) + d(x_1, x_4) + d(x_4, x_3) ,$$

und also

$$d(x_1, x_4) \geqslant -d(x_1, x_2) + d(x_2, x_3) - d(x_3, x_4) .$$

(2) Es genügt zu zeigen, daß $X \times X \longrightarrow \mathbf{R}$, $(x, y) \longmapsto d(x, y)$ stetig ist; vgl. zweite Bemerkung aus §2.1.1.

Eine Subbasis von $\mathbf{R}$ ist gegeben durch $\{\mathbf{R}_{>a} \;:\; a \in \mathbf{R}\} \cup \{\mathbf{R}_{<b} \;:\; b \in \mathbf{R}\}$; cf. Beispiel (2) aus §3.1.

Es genügt zu zeigen, daß $d^{-1}(\mathbf{R}_{>a}) \overset{\text{off.!}}{\subseteq} X \times X$ und $d^{-1}(\mathbf{R}_{<b}) \overset{\text{off.!}}{\subseteq} X \times X$ für a, $b \in \mathbf{R}$; vgl. Lemma aus §3.1.

Fall $d^{-1}(\mathbf{R}_{>a}) \overset{\text{off.!}}{\subseteq} X \times X$. Es genügt zu zeigen, daß es für alle $(x', x'') \in d^{-1}(\mathbf{R}_{>a})$, i.e. mit $d(x', x'') > a$, noch ein $(x', x'') \in U_{(x',x'')} \subseteq d^{-1}(\mathbf{R}_{>a})$ mit $U_{(x',x'')} \overset{\text{off.}}{\subseteq} X \times X$ gibt; vgl. Bemerkung aus §1.1.3.

Wir suchen ein $U_{(x',x'')}$ von der Form $\mathrm{B}_\varepsilon(x') \times \mathrm{B}_\varepsilon(x'')$ für ein gewisses, noch zu bestimmendes $\varepsilon \in \mathbf{R}_{>0}$. Ist $(\xi', \xi'') \in \mathrm{B}_\varepsilon(x') \times \mathrm{B}_\varepsilon(x'')$, dann ist $d(\xi', x') < \varepsilon$ und $d(\xi'', x'') < \varepsilon$. Mit (1) folgt zunächst

$$d(\xi', \xi'') \geqslant -d(\xi', x') + d(x', x'') - d(x'', \xi'') > -\varepsilon + d(x', x'') - \varepsilon .$$

Wählen wir nun $\varepsilon := \big(d(x', x'') - a\big)/2 > 0$, so können wir daraus schließen, daß $d(\xi', \xi'') > a$, i.e. daß $(\xi', \xi'') \in d^{-1}(\mathbf{R}_{>a})$. Somit ist für dieses ε in der Tat $\mathrm{B}_\varepsilon(x') \times \mathrm{B}_\varepsilon(x'') \subseteq d^{-1}(\mathbf{R}_{>a})$.

Fall $d^{-1}(\mathbf{R}_{<b}) \overset{\text{off.!}}{\subseteq} X \times X$. Es genügt zu zeigen, daß es für alle $(x', x'') \in d^{-1}(\mathbf{R}_{<b})$, i.e. mit $d(x', x'') < b$, noch ein $(x', x'') \in \tilde{U}_{(x',x'')} \subseteq d^{-1}(\mathbf{R}_{<b})$ mit $\tilde{U}_{(x',x'')} \overset{\text{off.}}{\subseteq} X \times X$ gibt; vgl. Bemerkung aus §1.1.3.

Wir suchen ein $\tilde{U}_{(x',x'')}$ von der Form $\mathrm{B}_{\tilde\varepsilon}(x') \times \mathrm{B}_{\tilde\varepsilon}(x'')$ für ein gewisses, noch zu bestimmendes $\tilde\varepsilon \in \mathbf{R}_{>0}$. Ist $(\xi', \xi'') \in \mathrm{B}_{\tilde\varepsilon}(x') \times \mathrm{B}_{\tilde\varepsilon}(x'')$, dann ist $d(\xi', x') < \tilde\varepsilon$ und $d(\xi'', x'') < \tilde\varepsilon$. Mit (1) folgt zunächst

$$d(\xi', \xi'') \leqslant d(\xi', x') + d(x', x'') + d(x'', \xi'') < \tilde\varepsilon + d(x', x'') + \tilde\varepsilon .$$

Wählen wir nun $\tilde\varepsilon := \big(b - d(x', x'')\big)/2 > 0$, so können wir daraus schließen, daß $d(\xi', \xi'') < b$, i.e. daß $(\xi', \xi'') \in d^{-1}(\mathbf{R}_{<b})$. Somit ist für dieses $\tilde\varepsilon$ in der Tat $\mathrm{B}_{\tilde\varepsilon}(x') \times \mathrm{B}_{\tilde\varepsilon}(x'') \subseteq d^{-1}(\mathbf{R}_{<b})$.

(3) *Vorbemerkung.* Für x, $\xi \in X$ ist

$$d_Y(x) - d(\xi, x) \leqslant d_Y(\xi) \leqslant d_Y(x) + d(\xi, x) .$$

Hierzu genügt es, die linke Ungleichung zu zeigen, die rechte folgt durch Vertauschen von ξ und x.

Sei $\varepsilon \in \mathbf{R}_{>0}$. Nach Definition von $d_Y(\xi)$ als größter unterer Schranke gibt es ein $y \in Y$ mit $d_Y(\xi) + \varepsilon > d(\xi, y)$. Es wird

$$\begin{array}{rcl} d_Y(\xi) & \geqslant & d(\xi, y) - \varepsilon \\ & \geqslant & -d(\xi, x) + d(x, y) - \varepsilon \\ & \geqslant & -d(\xi, x) + d_Y(x) - \varepsilon . \end{array}$$

Da dies für jedes $\varepsilon \in \mathbf{R}_{>0}$ zutrifft, folgt in der Tat $d_Y(\xi) \geqslant d_Y(x) - d(\xi, x)$. Dies zeigt die *Vorbemerkung.*

Zurück zur eigentlichen Aufgabe. Es genügt zu zeigen, daß $d_Y : X \longrightarrow \mathbf{R}$, $x \longmapsto d_Y(x)$ stetig ist; vgl. zweite Bemerkung aus §2.1.1.

Eine Subbasis von $\mathbf{R}$ ist gegeben durch $\{\mathbf{R}_{>a} \;:\; a \in \mathbf{R}\} \cup \{\mathbf{R}_{<b} \;:\; b \in \mathbf{R}\}$; cf. Beispiel (2) aus §3.1.

Es genügt zu zeigen, daß $d_Y^{-1}(\mathbf{R}_{>a}) \overset{\text{off.!}}{\subseteq} X$ und $d_Y^{-1}(\mathbf{R}_{<b}) \overset{\text{off.!}}{\subseteq} X$ für $a,\, b \in \mathbf{R}$; vgl. Lemma aus §3.1.

Fall $d_Y^{-1}(\mathbf{R}_{>a}) \overset{\text{off.!}}{\subseteq} X$. Nach Definition offener Teilmengen von X ist zu zeigen, daß für alle $x \in d_Y^{-1}(\mathbf{R}_{>a})$, i.e. mit $d_Y(x) > a$, ein $\varepsilon \in \mathbf{R}_{>0}$ mit $\mathrm{B}_\varepsilon(x) \subseteq d_Y^{-1}(\mathbf{R}_{>a})$ existiert.

Ist $\xi \in \mathrm{B}_\varepsilon(x)$, so ist $d(\xi, x) < \varepsilon$. Mit der Vorbemerkung ist zunächst

$$d_Y(\xi) \;\geqslant\; d_Y(x) - d(\xi, x) \;>\; d_Y(x) - \varepsilon\ .$$

Wählt man $\varepsilon := d_Y(x) - a > 0$, so können wir $d_Y(\xi) > a$, i.e. $\xi \in d_Y^{-1}(\mathbf{R}_{>a})$ schließen. Somit ist für dieses ε in der Tat $\mathrm{B}_\varepsilon(x) \subseteq d_Y^{-1}(\mathbf{R}_{>a})$.

Fall $d_Y^{-1}(\mathbf{R}_{<b}) \overset{\text{off.!}}{\subseteq} X$. Nach Definition offener Teilmengen von X ist zu zeigen, daß für alle $x \in d_Y^{-1}(\mathbf{R}_{<b})$, i.e. mit $d_Y(x) < b$, ein $\tilde\varepsilon \in \mathbf{R}_{>0}$ mit $\mathrm{B}_{\tilde\varepsilon}(x) \subseteq d_Y^{-1}(\mathbf{R}_{<b})$ existiert.

Ist $\xi \in \mathrm{B}_{\tilde\varepsilon}(x)$, so ist $d(\xi, x) < \tilde\varepsilon$. Mit der Vorbemerkung ist zunächst

$$d_Y(\xi) \;\leqslant\; d_Y(x) + d(\xi, x) \;<\; d_Y(x) + \tilde\varepsilon\ .$$

Wählt man $\tilde\varepsilon := b - d_Y(x) > 0$, so können wir $d_Y(\xi) < b$, i.e. $\xi \in d_Y^{-1}(\mathbf{R}_{<b})$ schließen. Somit ist für dieses $\tilde\varepsilon$ in der Tat $\mathrm{B}_{\tilde\varepsilon}(x) \subseteq d_Y^{-1}(\mathbf{R}_{<b})$.

(4) Schreibe $\|-\| := \|-\|_{\langle -,=\rangle}$, i.e. $\|x\| = \langle x, x\rangle^{1/2}$ für $x \in V$.

Eine Subbasis von $\mathbf{R}$ ist gegeben durch $\{\mathbf{R}_{>a} \;:\; a \in \mathbf{R}\} \cup \{\mathbf{R}_{<b} \;:\; b \in \mathbf{R}\}$; cf. Beispiel (2) aus §3.1.

Es genügt zu zeigen, daß $\langle -,=\rangle^{-1}(\mathbf{R}_{>a}) \overset{\text{off.!}}{\subseteq} V \times V$ und $\langle -,=\rangle^{-1}(\mathbf{R}_{<b}) \overset{\text{off.!}}{\subseteq} V \times V$ für $a,\, b \in \mathbf{R}$; vgl. Lemma aus §3.1.

Sei einmal allgemein $\delta \in \mathbf{R}_{>0}$ gegeben. Sei $(\xi, \eta) \in \mathrm{B}_\delta(x) \times \mathrm{B}_\delta(y)$, also $\|\xi - x\| < \delta$ und $\|\eta - y\| < \delta$. Mit Cauchy-Schwarz aus §1.3.4 wird

$$\begin{array}{rcl}
|\langle \xi, \eta\rangle - \langle x, y\rangle| & = & |\langle \xi, \eta\rangle - \langle \xi, y\rangle + \langle \xi, y\rangle - \langle x, y\rangle| \\
& = & |\langle \xi, \eta - y\rangle + \langle \xi - x, y\rangle| \\
& = & |\langle \xi, \eta - y\rangle - \langle x, \eta - y\rangle + \langle x, \eta - y\rangle + \langle \xi - x, y\rangle| \\
& = & |\langle \xi - x, \eta - y\rangle + \langle x, \eta - y\rangle + \langle \xi - x, y\rangle| \\
& \leqslant & |\langle \xi - x, \eta - y\rangle| + |\langle x, \eta - y\rangle| + |\langle \xi - x, y\rangle| \\
& \leqslant & \|\xi - x\| \cdot \|\eta - y\| + \|x\| \cdot \|\eta - y\| + \|\xi - x\| \cdot \|y\| \\
& < & \delta \cdot \delta + \|x\| \cdot \delta + \delta \cdot \|y\| \\
& = & \delta(\|x\| + \|y\| + \delta)\ .
\end{array}$$

Fall $\langle -,=\rangle^{-1}(\mathbf{R}_{>a}) \overset{\text{off.!}}{\subseteq} V \times V$. Sei $(x, y) \in \langle -,=\rangle^{-1}(\mathbf{R}_{>a})$, i.e. sei $\langle x, y\rangle > a$. Es genügt, ein $\varepsilon \in \mathbf{R}_{>0}$ so zu finden, daß $\mathrm{B}_\varepsilon(x) \times \mathrm{B}_\varepsilon(y) \subseteq \langle -,=\rangle^{-1}(\mathbf{R}_{>a})$. Wähle $\varepsilon \in \mathbf{R}_{>0}$ dazu so, daß $\varepsilon(\|x\| + \|y\| + \varepsilon) \leqslant \langle x, y\rangle - a$. Dann wird für $(\xi, \eta) \in \mathrm{B}_\varepsilon(x) \times \mathrm{B}_\varepsilon(y)$

$$\langle \xi, \eta\rangle \;>\; \langle x, y\rangle - \varepsilon(\|x\| + \|y\| + \varepsilon) \;\geqslant\; a\ ,$$

und also $(\xi, \eta) \in \langle -,=\rangle^{-1}(\mathbf{R}_{>a})$. Somit ist für dieses ε in der Tat $\mathrm{B}_\varepsilon(x) \times \mathrm{B}_\varepsilon(y) \subseteq \langle -,=\rangle^{-1}(\mathbf{R}_{>a})$.

Fall $\langle -,=\rangle^{-1}(\mathbf{R}_{<b}) \overset{\text{off.!}}{\subseteq} V \times V$. Sei $(x, y) \in \langle -,=\rangle^{-1}(\mathbf{R}_{<b})$, i.e. sei $\langle x, y\rangle < b$. Es genügt, ein $\tilde\varepsilon \in \mathbf{R}_{>0}$ so zu finden, daß $\mathrm{B}_{\tilde\varepsilon}(x) \times \mathrm{B}_{\tilde\varepsilon}(y) \subseteq \langle -,=\rangle^{-1}(\mathbf{R}_{<b})$. Wähle $\varepsilon \in \mathbf{R}_{>0}$ dazu so, daß $\varepsilon(\|x\| + \|y\| + \varepsilon) \leqslant b - \langle x, y\rangle$. Dann wird für $(\xi, \eta) \in \mathrm{B}_{\tilde\varepsilon}(x) \times \mathrm{B}_{\tilde\varepsilon}(y)$

$$\langle \xi, \eta\rangle \;<\; \langle x, y\rangle + \varepsilon(\|x\| + \|y\| + \varepsilon) \;\leqslant\; b\ ,$$

und also $(\xi, \eta) \in \langle -,=\rangle^{-1}(\mathbf{R}_{<b})$. Somit ist für dieses $\tilde\varepsilon$ in der Tat $\mathrm{B}_{\tilde\varepsilon}(x) \times \mathrm{B}_{\tilde\varepsilon}(y) \subseteq \langle -,=\rangle^{-1}(\mathbf{R}_{<b})$.

(5) Zu $\mathbf{R}\times\mathbf{R} \xrightarrow{(+)} \mathbf{R}$. Nach Aufgabe 21.(5) ist die lineare Abbildung $\mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$, $\binom{x}{y} \longmapsto x+y$ stetig. Mit Aufgabe 32 können wir nun zwei stetige Abbildungen zur fraglichen komponieren, nämlich

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{R}\times\mathbf{R} & \xrightarrow{\sim} & \mathbf{R}^2 & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \binom{x}{y} & \longmapsto & x+y\ , \end{array}$$

und auf diese Weise deren Stetigkeit belegen.

Zu $\mathbf{R}\times\mathbf{R} \xrightarrow{(\cdot)} \mathbf{R}$. Dies ist der Spezialfall $V=\mathbf{R}$ in (4); cf. Beispiel (1) aus §1.3.4.

Ist nun X ein topologischer Raum und sind $f,\,g\in \mathrm{C}(X)$ gegeben, so ist zunächst die Abbildung $X \xrightarrow{(f,g)} \mathbf{R}\times\mathbf{R}$, $x \longmapsto (f(x),g(x))$ stetig; cf. Bemerkung in §3.4.

Als Komposita sind also auch

$$\begin{array}{ccc} (X \xrightarrow{(f,g)} \mathbf{R}\times\mathbf{R} \xrightarrow{(+)} \mathbf{R}) & = & (X \xrightarrow{f+g} \mathbf{R}) \\ (X \xrightarrow{(f,g)} \mathbf{R}\times\mathbf{R} \xrightarrow{(\cdot)} \mathbf{R}) & = & (X \xrightarrow{f\cdot g} \mathbf{R}) \end{array}$$

stetig, i.e. $f+g,\ f\cdot g\in \mathrm{C}(X)$.

Aufgabe 35

(1) Wir wollen zeigen, daß

$$\begin{array}{ccccccccccc} (X & \times & Y) & \times & Z & \longrightarrow & X & \times & Y & \times & Z \\ ((x & , & y) & , & z) & \longmapsto & (x & , & y & , & z) \end{array}$$

ein Homöomorphismus ist.

Wir haben die stetigen Projektionsabbildungen

$$\begin{array}{cccccccc} (X & \times & Y) & \times & Z & \xrightarrow{\pi_{X\times Y}} & X\times Y \\ ((x & , & y) & , & z) & \longmapsto & (x,y) \\ (X & \times & Y) & \times & Z & \xrightarrow{\pi_Z} & Z \\ ((x & , & y) & , & z) & \longmapsto & z \end{array}$$

Analog haben wir die stetigen Projektionsabbildungen $X\times Y \xrightarrow{\pi_X} X$ und $X\times Y \xrightarrow{\pi_Y} Y$. Die fragliche Abbildung läßt sich

$$(\pi_X\circ\pi_{X\times Y},\ \pi_Y\circ\pi_{X\times Y},\ \pi_Z)\ :\ (X\times Y)\times Z \longrightarrow X\times Y\times Z$$

schreiben, und ist somit stetig; vgl. Bemerkung in §3.4.

Wir haben auch noch die stetigen Projektionsabbildungen $X\times Y\times Z \xrightarrow{\pi_X} X$, $X\times Y\times Z \xrightarrow{\pi_Y} Y$ und $X\times Y\times Z \xrightarrow{\pi_Z} Z$.

Die Umkehrabbildung der fraglichen Abbildung läßt sich

$$((\pi_X,\pi_Y),\pi_Z)\ :\ X\times Y\times Z \longrightarrow (X\times Y)\times Z$$

schreiben, und ist somit ebenfalls stetig.

Nach Aufgabe 19.(2) ist die fragliche Abbildung also ein Homöomorphismus.

Nun wollen wir zeigen, daß

$$\begin{array}{ccccccc} X & \times & Y & \longrightarrow & Y & \times & X \\ (x & , & y) & \longmapsto & (y & , & x) \end{array}$$

ein Homöomorphismus ist.

Wir haben die stetigen Projektionsabbildungen $X \times Y \xrightarrow{\pi_X} X$, $X \times Y \xrightarrow{\pi_Y} Y$, $Y \times X \xrightarrow{\pi_X} X$ und $Y \times X \xrightarrow{\pi_Y} Y$.

Die fragliche Abbildung läßt sich

$$(\pi_Y, \pi_X) \; : \; X \times Y \longrightarrow Y \times X$$

schreiben, und ist somit stetig. Ihre Umkehrabbildung läßt sich

$$(\pi_X, \pi_Y) \; : \; Y \times X \longrightarrow Y \times X$$

schreiben, und ist somit stetig.

Nach Aufgabe 19.(2) ist die fragliche Abbildung also ein Homöomorphismus.

(2) Eine Basis von $\prod_{i=1}^k X_i$ ist gegeben durch $\{\prod_{i=1}^k U_i \; : \; U_i \overset{\text{off.}}{\subseteq} X\}$. Denn der Subbasis von $\prod_{i=1}^k X_i$ aus §3.4 entnimmt man zunächst, daß diese Menge aus offenen Teilmengen von $\prod_{i=1}^k X_i$ besteht. Da sie ferner die Subbasis umfaßt, ist sie selbst eine Subbasis. Da sie schließlich unter Schnitten je zweier ihrer Elemente abgeschlossen ist, ist sie eine Basis; cf. Aufgabe 25.(2).

Nach Aufgabe 32.(2) ist also eine Basis von $\prod_{i=1}^k X'_i$ für die Spurtopologie bezüglich $\prod_{i=1}^k X'_i \subseteq \prod_{i=1}^k X_i$ gegeben durch

$$\big\{\big(\prod_{i=1}^k U_i\big) \cap \big(\prod_{i=1}^k X'_i\big) \; : \; U_i \overset{\text{off.}}{\subseteq} X \text{ für } 1 \leqslant i \leqslant k\big\} \; .$$

Auf der anderen Seite ist eine offene Menge von X'_i in der Spurtopologie bezüglich $X'_i \subseteq X_i$ von der Form $U_i \cap X'_i$ für ein $U_i \overset{\text{off.}}{\subseteq} X_i$, wobei $1 \leqslant i \leqslant k$. Also ist eine Basis von $\prod_{i=1}^k X'_i$ für die Produkttopologie der Spurtopologien auf den X'_i gegeben durch

$$\big\{\prod_{i=1}^k (U_i \cap X'_i) \; : \; U_i \overset{\text{off.}}{\subseteq} X \text{ für } 1 \leqslant i \leqslant k\big\} \; .$$

Nun ist aber $\big(\prod_{i=1}^k U_i\big) \cap \big(\prod_{i=1}^k X'_i\big) = \prod_{i=1}^k (U_i \cap X'_i)$, und somit stimmen diese beiden Basen überein. Also stimmen auch die von ihnen erzeugte Topologien überein, als da wären zum einen die Spurtopologie bezüglich der Einbettung in die Produkttopologie und zum anderen die Produkttopologie der Spurtopologien.

Aufgabe 36

(1) Wir haben zu zeigen, daß $X \setminus \{x\} \overset{\text{off.}}{\subseteq} X$. Es genügt, für $x' \in X \setminus \{x\}$ ein $x' \in U' \subseteq X \setminus \{x'\}$ mit $U' \overset{\text{off.}}{\subseteq} X$ zu finden; vgl. Bemerkung aus §1.1.3.

Sei $x' \in X \setminus \{x\}$. Da X hausdorffsch ist, gibt es $x \in U \overset{\text{off.}}{\subseteq} X$ und $x' \in U' \overset{\text{off.}}{\subseteq} X$ mit $U \cap U' = \emptyset$. Insbesondere ist $x \notin U'$, und somit $U' \subseteq X \setminus \{x\}$.

(2) Seien (x, y), $(x', y') \in X \times Y$ mit $(x, y) \neq (x', y')$. Dann ist $x \neq x'$ oder $y \neq y'$.

O.E. sei $x \neq x'$. Da X hausdorffsch ist, gibt es $x \in U \overset{\text{off.}}{\subseteq} X$ und $x' \in U' \overset{\text{off.}}{\subseteq} X$ mit $U \cap U' = \emptyset$. Dann ist $(x, y) \in U \times Y \overset{\text{off.}}{\subseteq} X \times Y$ und $(x', y) \in U' \times Y \overset{\text{off.}}{\subseteq} X \times Y$; cf. erstes Beispiel in §3.4. Es folgt $(U \times Y) \cap (U' \times Y) = (U \cap U') \times Y = \emptyset \times Y = \emptyset$.

Dies zeigt, daß $X \times Y$ hausdorffsch ist.

(3) Sei $x \in X$. Wir wollen zeigen, daß $\{x\} \overset{\text{off.}}{\subseteq} X$. Denn dann folgt mit (Top 2), daß jede Teilmenge von X offen ist, da ich sie schreiben kann als Vereinigung von einelementigen und also offenen Teilmengen.

Sei $V \subseteq X$ eine (bzgl. Teilmengenrelation) minimale x enthaltende offene Teilmenge von X. In anderen Worten, es ist $x \in V \overset{\text{off.}}{\subseteq} X$, und es gibt kein $\tilde{V} \overset{\text{off.}}{\subseteq} X$ mit $x \in \tilde{V} \subsetneq V$. Ein solches V existiert, da wegen der Endlichkeit von X jede nichtleere Teilmenge in $\operatorname{Pot}(X)$ wenigstens ein minimales Element enthält, und da wegen $x \in X \overset{\text{off.}}{\subseteq} X$ die fragliche Teilmenge $\{V \subseteq X \;:\; x \in V \overset{\text{off.}}{\subseteq} X\}$ auch nichtleer ist.

Es genügt zu zeigen, daß $\{x\} = V$. *Annahme,* nicht. Dann ist $\{x\} \subsetneq V \overset{\text{off.}}{\subseteq} X$. Sei $x' \in V \smallsetminus \{x\}$. Da X hausdorffsch ist, gibt es ein $x \in U \overset{\text{off.}}{\subseteq} X$ und ein $x' \in U' \overset{\text{off.}}{\subseteq} X$ mit $U \cap U' = \emptyset$. Dann aber ist $x \in U \cap V \overset{\text{off.}}{\subseteq} X$. Ferner ist $U \cap V \subsetneq V$, da $x' \in V$, aber $x' \notin U$. Somit gibt $U \cap V$ einen *Widerspruch* zur Minimalität von V.

Aufgabe 37

Beachte zunächst, daß auch $Y \xrightarrow{f^{-1}} X$ ein Homöomorphismus ist; cf. zweite Bemerkung aus §2.1.3. Vgl. auch Aufgabe 19. Die Situation ist also symmetrisch in X und Y.

(1) Wegen der Symmetrie der Situation genügt es, aus X hausdorffsch zu folgern, daß Y hausdorffsch ist.

Seien $y,\, y' \in Y$ mit $y \neq y'$ gegeben. Dann ist wegen f^{-1} injektiv auch $f^{-1}(y) \neq f^{-1}(y')$ in X. Da X hausdorffsch ist, gibt es $f^{-1}(y) \in U \overset{\text{off.}}{\subseteq} X$ und $f^{-1}(y') \in U' \overset{\text{off.}}{\subseteq} X$ mit $U \cap U' = \emptyset$. Wegen f injektiv und offen folgt $y \in f(U) \overset{\text{off.}}{\subseteq} X$ und $y' \in f(U') \overset{\text{off.}}{\subseteq} X$ und $f(U) \cap f(U') = f(U \cap U') = f(\emptyset) = \emptyset$. Somit ist Y als hausdorffsch nachgewiesen.

(2) Wegen der Symmetrie der Situation genügt es, aus X kompakt zu folgern, daß Y kompakt ist.

Wegen f surjektiv ist aber $f(X) = Y$, und $f(X)$ ist als Bild eines kompakten topologischen Raumes unter einer stetigen Abbildung wieder kompakt; vgl. Lemma (3) aus §4.2.1.

Aufgabe 38

Die Aussage ist falsch.

Sei $Y := \mathbf{R} \sqcup \mathbf{R} = \{(i,x) \;:\; i \in \{1,2\},\, x \in \mathbf{R}\}$; cf. §3.5. Sei $(\sim)$ die Äquivalenzrelation auf Y mit der Menge der Äquivalenzklassen

$$X \;:=\; Y/(\sim) \;:=\; \big\{\{(1,x),(2,x)\} \;:\; x \in \mathbf{R} \smallsetminus \{0\}\big\} \sqcup \big\{\{(1,0)\}\big\} \sqcup \big\{\{(2,0)\}\big\}\;.$$

Sei X mit der finalen Topologie bezüglich der Abbildung $Y \xrightarrow{r} X$, $y \longmapsto [y]$ ausgestattet, wobei $[y]$ die Äquivalenzklasse von y bezeichne. In anderen Worten, eine Teilmenge $W \subseteq X$ ist genau dann offen, wenn $r^{-1}(W)$ offen in Y ist; cf. §3.3.2.

Anschaulich gesprochen, es entstand X daraus, daß zwei Geraden überall außer am Nullpunkt verklebt wurden; wir erhalten eine Gerade mit einem Doppelpunkt bei 0.

Schreibe $u := [(1,0)]$ und $v := [(2,0)]$. Sei $U := Y \smallsetminus \{v\}$. Sei $V := Y \smallsetminus \{u\}$. Also $u \in U$ und $v \in V$. Es ist $r^{-1}(U) = \mathbf{R} \sqcup (\mathbf{R} \smallsetminus \{0\}) \overset{\text{off.}}{\subseteq} \mathbf{R} \sqcup \mathbf{R}$; cf. §3.5. Also ist $U \overset{\text{off.}}{\subseteq} X$. Genauso ist auch $V \overset{\text{off.}}{\subseteq} X$. Es ist $U \cap V = X$.

Wir *behaupten,* daß X nicht hausdorffsch ist. Sei $u \in \tilde{U} \overset{\text{off.}}{\subseteq} X$ und $v \in \tilde{V} \overset{\text{off.}}{\subseteq} X$. Dann ist $(1,0) \in r^{-1}(\tilde{U}) \overset{\text{off.}}{\subseteq} X$ und $(2,0) \in r^{-1}(\tilde{V}) \overset{\text{off.}}{\subseteq} X$. Also ist, in Standardbezeichnung, $0 \in \iota_1^{-1} r^{-1}(\tilde{U}) \overset{\text{off.}}{\subseteq} \mathbf{R}$ und $0 \in \iota_2^{-1} r^{-1}(\tilde{V}) \overset{\text{off.}}{\subseteq} \mathbf{R}$. Folglich gibt es ein $\varepsilon \in \mathbf{R}_{>0}$ mit

$$(-\varepsilon, +\varepsilon) \;\subseteq\; \iota_1^{-1} r^{-1}(\tilde{U}) \cap \iota_2^{-1} r^{-1}(\tilde{V})\;.$$

Also ist $r\iota_1(\varepsilon/2) \in \tilde{U}$ und $r\iota_2(\varepsilon/2) \in \tilde{V}$. Aber $r\iota_1(\varepsilon/2) = [(1,\varepsilon/2)] = [(2,\varepsilon/2)] = r\iota_2(\varepsilon/2)$. Also ist $\tilde{U} \cap \tilde{V} \neq \emptyset$. Dies zeigt die *Behauptung.*

Wir *behaupten,* daß U und V hausdorffsch sind. Dank Symmetrie genügt es zu zeigen, daß U homöomorph zu $\mathbf{R}$ ist; cf. Beispiel (2) aus §4.1.1, Aufgabe 37.(1). Wir haben die stetige Abbildung

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{[\mathrm{id}\ \ \mathrm{id}]} & \mathbf{R} \\ (i,x) & \longmapsto & x\ ; \end{array}$$

cf. §3.5. Daraus hervor geht die stetige Abbildung

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{k} & \mathbf{R} \\ [(i,x)] & \longmapsto & x\ ; \end{array}$$

cf. Bemerkung (3) aus §3.3.2. Es sind

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \xrightarrow{(\iota_1 r)|^U} & U \\ x & \longmapsto & [(1,x)] \end{array}$$

und

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{k|_U} & \mathbf{R} \\ [(1,x)] & \longmapsto & x \end{array}$$

sich invertierende stetige Abbildungen; cf. zweite Bemerkung in §2.1.1. Dies zeigt die *Behauptung.*

Insgesamt ist also $U \cup V = X$ nicht hausdorffsch, wohl aber sind es U und V.

Aufgabe 39

Sei $X = \bigcup_{i\in I} U_i$ eine offene Überdeckung, wobei I eine Indexmenge ist und $U_i \overset{\text{off.}}{\subseteq} X$ für $i \in I$.

Sei $1 \leqslant j \leqslant k$. Dann ist $Y_j = \bigcup_{i\in I} U_i \cap Y_j$ eine offene Überdeckung von Y_j. Da Y_j als kompakt vorausgesetzt wurde, gibt es eine endliche Teilmenge $I_j \subseteq I$ mit

$$Y_j \;=\; \textstyle\bigcup_{i\in I_j} U_i \cap Y_j\ ,$$

also mit $Y_j \subseteq \bigcup_{i\in I_j} U_i$.

Sei $I' := \bigcup_{j=1}^{k} I_j$. Es ist I' eine endliche Teilmenge von I. Somit genügt es zu zeigen, daß $\bigcup_{i\in I'} U_i \overset{!}{=} X$.

Sei $x \in X$. Dann gibt es ein $1 \leqslant j \leqslant k$ mit $x \in Y_j$. Also ist

$$x \;\in\; Y_j \;\subseteq\; \textstyle\bigcup_{i\in I_j} U_i \;\subseteq\; \bigcup_{i\in I'} U_i\ .$$

Aufgabe 40

Wir *behaupten,* daß

$$B \;:=\; \{\mathrm{B}_\varepsilon(x) \;:\; x \in D,\ \varepsilon \in \mathbf{Q}_{>0}\}$$

abzählbar ist. Wir haben eine Surjektion $D \times \mathbf{Q}_{>0} \longrightarrow B$, $(x,\varepsilon) \longmapsto \mathrm{B}_\varepsilon(x)$.

Da D als abzählbar vorausgesetzt ist, und $\mathbf{Q}_{>0}$ nach Aufgabe 27 (4, 2) abzählbar ist, ist auch $D \times \mathbf{Q}_{>0}$ abzählbar; vgl. Aufgabe 27.(3). Somit ist B abzählbar; vgl. Aufgabe 27.(1). Dies zeigt die *Behauptung.*

Bleibt zu zeigen, daß B eine Basis von X ist. Zunächst halten wir fest, daß B aus offenen Teilmengen von X besteht; vgl. Lemma aus §1.3.2.

Sei $\xi \in U \overset{\text{off.}}{\subseteq} X$. Wir haben ein $\varepsilon \in \mathbf{Q}_{>0}$ und ein $x \in D$ mit $\xi \in \mathrm{B}_\varepsilon(x) \subseteq U$ zu finden.

Sei $\eta \in \mathbf{R}_{>0}$ mit $\xi \in \mathrm{B}_\eta(\xi) \subseteq U \overset{\text{off.}}{\subseteq} X$.

Sei $\varepsilon \in \mathbf{Q}_{>0} \cap (0, \eta/2]$; cf. Beispiel (4) aus §3.2.

Es ist $D \cap \mathrm{B}_\varepsilon(\xi) \neq \emptyset$; cf. Bemerkung aus §4.1.2. Wähle $x \in D \cap \mathrm{B}_\varepsilon(\xi)$. Dann ist $\xi \in \mathrm{B}_\varepsilon(x)$.

Bleibt zu zeigen, daß $\mathrm{B}_\varepsilon(x) \subseteq U$. Es genügt zu zeigen, daß $\mathrm{B}_\varepsilon(x) \overset{!}{\subseteq} \mathrm{B}_\eta(\xi) \subseteq U$.

Sei $y \in \mathrm{B}_\varepsilon(x)$. Dann ist

$$d(y,\xi) \;\leqslant\; d(y,x) + d(x,\xi) \;<\; \varepsilon + \varepsilon \;\leqslant\; \eta \,,$$

und also $y \in \mathrm{B}_\eta(\xi)$, wie wir zu zeigen hatten.

Aufgabe 41

Zu $\supseteq$. Es ist $A^\circ \times B^\circ \overset{\text{off.}}{\subseteq} X \times Y$; vgl. das erste Beispiel aus §3.4. Dazuhin ist $A^\circ \times B^\circ \subseteq A \times B$. Also ist $A^\circ \times B^\circ \subseteq (A \times B)^\circ$; cf. Bemerkung (3) aus §1.4.

Zu $\subseteq$. Sei $(x,y) \in (A \times B)^\circ$. Die Basis aus dem ersten Beispiel aus §3.4 gibt $U \overset{\text{off.}}{\subseteq} X$ und $V \overset{\text{off.}}{\subseteq} Y$ mit

$$(x,y) \;\in\; U \times V \;\subseteq\; (A \times B)^\circ \,.$$

Da $U \times V \subseteq (A \times B)^\circ \subseteq A \times B$, folgt $U \subseteq A$ und $V \subseteq B$. Also ist $U \subseteq A^\circ$ und $V \subseteq B^\circ$; cf. Bemerkung (3) aus §1.4. Es wird

$$(x,y) \;\in\; U \times V \;\subseteq\; A^\circ \times B^\circ \,.$$

Somit haben wir $(A \times B)^\circ \subseteq A^\circ \times B^\circ$ gezeigt, wie gewünscht.

Aufgabe 42

(1) *Annahme,* nicht. Sei also $x \in X \smallsetminus Y$. Es ist $X \smallsetminus Y \overset{\text{off.}}{\subseteq} X$. Da x ein Häufungspunkt von (y_n) ist, ist

$$\{n \in \mathbf{Z}_{\geqslant 1} \;:\; y_n \in X \smallsetminus Y\}$$

unendlich. Da aber $y_n \in Y$ für alle $n \in \mathbf{Z}_{\geqslant 1}$, ist diese Menge leer, und wir haben einen *Widerspruch.*

(2) Gibt es zum einen eine Folge $(y_n)_n$ in Y, die gegen x konvergiert, dann ist dies auch eine Folge in $\bar{Y} \overset{\text{abg.}}{\subseteq} X$, und nach (1) können wir $x \in \bar{Y}$ folgern.

Sei umgekehrt $x \in \bar{Y}$. Nach Lemma (2) in §1.4 ist $\mathrm{B}_{1/n}(x) \cap Y \neq \emptyset$ für $n \in \mathbf{Z}_{\geqslant 1}$, so daß wir darin ein y_n wählen können. Bleibt zu zeigen, daß die so entstandene Folge $(y_n)_n$ gegen x konvergiert. Sei $\varepsilon \in \mathbf{R}_{>0}$. Dann ist $d(y_n, x) < 1/n \leqslant \varepsilon$ für alle $n \in \mathbf{Z}_{\geqslant 1}$ mit $n \geqslant 1/\varepsilon$.

(3) Zeigen wir zunächst, daß es ein $C \in \mathbf{R}$ so gibt, daß $f(x) \leqslant C$ für alle $x \in X$.

Annahme, nicht. Dann gibt es für alle $n \in \mathbf{Z}_{\geqslant 1}$ ein $x_n \in X$ mit $f(x_n) \geqslant n$. Sei $(y_n)_n$ eine konvergente Teilfolge von $(x_n)_n$, existent, da X als folgenkompakt vorausgesetzt ist. Dann ist immer noch $f(y_n) \geqslant n$ für $n \in \mathbf{Z}_{\geqslant 1}$. Sei y ein Konvergenzpunkt von $(y_n)_n$. Dann ist $f(y)$ ein Konvergenzpunkt von $\big(f(y_n)\big)_n$; cf. Bemerkung in §4.2.7. Also gibt es ein $m \in \mathbf{Z}_{\geqslant 1}$ mit $|f(y_n) - f(y)| < 1$ für alle $n \in \mathbf{Z}_{\geqslant m}$. Insbesondere ist $n \leqslant f(y_n) \leqslant f(y) + 1$ für alle $n \in \mathbf{Z}_{\geqslant m}$, und wir haben einen *Widerspruch.*

Insbesondere können wir $s := \sup_{x \in X} f(x)$ bilden.

Zeigen wir nun, daß es ein $\hat{x} \in X$ gibt mit $f(x) \leqslant f(\hat{x})$ für alle $x \in X$.

Wir finden für alle $n \in \mathbf{Z}_{\geqslant 1}$ ein $x_n \in X$ mit $f(x_n) \in (s - 1/n, s]$. Sei $(y_n)_n$ eine konvergente Teilfolge von $(x_n)_n$, existent, da X als folgenkompakt vorausgesetzt ist. Dann ist immer noch

$f(y_n) \in (s - 1/n, s]$ für $n \in \mathbf{Z}_{\geqslant 1}$. Sei $\hat{x}$ ein Konvergenzpunkt von $(y_n)_n$. Dann ist $f(\hat{x})$ ein Konvergenzpunkt von $\big(f(y_n)\big)_n$; cf. Bemerkung in §4.2.7.

Nun ist aber auch s ein Konvergenzpunkt von $\big(f(y_n)\big)_n$. Denn sei $\varepsilon \in \mathbf{R}_{>0}$ vorgegeben. Dann ist $f(x_n) \in (s - 1/n, s] \subseteq (s - \varepsilon, s + \varepsilon)$ für alle $n \geqslant 1/\varepsilon$.

Da $\mathbf{R}$ hausdorffsch ist, folgt $s = \lim_n f(x_n) = f(\hat{x})$; cf. erste Bemerkung in §4.2.5. Insbesondere ist $f(\hat{x}) = s = \sup_{x \in X} f(x)$ eine obere Schranke für $f(x)$ mit $x \in X$, wie in der Aufgabenstellung verlangt.

Cf. §4.2.3 für die analoge Aussage über kompakte Räume.

(4) *Annahme,* nicht. Dann gibt es für alle $n \in \mathbf{Z}_{\geqslant 1}$ ein $k_n \in K$ und ein $x_n \in X$ mit $d(k_n, x_n) < 1/n$. Sei $(k_{\varphi(m)})_m$ eine konvergente Teilfolge von $(k_n)_n$, existent, da K als folgenkompakt vorausgesetzt war. Sei $k := \lim_m k_{\varphi(m)}$. Dann ist $d(k_{\varphi(m)}, x_{\varphi(m)}) < 1/\varphi(m) \leqslant 1/m$ für $m \in \mathbf{Z}_{\geqslant 1}$.

Wir *behaupten,* daß $(x_{\varphi(m)})_m$ gegen k konvergiert. Sei $\eta \in \mathbf{R}_{>0}$ vorgegeben. Sei $\ell \in \mathbf{Z}_{\geqslant 1}$ so, daß zum einen $d(k_{\varphi(m)}, x_{\varphi(m)}) < \eta/2$ und zum anderen $d(k_{\varphi(m)}, k) < \eta/2$ für $m \in \mathbf{Z}_{\geqslant \ell}$ ist. Für ersteres reicht es, $\ell \geqslant 2/\eta$ zu wählen. Zweiteres entstammt der Konvergenz von $(k_{\varphi(m)})_m$ gegen k. Dann wird

$$d(x_{\varphi(m)}, k) \;\leqslant\; d(x_{\varphi(m)}, k_{\varphi(m)}) + d(k_{\varphi(m)}, k) \;<\; \eta/2 + \eta/2 \;=\; \eta$$

für $m \in \mathbf{Z}_{\geqslant \ell}$. Dies zeigt die *Behauptung.*

Da aber $X \smallsetminus U \overset{\text{abg.}}{\subseteq} X$ und $x_{\varphi(m)} \in X \smallsetminus U$ für $m \in \mathbf{Z}_{\geqslant 1}$, ist auch $k = \lim_m x_{\varphi(m)} \in X \smallsetminus U$; cf. (1). Dies steht aber im *Widerspruch* zu $k \in K \subseteq U$.

Aufgabe 43

(1) Die Aussage ist richtig. Denn sei $x \in U \overset{\text{off.}}{\subseteq} X$ gegeben. Dann ist $\{n \in \mathbf{Z}_{\geqslant 1} \;:\; x_n \notin U\}$ leer, da $x_n = x \in U$ für alle $n \in \mathbf{Z}_{\geqslant 1}$. Insbesondere ist diese Menge endlich.

(2) Die Aussage ist falsch. Sei $X = \{1, 2\}$, ausgestattet mit der verklumpten Topologie $\big\{\emptyset, \{1, 2\}\big\}$; vgl. §1.2.3.1. Sei

$$(x_n)_n \;:=\; (1, 2, 1, 2, \dots)$$

Es ist 1 ein Konvergenzpunkt dieser Folge, da die einzige $\{1\}$ umfassende offene Teilmenge von X gleich der vollen Teilmenge X ist. Und für diese ist $\{n \in \mathbf{Z}_{\geqslant 1} \;:\; x_n \notin X\}$ leer, und damit endlich.

Genauso ist 2 ein Konvergenzpunkt dieser Folge.

Aber $1 \neq 2$.

(3) Die Aussage ist falsch. Sei $X = \mathbf{Q}$, sei $d(x, y) := |x - y|$ für $x,\, y \in \mathbf{Q}$. Es ist X also ein metrischer Teilraum von $\mathbf{R}$; vgl. Aufgabe 7.(1).

Sei $\xi \in \mathbf{R} \smallsetminus \mathbf{Q}$. So z.B. können wir $\xi = \sqrt{2}$ nehmen. Sei $x_n := 10^{-n} \lfloor 10^n \xi \rfloor \in \mathbf{Q}$ für $n \in \mathbf{Z}_{\geqslant 1}$. Dann ist $\xi - x_n \in [0, 10^{-n})$; cf. Beispiel (4) aus §3.2.

Es ist $(x_n)_n$, betrachtet als Folge in $\mathbf{R}$, eine gegen ξ konvergierende Folge, da für $\varepsilon \in \mathbf{R}_{>0}$ bereits $d(x_n, \xi) < 10^{-n} \leqslant \varepsilon$ gilt, sobald $n \geqslant -\log_{10} \varepsilon$.

Würde nun $(x_n)_n$ in $\mathbf{Q}$ gegen $\xi' \in \mathbf{Q}$ konvergieren, so hätte man diesen Konvergenzpunkt auch, wenn man $(x_n)_n$ als Folge in $\mathbf{R}$ betrachtet. Da aber $\mathbf{R}$ hausdorffsch ist, folgte $\xi = \xi'$, was wegen $\xi \in \mathbf{R} \smallsetminus \mathbf{Q}$ und $\xi' \in \mathbf{Q}$ nicht geht; cf. erste Bemerkung in §4.2.4. Also ist $(x_n)_n$ keine konvergente Folge in $\mathbf{Q}$.

Zeigen wir, daß die Folge $(x_n)_n$ die in der Aufgabenstellung beschriebene Eigenschaft hat. Sei $\varepsilon \in \mathbf{R}_{>0}$ vorgegeben. Da $(x_n)_n$, gesehen als Folge in $\mathbf{R}$, gegen ξ konvergiert, gibt es ein $m \in \mathbf{Z}_{\geqslant 1}$ mit $|x_n - \xi| < \varepsilon/2$ für $n \in \mathbf{Z}_{\geqslant m}$. Dann wird in der Tat

$$d(x_n, x_{n'}) \;=\; |x_n - x_{n'}| \;=\; |x_n - \xi + \xi - x_{n'}| \;\leqslant\; |x_n - \xi| + |\xi - x_{n'}| \;<\; \varepsilon/2 + \varepsilon/2 \;=\; \varepsilon$$

für $n,\, n' \in \mathbf{Z}_{\geqslant m}$.

Eine Folge wie in der Aufgabenstellung beschrieben heißt auch *Cauchyfolge.* Ein metrischer Raum, in welchem jede Cauchyfolge konvergiert, heißt *vollständig.* Wir haben also in (3) gesehen, daß $\mathbf{Q}$ nicht vollständig ist.

Aufgabe 44

(1) Sei $(x,y) \subseteq W \overset{\text{off.}}{\subseteq} X \times Y$. Wir haben zu zeigen, daß $\{n \in \mathbf{Z}_{\geqslant 1} \;:\; (x_n, y_n) \notin W\}$ endlich ist. Unter Verwendung der Basis von $X \times Y$ aus dem ersten Beispiel aus §3.4 gibt es ein $x \in U \overset{\text{off.}}{\subseteq} X$ und ein $y \in V \overset{\text{off.}}{\subseteq} X$ mit $(x,y) \in U \times V \subseteq W \overset{\text{off.}}{\subseteq} X \times Y$. Es wird

$$\begin{array}{rl} & \{n \in \mathbf{Z}_{\geqslant 1} \;:\; (x_n, y_n) \notin W\} \\ \subseteq & \{n \in \mathbf{Z}_{\geqslant 1} \;:\; (x_n, y_n) \notin U \times V\} \\ = & \{n \in \mathbf{Z}_{\geqslant 1} \;:\; x_n \notin U\} \cup \{n \in \mathbf{Z}_{\geqslant 1} \;:\; y_n \notin V\}\ , \end{array}$$

und die Teilnehmer letzterer Vereinigung sind beides endliche Mengen, da x ein Konvergenzpunkt für $(x_n)_n$ und y ein Konvergenzpunkt für $(y_n)_n$ ist.

(2) *Annahme,* nicht. Dann gibt es ein $\varepsilon \in \mathbf{R}_{>0}$ so, daß unter anderem für alle $n \in \mathbf{Z}_{\geqslant 1}$ es ein $y_n \in \mathrm{B}_{1/n}(y_0)$ und ein $x_n \in X$ gibt mit

$$d\big(f(x_n, y_n),\, f(x_n, y_0)\big) \;\geqslant\; \varepsilon\ .$$

Dann ist y_0 der Konvergenzpunkt der Folge $(y_n)_n$. Ferner können wir nach Übergang zu Teilfolgen annehmen, daß $(x_n)_n$ einen Konvergenzpunkt x_0 hat. Also ist (x_0, y_0) ein Konvergenzpunkt der Folge $\big((x_n, y_n)\big)_n$; cf. (1). Da f stetig ist, ist also $f(x_0, y_0)$ ein Konvergenzpunkt der Folge $\big(f(x_n, y_n)\big)_n$; cf. Bemerkung in §4.2.7. Also gibt es ein $m' \in \mathbf{Z}_{\geqslant 1}$ mit

$$d\big(f(x_0, y_0),\, f(x_n, y_n)\big) \;<\; \varepsilon/2$$

für $n \in \mathbf{Z}_{\geqslant m'}$.

Ferner ist (x_0, y_0) ein Konvergenzpunkt der Folge $\big((x_n, y_0)\big)_n$, wie ebenfalls aus (1) folgt, da x_0 Konvergenzpunkt von $(x_n)_n$ und y_0 Konvergenzpunkt der konstanten Folge $(y_0)_n$ ist. Also gibt es ein $m'' \in \mathbf{Z}_{\geqslant 1}$ mit

$$d\big(f(x_0, y_0),\, f(x_n, y_0)\big) \;<\; \varepsilon/2$$

für $n \in \mathbf{Z}_{\geqslant m''}$.

Es folgt

$$\varepsilon \;\leqslant\; d\big(f(x_n, y_n),\, f(x_n, y_0)\big) \;\leqslant\; d\big(f(x_n, y_n),\, f(x_0, y_0)\big) + d\big(f(x_0, y_0),\, f(x_n, y_0)\big) \;<\; \varepsilon/2 + \varepsilon/2 \;=\; \varepsilon$$

für $n \in \mathbf{Z}_{\geqslant \max\{m', m''\}}$, und wir haben einen *Widerspruch.*

Aufgabe 45

(1) Die Aussage ist falsch. Sei $X = \{1, 2\}$, ausgestattet mit der diskreten Topologie. Dann ist $\{1\} \overset{\text{off.}}{\subseteq} X$ und $\{1\} \overset{\text{abg.}}{\subseteq} X$, aber $\emptyset \subsetneq \{1\} \subsetneq X$.

(2) Die Aussage ist richtig. Sei $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ eine offene Überdeckung, wobei I eine Indexmenge ist und $U_i \overset{\text{off.}}{\subseteq} X$ für $i \in I$.

Wir werden nun unter den in dieser offenen Überdeckung wiederholt auftretenden offenen Mengen je eine auswählen.

Sei

$$R \;:=\; \{U_i \;:\; i \in I\} \;\subseteq\; \operatorname{Pot}(X)\,.$$

Da X endlich ist, ist $\operatorname{Pot}(X)$ ebenfalls endlich, und somit auch R. Wähle für alle $U \in R$ ein $i_U \in I$ mit $U_{i_U} = U$. Sei $I_0 := \{i_U \;:\; U \in R\}$. Da R endlich ist, gilt das auch für I_0. Ferner ist

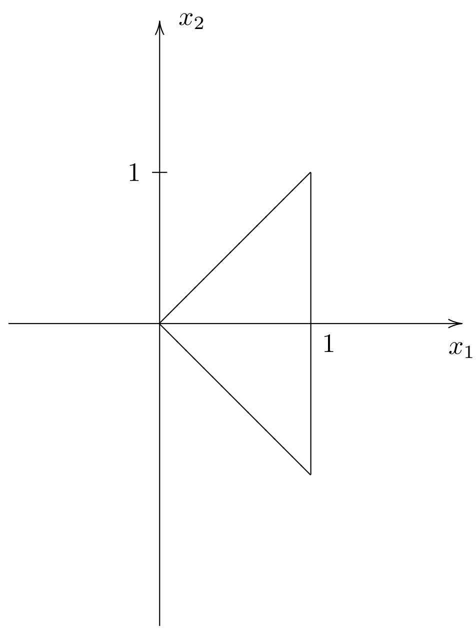
$$\{U_i \;:\; i \in I_0\} \;=\; \{U_{i_U} \;:\; U \in R\} \;=\; R \;=\; \{U_i \;:\; i \in I\}\,,$$

und also

$$\textstyle\bigcup_{i\in I_0} U_i \;=\; \bigcup_{i\in I} U_i \;=\; X\,.$$

Aufgabe 46

(1) Es ist X das folgende Dreieck mit Rand und Innerem.



(2) Es genügt zu zeigen, daß X wegzusammenhängend ist; cf. erste Bemerkung in §4.3.3. Seien $\binom{x_1}{x_2}, \binom{x'_1}{x'_2} \in X$ gegeben, i.e. sei $0 \leqslant x_1 \leqslant 1$, $|x_2| \leqslant |x_1|$ und $0 \leqslant x'_1 \leqslant 1$, $|x'_2| \leqslant |x'_1|$.
Es genügt zu zeigen, daß die Abbildung

$$\begin{array}{rcl} [0,1] & \xrightarrow{\gamma} & \mathbf{R}^2 \\ t & \longmapsto & (1-t)\binom{x_1}{x_2} + t\binom{x'_1}{x'_2} \end{array}$$

mit $\gamma(0) = \binom{x_1}{x_2}$ und $\gamma(1) = \binom{x'_1}{x'_2}$ stetig ist und im Bildbereich nach X einschränkt.

Zur Stetigkeit. Es genügt zu zeigen, daß die Abbildungen $\mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$, $t \longrightarrow (1-t)x_1 + tx'_1$ und $\mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$, $t \longrightarrow (1-t)x_2 + tx'_2$ stetig sind; cf. Aufgabe 33, Bemerkung aus §3.4 und zweite Bemerkung aus §2.1.1. Beide sind aber als (lineare) Polynome in der Tat stetig; cf. Aufgabe 21.(4).

Zur Möglichkeit der Einschränkung von γ nach X. Es ist zu zeigen, daß für alle $t \in [0,1]$ gilt, daß $(1-t)\binom{x_1}{x_2} + t\binom{x'_1}{x'_2} \in X$, i.e. daß $0 \leqslant (1-t)x_1 + tx'_1 \overset{!}{\leqslant} 1$ und $|(1-t)x_2 + tx'_2| \overset{!}{\leqslant} (1-t)x_1 + tx'_1$.

Zu ersterem. Es wird

$$(1-t)x_1 + tx'_1 \;\leqslant\; (1-t)\cdot 1 + t \cdot 1 \;=\; 1$$

und

$$(1-t)x_1 + tx_1' \;\geqslant\; (1-t)\cdot 0 + t\cdot 0 \;=\; 0\,.$$

Zu zweiterem. Es wird

$$(1-t)x_2 + tx_2' \;\leqslant\; (1-t)x_1 + tx_1'$$

und

$$(1-t)x_2 + tx_2' \;\geqslant\; (1-t)(-x_1) + t(-x_1') \;=\; -\big((1-t)x_1 + tx_1'\big)\,,$$

zusammen also

$$|(1-t)x_2 + tx_2'| \;\leqslant\; (1-t)x_1 + tx_1'\,.$$

(3) Nach Satz 6 aus §4.2.6 ist zu zeigen, daß X eine abgeschlossene und beschränkte Teilmenge von $\mathbf{R}^2$ ist.

Nun ist $X \subseteq \bar{\mathrm{B}}_1(0) = \{\binom{x_1}{x_2} \;:\; |x_1| \leqslant 1 \text{ und } |x_2| \leqslant 1\}$, da aus $0 \leqslant x_1 \leqslant 1$ insbesondere $|x_1| \leqslant 1$ und aus $|x_2| \leqslant |x_1|$ dann auch $|x_2| \leqslant 1$ folgt. Also ist X beschränkt.

Ferner sind die Abbildungen $\mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$, $\binom{x_1}{x_2} \overset{f_1}{\longmapsto} x_1$, $\binom{x_1}{x_2} \overset{f_2}{\longmapsto} x_1 + x_2$ und $\binom{x_1}{x_2} \overset{f_3}{\longmapsto} x_1 - x_2$ als lineare Abbildungen stetig; cf. Aufgabe 21.(5).

Da $|x_2| \leqslant x_1$ für $x_1 \geqslant 0$ gerade bedeutet, daß $-x_1 \leqslant x_2 \leqslant x_1$, i.e. daß $x_1 + x_2 \geqslant 0$ und $x_1 - x_2 \geqslant 0$, wird

$$X \;=\; f_1^{-1}([0,1]) \cap f_2^{-1}(\mathbf{R}_{\geqslant 0}) \cap f_3^{-1}(\mathbf{R}_{\geqslant 0})\,.$$

Jeder Teilnehmer dieses Schnitts ist abgeschlossen in $\mathbf{R}^2$ als Urbild einer abgeschlossenen Teilmenge unter einer stetigen Abbildung. Also ist auch die Schnittmenge X eine abgeschlossene Teilmenge von $\mathbf{R}^2$; vgl. Aufgabe 5.(1).

Aufgabe 47

(1) Es wird, ähnlich wie im Beweis zu (Nor 3) in §5.2,

$$\|f\cdot g\| \;=\; \max_{x\in X} |f(x)\cdot g(x)| \;=\; \max_{x\in X}(|f(x)|\cdot|g(x)|) \;=\; |f(x_0)|\cdot|g(x_0)|$$

für ein gewisses $x_0 \in X$. Wir setzen fort mit

$$|f(x_0)|\cdot|g(x_0)| \;\leqslant\; (\max_{x\in X}|f(x)|)\cdot(\max_{x\in X}|g(x)|) \;=\; \|f\|\cdot\|g\|\,.$$

(2) Zunächst bemerken wir, daß aus der Aussage für einen allgemeinen normierten Raum V die entsprechende Aussage im Spezialfall $V = \mathrm{C}(X)$ natürlich folgt; cf. Bemerkung in §5.2, welche u.a. auf Aufgabe 20.(1) basiert.

Sei $U \overset{\text{off.}}{\subseteq} V$. Wir haben zu zeigen, daß $(+)^{-1}(U)$ offen ist. Dazu genügt es, ein $\delta \in \mathbf{R}_{>0}$ so zu finden, daß für $(x,y) \in V\times V$ mit $x+y \in U$

$$(x,y) \;\in\; \mathrm{B}_\delta(x)\times\mathrm{B}_\delta(y) \;\overset{!}{\subseteq}\; (+)^{-1}(U)$$

ist; cf. Bemerkung in §1.1.3 und erstes Beispiel in §3.4.

Da $x+y \in U \overset{\text{off.}}{\subseteq} V$, gibt es ein $\varepsilon \in \mathbf{R}_{>0}$ mit $\mathrm{B}_\varepsilon(x+y) \subseteq U$. Es genügt also, $\delta \in \mathbf{R}_{>0}$ so zu finden, daß

$$\mathrm{B}_\delta(x)\times\mathrm{B}_\delta(y) \;\overset{!}{\subseteq}\; (+)^{-1}(\mathrm{B}_\varepsilon(x+y))\,,$$

i.e. daß für $\tilde{x},\, \tilde{y} \in V$ mit $\|\tilde{x}-x\| < \delta$ und $\|\tilde{y}-y\| < \delta$ auch $\|(\tilde{x}+\tilde{y})-(x+y)\| < \varepsilon$.

Wähle $\delta := \varepsilon/2$. Dann wird

$$\|(\tilde{x}+\tilde{y})-(x+y)\| \;\leqslant\; \|\tilde{x}-x\| + \|\tilde{y}-y\| \;<\; \varepsilon/2+\varepsilon/2 \;=\; \varepsilon\,.$$

(3) Nach Aufgabe 20.(2) ist diese Abbildung $(\cdot)$ wohldefiniert.

Sei $U \overset{\text{off.}}{\subseteq} \mathrm{C}(X)$. Wir haben zu zeigen, daß $(\cdot)^{-1}(U)$ offen ist. Dazu genügt es, ein $\delta \in \mathbf{R}_{>0}$ so zu finden, daß für $(f,g) \in \mathrm{C}(X) \times \mathrm{C}(X)$ mit $f \cdot g \in U$

$$(f,g) \;\in\; \mathrm{B}_\delta(f) \times \mathrm{B}_\delta(g) \;\overset{!}{\subseteq}\; (\cdot)^{-1}(U)$$

ist; cf. Bemerkung in §1.1.3 und erstes Beispiel in §3.4.

Da $f \cdot g \in U \overset{\text{off.}}{\subseteq} \mathrm{C}(X)$, gibt es ein $\varepsilon \in \mathbf{R}_{>0}$ mit $\mathrm{B}_\varepsilon(f \cdot g) \subseteq U$. Es genügt also, $\delta \in \mathbf{R}_{>0}$ so zu finden, daß

$$\mathrm{B}_\delta(f) \times \mathrm{B}_\delta(g) \;\overset{!}{\subseteq}\; (\cdot)^{-1}(\mathrm{B}_\varepsilon(f \cdot g))\;,$$

i.e. daß für $\tilde{f},\, \tilde{g} \in \mathrm{C}(X)$ mit $\|\tilde{f} - f\| < \delta$ und $\|\tilde{g} - g\| < \delta$ auch $\|\tilde{f} \cdot \tilde{g} - f \cdot g\| < \varepsilon$.

Zunächst einmal halten wir fest, daß

$$\begin{array}{rcl}
\|\tilde{f} \cdot \tilde{g} - f \cdot g\| & = & \|\tilde{f} \cdot \tilde{g} - f \cdot \tilde{g} + f \cdot \tilde{g} - f \cdot g\| \\
& \leqslant & \|(\tilde{f} - f)\tilde{g}\| + \|f(\tilde{g} - g)\| \\
& \overset{(1)}{\leqslant} & \|\tilde{f} - f\|\|\tilde{g}\| + \|f\|\|\tilde{g} - g\| \\
& \leqslant & \delta\|\tilde{g}\| + \|f\|\delta \\
& = & \delta(\|g + \tilde{g} - g\| + \|f\|) \\
& \leqslant & \delta(\|g\| + \|\tilde{g} - g\| + \|f\|) \\
& < & \delta(\|g\| + \delta + \|f\|)\;.
\end{array}$$

Wähle $\delta \in \mathbf{R}_{>0}$ nun so, daß $\delta(\|g\| + \delta + \|f\|) \leqslant \varepsilon$. Hierzu kann man z.B.

$$\delta \;:=\; \varepsilon / \max\{1,\, \varepsilon + \|f\| + \|g\|\}$$

setzen, denn dann ist

$$\delta(\|g\| + \delta + \|f\|) \;=\; \frac{\varepsilon}{\max\{1,\, \varepsilon + \|f\| + \|g\|\}} \cdot (\|g\| + \delta + \|f\|) \;\leqslant\; \frac{\varepsilon(\|g\| + \varepsilon + \|f\|)}{\max\{1,\, \varepsilon + \|f\| + \|g\|\}} \;\leqslant\; \varepsilon\;.$$

Mit dieser Wahl von δ wird insgesamt also $\|\tilde{f} \cdot \tilde{g} - f \cdot g\| < \varepsilon$.

(4) Zunächst bemerken wir, daß aus der Aussage für einen allgemeinen normierten Raum V die entsprechende Aussage im Spezialfall $V = \mathrm{C}(X)$ natürlich folgt.

O.E. ist $\lambda \neq 0$, da wir für $\lambda = 0$ eine konstante und also stetige Abbildung erhalten; cf. Beispiel (2) aus §2.1.1.

Da Urbild- und Bildbereich metrische Räume sind, können wir die ε-δ-Charakterisierung der Stetigkeit verwenden; cf. Lemma aus §2.2.

Seien $\varepsilon \in \mathbf{R}_{>0}$ und $x \in V$ gegeben. Setze $\delta := \varepsilon/|\lambda|$. Ist $\tilde{x} \in V$ mit $\|\tilde{x} - x\| < \delta$, dann ist wegen $\lambda \neq 0$

$$\|\lambda\tilde{x} - \lambda x\| \;=\; |\lambda|\|\tilde{x} - x\| \;<\; |\lambda|\delta \;=\; \varepsilon\;.$$

(5) Wir wollen nun verwenden, daß das Bild eines Konvergenzpunktes einer Folge unter einer stetigen Abbildung zugleich ein Konvergenzpunkt der Bildfolge ist; cf. Bemerkung aus §4.2.7.

Nach Aufgabe 44.(1) konvergiert $\big((f_n\,,\,g_n)\big)_n$ gegen (f,g).

Darauf die stetige Abbildung $\mathrm{C}(X) \times \mathrm{C}(X) \longrightarrow \mathrm{C}(X)$, $(f,g) \longmapsto f + g$ aus (2) angewandt, liefert die Konvergenz von $(f_n + g_n)_n$ gegen $f + g$.

Darauf die stetige Abbildung $\mathrm{C}(X) \times \mathrm{C}(X) \longrightarrow \mathrm{C}(X)$, $(f,g) \longmapsto f \cdot g$ aus (3) angewandt, liefert die Konvergenz von $(f_n \cdot g_n)_n$ gegen $f \cdot g$.

Auf die gegen f konvergierende Folge $(f_n)_n$ die stetige Abbildung $\mathrm{C}(X) \longrightarrow \mathrm{C}(X)$, $f \longmapsto \lambda f$ angewandt, liefert die Konvergenz von $(\lambda f_n)_n$ gegen λf.

Aufgabe 48

(1) Sei $W \subseteq X \times Y$ eine offene und abgeschlossene Teilmenge. Sei $W \neq \emptyset$. Wir haben zu zeigen, daß $W \overset{!}{=} X \times Y$.

Wir verwenden die stetigen Abbildungen $i_y : X \longrightarrow X \times Y$, $\xi \longmapsto (\xi, y)$ und $j_x : Y \longrightarrow X \times Y$, $\eta \longmapsto (x, \eta)$ aus dem ersten Beispiel in §3.4, wobei $x \in X$ und $y \in Y$.

Sei $(x, y) \in W$.

Es ist $x \in i_y^{-1}(W)$, also $i_y^{-1}(W) \neq \emptyset$. Es ist $i_y^{-1}(W)$ eine offene und abgeschlossene Teilmenge von X; vgl. Aufgabe 18.(1). Da X zusammenhängend ist, folgt $i_y^{-1}(W) = X$. In anderen Worten, es ist $(x', y) \in W$ für alle $x' \in X$.

Sei $x' \in X$ vorgegeben. Es ist $y \in j_{x'}^{-1}(W)$, also $j_{x'}^{-1}(W) \neq \emptyset$. Es ist $j_{x'}^{-1}(W)$ eine offene und abgeschlossene Teilmenge von Y; vgl. Aufgabe 18.(1). Da Y zusammenhängend ist, folgt $j_{x'}^{-1}(W) = Y$. In anderen Worten, es ist $(x', y') \in W$ für alle $y' \in Y$.

Insgesamt folgt also $(x', y') \in W$ für alle $x' \in X$ und alle $y' \in Y$, i.e. $X \times Y = W$.

(2) Seien (x', y'), $(x'', y'') \in X \times Y$.

Da X wegzusammenhängend ist, gibt es ein stetiges $\gamma : [0,1] \longrightarrow X$ mit $\gamma(0) = x'$ und $\gamma(1) = x''$.

Da Y wegzusammenhängend ist, gibt es ein stetiges $\vartheta : [0,1] \longrightarrow Y$ mit $\vartheta(0) = y'$ und $\vartheta(1) = y''$.

Sei

$$\begin{array}{rcccc} [0, 1/2] & \xrightarrow{\chi_1} & X & \times & Y \\ t & \longmapsto & (\gamma(2t) & , & y') \end{array}$$

Es ist χ_1 stetig, da sowohl $t \longmapsto \gamma(2t)$ als Kompositum stetiger Abbildungen stetig ist, als auch die konstante Abbildung $t \longmapsto y'$ stetig ist; cf. Bemerkung aus §3.4.

Sei

$$\begin{array}{rcccc} [1/2, 1] & \xrightarrow{\chi_2} & X & \times & Y \\ t & \longmapsto & (x'' & , & \vartheta(2t-1)) \end{array}$$

Es ist χ_1 stetig, da sowohl die konstante Abbildung $t \longmapsto x''$ stetig ist, als auch $t \longmapsto \vartheta(2t-1)$ als Kompositum stetiger Abbildungen stetig ist; cf. Bemerkung aus §3.4.

Beachte, daß $[0,1] = [0,1/2] \cup [1/2,1]$ eine lokalendliche (da endliche) abgeschlossene Überdeckung ist. Beachte, daß $\chi_1(1/2) = \chi_2(1/2) = (x'', y')$, und also $\chi_1|_{[0,1/2]\cap[1/2,1]} = \chi_2|_{[0,1/2]\cap[1/2,1]}$ ist.

Die Abbildung

$$\begin{array}{rcl} [0,1] & \xrightarrow{\chi} & X \times Y \\ t & \longmapsto & \begin{cases} (\gamma(2t), y') & \text{für } t \in [0,1/2] \\ (x'', \vartheta(2t-1)) & \text{für } t \in [1/2,1] \end{cases} \end{array}$$

erfüllt $\chi|_{[0,1/2]} = \chi_1$ und $\chi|_{[1/2,1]} = \chi_2$. Nach Satz 2 aus §2.3.3 ist χ also stetig.

Damit ist eine stetige Abbildung χ von $[0,1]$ nach $X \times Y$ mit dem vorgegebenen Anfangspunkt $\chi(0) = (\gamma(0), y') = (x', y')$ und dem vorgegebenen Endpunkt $\chi(1) = (x'', \vartheta(1)) = (x'', y'')$. Somit ist $X \times Y$ als wegzusammenhängend nachgewiesen.

Literatur

[1] BLIND, G., *Topologie,* Vorlesung, Stuttgart, 1993/94.

[2] JÄNICH, K., *Topologie,* 3. Aufl., Springer, 1990.

[3] KÜHNLEIN, S., *Das Lemma von Zorn,* Manuskript, Karlsruhe, 2004.

[4] LANG, S., *Algebra,* 3rd ed., Springer GTM 211, 2002.

[5] QUERENBURG, B., *Mengentheoretische Topologie,* Springer Hochschultext, 1976.

[6] TOM DIECK, T., *Mengentheoretische Topologie,* Skript, www.uni-math.gwdg.de/tammo/sos.pdf, 2009.