Statistik und Wahrscheinlichkeit

Blatt 3

Platzaufgaben

Platzaufgabe 5

Wir wollen die Funktionalität einer Alarmanlage evaluieren.
Sei A das Ereignis "Alarm wurde ausgelöst".
Sei B das Ereignis "Ein Einbruch hat stattgefunden".
Die Gegenereignisse seien $\bar{A}$ und $\bar{B}$.
Seien folgende Wahrscheinlichkeiten bekannt:
$P(A) = 0{,}2$, $P(\bar{A}) = 0{,}8$, $P(B|A) = 0{,}5$, $P(\bar{B}|A) = 0{,}5$, $P(B|\bar{A}) = 0{,}4$, $P(\bar{B}|\bar{A}) = 0{,}6$.

(1) Man erstelle die Vierfeldertafel.

(2) Man bestimme $P(A|B)$. Ist die Alarmanlage empfehlenswert?

(3) Man erstelle für die angegebenen Werte einen Baum.
Man bestimme mit diesem $P(A \cap B)$ unter Verwendung der Pfadregel.

Platzaufgabe 6

Seien bei einem Multiple-Choice-Test 3 Fragen zu beantworten.
Pro richtiger Antwort gibt es 1 Punkt. Pro falscher Antwort gibt es -1 Punkt.
Ist die Gesamtpunktzahl in der Summe negativ, so wird sie stattdessen auf 0 gesetzt.
Es werden alle 3 Fragen zufällig beantwortet: die Wahrscheinlichkeit für eine richtige Antwort sei bei jeder Frage gleich $\frac{1}{2}$.

(1) Man bestimme den Erwartungswert der Gesamtpunktzahl.

(2) Man bestimme die Varianz der Gesamtpunktzahl.

Statistik und Wahrscheinlichkeit

Blatt 3

Hausaufgaben

Abgabe bis Do 05.06.25 in den Gruppenübungen oder bis Do 05.06.25, 14:00 im Ilias.

Hausaufgabe 5

Sei $\Omega = \mathbb{R}$. Sei die Wahrscheinlichkeitsdichte $p(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \mathrm{e}^{-t^2}$ auf Ω gegeben.
Sei die Zufallsgröße X auf Ω gegeben durch

$$X(t) := \begin{cases} 2t & \text{falls } t \geqslant 0 \\ 0 & \text{falls } t < 0 \end{cases}$$

(1) Skizzieren Sie den Graphen von $p(t)$.

(2) Man berechne den Erwartungswert $\mathrm{E}(X)$.

(3) Man berechne die Varianz $\mathrm{Var}(X)$.

Die Integralwerte $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$ und $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2} t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}$ und $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2} t^2\,\mathrm{d}t = \frac{1}{4}\sqrt{\pi}$ dürfen hierzu verwendet werden.

Hausaufgabe 6

Bei einem Glücksrad werden drei Sektoren eingefärbt mit rot (r), grün (g) und blau (b).
Die Wahrscheinlichkeiten für die Sektoren sind $P(\mathrm{r}) = \frac{1}{4}$, $P(\mathrm{g}) = \frac{1}{4}$, $P(\mathrm{b}) = \frac{1}{2}$.
Sei der Gewinn bei blau gleich -1 und bei grün gleich 0.

(1) Wie sollte der Gewinn bei rot gesetzt werden, damit der Erwartungswert des Gewinns gleich 0 ist?

(2) Sei der Gewinn bei rot auf 2 gesetzt. Berechnen Sie die Varianz der Zufallsgröße, die den Gewinn angibt.