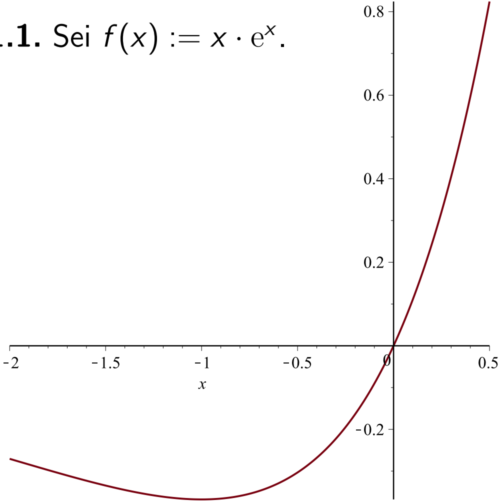
1. Extremale Punkte

1.1. Sei $f(x) := x \cdot \mathrm{e}^x$.



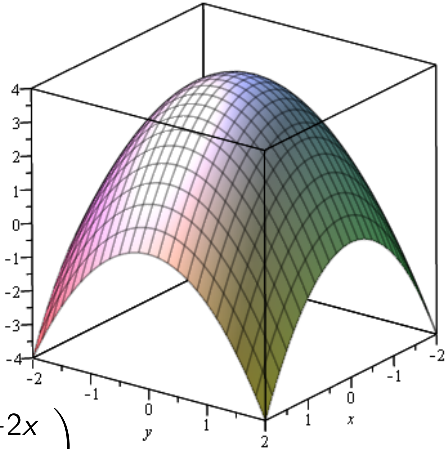
Ableitung mit Produktregel: $f'(x) = 1 \cdot \mathrm{e}^x + x \cdot \mathrm{e}^x = (1+x)\mathrm{e}^x$.

Also $f'(x) = 0$ bei $x = -1$. Dort liegt also ein Minimum vor.

1.2. Sei $f(x,y) := 4 - x^2 - y^2$.

Tangentensteigung in x-Richtung: Ableiten nach x variabel mit y konstant: $\partial_1 f(x,y) = -2x$.

Tangentensteigung in y-Richtung: Ableiten nach y variabel mit x konstant: $\partial_2 f(x,y) = -2y$.



Zusammen: Gradient

$$\nabla_f(x,y) := \begin{pmatrix} \partial_1 f(x,y) \\ \partial_2 f(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x \\ -2y \end{pmatrix}.$$

Eine horizontale Tangentialebene haben wir bei $\nabla_f(x,y) = \binom{0}{0}$.
Also liegt bei $(x,y) = (0,0)$ ein Maximum vor.

1.3. Sei $f(x, y) := 4 - x^2 - y^2$.

Sei $g(x, y) := (x - 1)^2 + y^2$.

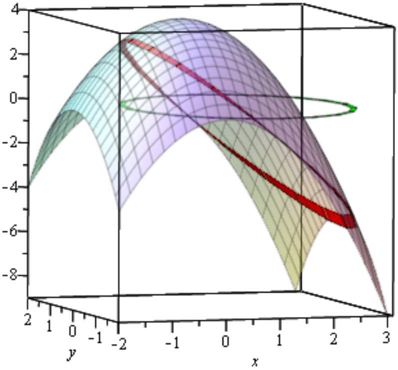
Wollen nur Punkte (x, y) betrachten, die die Nebenbedingung $g(x, y) = 4$ erfüllen (grüner Kreis).

Diese bilden unter f ab auf eine Kurve auf der Fläche (rot). Suchen: Maximum und Minimum von roter Kurve.

Gradient $\nabla_g(x, y) = \begin{pmatrix} 2(x-1) \\ 2y \end{pmatrix}$ steht senkrecht auf grüner Kurve.

Tangentenvektor von Länge 1 an grüne Kurve also:

$t(x, y)$
$:= \frac{1}{\sqrt{(2y)^2+(-2(x-1))^2}} \begin{pmatrix} 2y \\ -2(x-1) \end{pmatrix}$
$= \frac{1}{\sqrt{(x-1)^2+y^2}} \begin{pmatrix} y \\ 1-x \end{pmatrix}$.

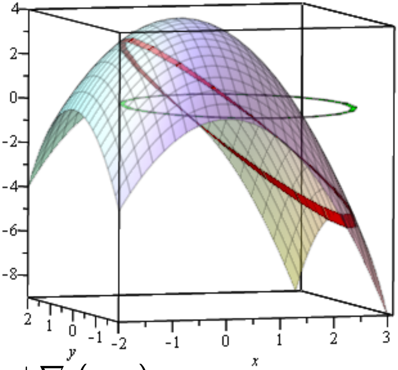


Steigung entlang roter Kurve: Anteil des Gradienten in Tangentenrichtung, also Skalarprodukt

$$\nabla_f(x,y) \bullet t(x,y) = \binom{-2x}{-2y} \bullet \frac{1}{\sqrt{(x-1)^2+y^2}} \binom{y}{1-x}.$$

Z.B. Steigung der roten Kurve an der Stelle $(x,y) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{15})$:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt{15} \end{pmatrix} \bullet \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{15} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \; = \; -\frac{1}{4}\sqrt{15} \; \approx \; -0{,}97$$



Suchen Maximum und Minimum. Wo also ist die Steigung der roten Kurve gleich 0?

Idee von Lagrange:

$\nabla_f(x,y) \bullet t(x,y) = 0$

$\iff \nabla_f(x,y)$ senkrecht auf $t(x,y)$

$\iff \nabla_f(x,y)$ in selber Richtung wie $\pm\nabla_g(x,y)$

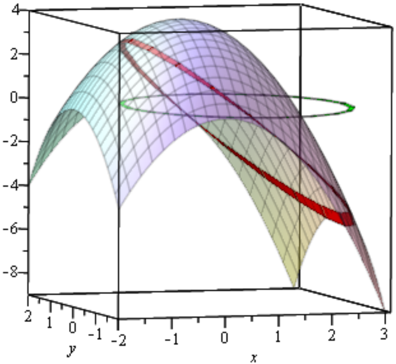
$\iff$ es gibt ein $\lambda \in \mathbf{R}$ mit $\boxed{\nabla_f(x,y) = \lambda \nabla_g(x,y)}$

Aus $\nabla_f(x,y) = \lambda \nabla_g(x,y)$ und der Nebenbedingung $g(x,y) = 4$ erhalten wir

$$\begin{aligned} -2x &= \lambda \cdot 2(x-1) \\ -2y &= \lambda \cdot 2y \\ (x-1)^2 + y^2 &= 4 \end{aligned}$$

Wäre $y \neq 0$, dann folgte $\lambda = -1$, also $0 = 2$, was *nicht* geht.

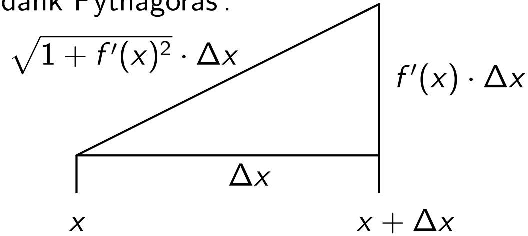
Also ist $y = 0$. Dies führt auf die Lösung $(x,y) = (-1,0)$ (mit $\lambda = -\frac{1}{2}$) und auf die Lösung $(3,0)$ (mit $\lambda = \frac{3}{2}$). Ersteres ist ein Maximum, zweiteres ein Minimum.



2. Extremale Kurven

2.1. Sei $f(x)$ gegeben. Wir wollen die Länge des Graphen von $f(x)$ zwischen a und b berechnen.

Für ein kleines Kurvenstück an der Stelle x ist näherungsweise dank Pythagoras :



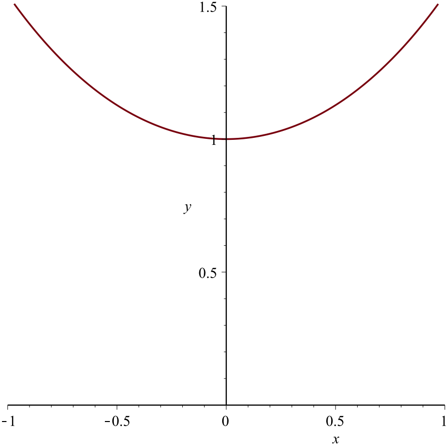
Man läßt Δx klein werden und integriert auf:
die Länge ist $\int_a^b \sqrt{1+f'(x)^2}\,\mathrm{d}x$.

Z.B. wird für $f(x) := \frac{1}{2}(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})$

zunächst $f'(x) = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})$ und also

$$1 + f'(x)^2 = \frac{1}{4}(4 + (\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})^2) = \frac{1}{4}(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})^2 = f(x)^2 \ .$$

Die Länge des Graphen von $f(x)$ zwischen -1 und $+1$ berechnet sich also zu



$$\begin{aligned} & \int_{-1}^{+1} \sqrt{1 + f'(x)^2}\,\mathrm{d}x \\ = \ & \int_{-1}^{+1} f(x)\,\mathrm{d}x \\ = \ & \int_{-1}^{+1} \tfrac{1}{2}(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})\,\mathrm{d}x \\ = \ & \left[\tfrac{1}{2}(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})\right]_{x=-1}^{+1} \\ = \ & \mathrm{e} - \mathrm{e}^{-1} \ \approx \ 2{,}35 \end{aligned}$$

2.2. Was ist die kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten (a, c) und (b, c)?

Natürlich die horizontale Strecke von (a, c) nach (b, c).

Euler und Lagrange: für solche Fragen hilft die Variationsrechnung.

Wir suchen $f(x)$ mit $f(a) = c$, mit $f(b) = c$ und mit $\int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\,\mathrm{d}x$ minimal.

Allgemeiner suchen wir $f(x)$ mit $f(a) = c$, mit $f(b) = c$ und mit $\int_a^b L(f, f')\,\mathrm{d}x$ minimal.

Sei $t(x)$ eine beliebige Funktion mit $t(a) = t(b) = 0$.
Es sollte

$$I(\varepsilon) \;:=\; \int_a^b L(f + \varepsilon t, (f + \varepsilon t)')\,\mathrm{d}x$$

bei $\varepsilon = 0$ ein Minimum haben. Es sollte also $I'(0) = 0$ sein.

Mit Kettenregel und partieller Integration wird

$$\begin{aligned} I'(\varepsilon) &= \int_a^b \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon} L(f+\varepsilon t, f'+\varepsilon t')\,\mathrm{d}x \\ &= \int_a^b \partial_1 L(f+\varepsilon t, f'+\varepsilon t')t + \partial_2 L(f+\varepsilon t, f'+\varepsilon t')t'\,\mathrm{d}x \\ &= \int_a^b \partial_1 L(f+\varepsilon t, f'+\varepsilon t')t\,\mathrm{d}x \\ &\quad + [\partial_2 L(f+\varepsilon t, f'+\varepsilon t')t]_{x=a}^b - \int_a^b \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\partial_2 L(f+\varepsilon t, f'+\varepsilon t')t\,\mathrm{d}x \\ &= \int_a^b (\partial_1 L(f+\varepsilon t, f'+\varepsilon t') - \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\partial_2 L(f+\varepsilon t, f'+\varepsilon t'))t\,\mathrm{d}x\ . \end{aligned}$$

Setzen wir darin $\varepsilon = 0$, so hat dies für jedes t zu verschwinden. Dann sollte also die Klammer verschwinden:

$$\boxed{\partial_1 L(f, f') - \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\partial_2 L(f, f') \ = \ 0}\ .$$

In unserem Beispiel mit der minimalen Länge hängt $L(f, f')$ nicht von f ab, es wird also $\partial_1 L(f, f') = 0$. Als Bedingung bleibt

$$\begin{aligned}
0 &= \partial_1 L(f, f') - \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\partial_2 L(f, f') \\
&= -\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\partial_2 L(f, f') \\
&= -\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big(\tfrac{1}{2}(1 + f'(x)^2)^{-1/2} \cdot 2f'(x)\big) \\
&= -\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big((1 + f'(x)^2)^{-1/2} \cdot f'(x)\big) \\
&= -\big(- \tfrac{1}{2}(1 + f'(x)^2)^{-3/2} \cdot 2f'(x) \cdot f''(x) \cdot f'(x) \\
&\qquad + (1 + f'(x)^2)^{-1/2} \cdot f''(x)\big) \\
&= -(1 + f'(x)^2)^{-3/2} \cdot f''(x)\ .
\end{aligned}$$

Setzen wir $f(x) = c$ konstant, so wird $f''(x) = 0$, weswegen die Bedingung für die horizontale Strecke als Verbindungslinie erfüllt ist.

2.3. Welche Kurve wird durch eine hängende Kette beschrieben?

Suchen eine passende Funktion $f(x)$, deren Graph die Kettenlinie beschreibt.

Die Höhe des Schwerpunkts $k^{-1} \cdot \int_a^b f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2}\,\mathrm{d}x$ soll minimal sein bei vorgegebener Länge $\int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\,\mathrm{d}x = k$.

Allgemeiner suchen wir $f(x)$ mit $\int_a^b L(f, f')\,\mathrm{d}x$ minimal, unter der Nebenbedingung $\int_a^b M(f, f')\,\mathrm{d}x = k$.

Seien $t(x)$ und $u(x)$ beliebige Funktionen mit
$t(a) = t(b) = u(a) = u(b) = 0$.
Es sollte

$$I(\varepsilon, \eta) \ := \ \int_a^b L(f + \varepsilon t + \eta u, (f + \varepsilon t + \eta u)')\,\mathrm{d}x$$

bei $(\varepsilon, \eta) = (0, 0)$ ein Minimum haben, unter der Nebenbedingung

$$J(\varepsilon, \eta) \ := \ \int_a^b M(f + \varepsilon t + \eta u, (f + \varepsilon t + \eta u)')\,\mathrm{d}x \ = \ k$$

Es sollte also $\nabla_I(0, 0) = \lambda \nabla_J(0, 0)$ sein für ein $\lambda \in \mathbf{R}$, und die Nebenbedingung $J(0, 0) = k$ sollte gelten.

Erstere Bedingung können wir $\nabla_{I-\lambda J}(0, 0) = \binom{0}{0}$ schreiben.

Dieselbe Rechnung wie oben gibt

$$\begin{aligned} & \partial_1(I - \lambda J)(\varepsilon, \eta) \\ = \; & \int_a^b \big(\partial_1(L - \lambda M)(f + \varepsilon t + \eta u, (f + \varepsilon t + \eta u)') \\ & \quad - \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \partial_2(L - \lambda M)(f + \varepsilon t + \eta u, (f + \varepsilon t + \eta u)') \big) \, t \, \mathrm{d}x \end{aligned}$$

Genauso für $\partial_2(I - \lambda J)(\varepsilon, \eta)$, nur mit dem Faktor u.

Es sollte also bei $(\varepsilon, \eta) = (0, 0)$ sich eine Konstante $\lambda \in \mathbf{R}$ finden lassen mit

$$\boxed{\partial_1(L - \lambda M)(f, f') - \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \partial_2(L - \lambda M)(f, f') \; = \; 0} \, .$$

Für unsere Kettenlinie wird, mit L reskaliert:

$$\begin{aligned}
L - \lambda M &= (f(x) - \lambda)(1 + f'(x)^2)^{1/2} \\
\partial_1(L - \lambda M) &= (1 + f'(x)^2)^{1/2} \\
\partial_2(L - \lambda M) &= (f(x) - \lambda) \cdot f'(x) \cdot (1 + f'(x)^2)^{-1/2} \\
\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\partial_2(L - \lambda M) &= f'(x)^2 \cdot (1 + f'(x)^2)^{-1/2} \\
&\quad + (f(x) - \lambda) \cdot (1 + f'(x)^2)^{-3/2} \cdot f''(x)
\end{aligned}$$

Setzen wir nun versuchsweise $f(x) := \frac{1}{2}(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})$ und $\lambda = 0$, so ergibt sich wegen $1 + f'(x)^2 = f(x)^2$ und $f''(x) = f(x)$ folgendes.

$$\begin{aligned}
\partial_1(L - \lambda M) &= f(x) \\
\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\partial_2(L - \lambda M) &= (f(x)^2 - 1) \cdot f(x)^{-1} \\
&\quad + f(x) \cdot f(x)^{-3} \cdot f(x) \\
&= f(x)\,.
\end{aligned}$$

Somit haben wir eine Lösung gefunden.

Also: Die Kettenlinie

wird (bis auf Reskalierung) beschrieben durch $f(x) = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})$: