A. Zvonareva, M. Künzer

Schulmathematik, SoSe 22

Lösung 1

Aufgabe 1 Bestimmen Sie die Nullstellen des Polynoms $f(X)$ in der Form $a+b\mathrm{i}$ mit $a,b\in\mathbb{R}$.

(1) $f(X) = X^2 - 1 - \mathrm{i}\sqrt{3}$.

(2) $f(X) = X^3 + 2 - 2\mathrm{i}$.

(3) $f(X) = X^3 - 7 - 5\sqrt{2}$. Dazu berechnen Sie $(1+\sqrt{2})^3$.

Lösung zu Aufgabe 1:

(1)
$$1+\mathrm{i}\sqrt{3} = 2\left(\frac{1}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right).$$

Die erste 2-te Einheitswurzel ist -1. Folglich: Die Nullstellen des Polynoms $f(X)$ sind
$$\pm\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) = \pm\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\mathrm{i}\frac{1}{2}\right) = \pm\left(\frac{\sqrt{6}}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

(2)
$$-2+2\mathrm{i} = 2\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right).$$

Die erste 3-te Einheitswurzel ist
$$\zeta_3 = \left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right) = \left(-\frac{1}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$
$$\zeta_3^2 = \left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right) = \left(-\frac{1}{2}-\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Die Nullstellen des Polynoms $f(X)$ sind also
$$w_0 = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1+\mathrm{i};$$
$$w_0\cdot\zeta_3 = (1+\mathrm{i})\left(-\frac{1}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{1}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}-\mathrm{i}\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{1+\sqrt{3}}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}-1}{2} \text{ und}$$
$$w_0\cdot\zeta_3^2 = (1+\mathrm{i})\left(-\frac{1}{2}-\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{1}{2}-\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}-\mathrm{i}\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}-\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}+1}{2}.$$

(3)
$$(1+\sqrt{2})^3 = 1+3\sqrt{2}+3\cdot 2+2\sqrt{2} = 7+5\sqrt{2}.$$

Die Nullstellen des Polynoms $f(X)$ sind
$$w_0 = 1+\sqrt{2};$$

$$w_0 \cdot \zeta_3 = (1+\sqrt{2})\left(-\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{1+\sqrt{2}}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}+\sqrt{6}}{2} \text{ und}$$

$$w_0 \cdot \zeta_3^2 = (1+\sqrt{2})\left(-\frac{1}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{1+\sqrt{2}}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}+\sqrt{6}}{2}.$$

Aufgabe 2 Bestimmen Sie die Nullstellen des Polynoms $f(X)$.

(1) $f(X) = X^2 + X + 1$.

(2) $f(X) = (2+\mathrm{i})X^2 - (5-\mathrm{i})X + (2-2\mathrm{i})$.

(3) $f(X) = X^3 + 3X^2 + 3X + 9$.

(4) $f(X) = X^3 + 6X^2 + 12X + 7$.

Lösung zu Aufgabe 2:

(1)
$$\Delta = 1 - 4 = -3.$$
Die Nullstellen des Polynoms $f(X)$ sind
$$\frac{-1 \pm \mathrm{i}\sqrt{3}}{2} = \pm\left(-\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

(2) Wir suchen nach den Nullstellen von $f(X) = (2+\mathrm{i})X^2 - (5-\mathrm{i})X + (2-2\mathrm{i})$. Bezeichnen wir $(2+\mathrm{i})$ mit a. Die Nullstellen von $f(X)$ stimmen mit den Nullstellen des folgenden Polynoms überein:
$$X^2 - \frac{(5-\mathrm{i})}{(2+\mathrm{i})}X + \frac{(2-2\mathrm{i})}{(2+\mathrm{i})}.$$
$$\Delta = \frac{1}{a^2}\left((5-\mathrm{i})^2 - 4(2+\mathrm{i})(2-2\mathrm{i})\right) = \frac{1}{a^2}(25 - 10\mathrm{i} - 1 - 24 + 8\mathrm{i}) = \frac{1}{a^2}(-2\mathrm{i}) = \frac{2}{a^2}(-\mathrm{i})$$
$$= \frac{2}{a^2}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right).$$
Eine 2-te Wurzel von Δ ist
$$\frac{\sqrt{2}}{a}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right) = \frac{\sqrt{2}}{a}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{-1+\mathrm{i}}{a}.$$
Die Nullstellen des Polynoms $f(X)$ sind
$$\frac{(5-\mathrm{i}) + (-1+\mathrm{i})}{2(2+\mathrm{i})} = \frac{2(2-\mathrm{i})}{5} = \frac{4}{5} - \frac{2}{5}\mathrm{i} \text{ und}$$
$$\frac{(5-\mathrm{i}) - (-1+\mathrm{i})}{2(2+\mathrm{i})} = \frac{(3-\mathrm{i})(2-\mathrm{i})}{5} = 1 - \mathrm{i}.$$

(3) Die Substitution $X = Y - 1$ liefert
$$f(X) = Y^3 + \left(-\frac{b^2}{3} + c\right)Y + \left(\frac{2b^3}{27} - \frac{bc}{3} + d\right)$$
$$= Y^3 + 8.$$

Die Nullstellen des Polynoms $f(X)$ unter Berücksichtigung der Rückwärtssubstitution sind

$$-2 - 1 = -3;$$

$$-2 \cdot \zeta_3 - 1 = -2\left(-\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - 1 = 1 - \mathrm{i}\sqrt{3} - 1 = -\mathrm{i}\sqrt{3} \text{ und}$$

$$-2 \cdot \zeta_3^2 - 1 = -2\left(-\frac{1}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - 1 = 1 + \mathrm{i}\sqrt{3} - 1 = \mathrm{i}\sqrt{3}.$$

(4) Die Substitution $X = Y - 2$ liefert

$$\begin{aligned} f(X) &= Y^3 + \left(-\frac{b^2}{3} + c\right)Y + \left(\frac{2b^3}{27} - \frac{bc}{3} + d\right) \\ &= Y^3 - 1. \end{aligned}$$

Die Nullstellen des Polynoms $f(X)$ unter Berücksichtigung der Rückwärtssubstitution sind

$$1 - 2 = -1;$$

$$1 \cdot \zeta_3 - 2 = \left(-\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - 2 = -\frac{5}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ und}$$

$$1 \cdot \zeta_3^2 - 2 = \left(-\frac{1}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - 2 = -\frac{5}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Aufgabe 3 Bestimmen Sie die Diskrimininante von $f(X)$.

(1) $f(X) = X^3 + 6X + 2$.

(2) $f(X) = X^3 + 2X^2 + 4X + 1$.

(3) $f(X) = X^3 - 3X + \lambda$. Für welche $\lambda \in \mathbb{C}$ hat $f(X)$ mehrfache Nullstellen?

Lösung zu Aufgabe 3:

(1)

$$\Delta = -4c^3 - 27d^2 = -4 \cdot 6^3 - 27 \cdot 2^2 = -972.$$

(2)

$$\Delta = b^2c^2 - 4c^3 - 4b^3d + 18bcd - 27d^2 = 2^2 \cdot 4^2 - 4 \cdot 4^3 - 4 \cdot 2^3 \cdot 1 + 18 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 1 - 27 \cdot 1^2 = -107.$$

(3)

$$\Delta = -4c^3 - 27d^2 = -4(-3)^3 - 27\lambda^2 = -27(-4 + \lambda^2) = 108 - 27\lambda^2.$$

Das Polynom $f(X)$ hat mehrfache Nullstellen dann und genau dann, wenn $\Delta(f(X)) = 0$, also dann und genau dann, wenn $108 - 27\lambda^2 = -27(-4 + \lambda^2) = 0$. Das hält dann und genau dann, wenn $\lambda = 2$ oder $\lambda = -2$.

Aufgabe 4 Sei $a + b\mathrm{i} \in \mathbb{C}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$. Sei $x + y\mathrm{i} \in \mathbb{C}$ mit $x, y \in \mathbb{R}$. Sei $n \geq 1$.

(1) Sei $x + y\mathrm{i}$ eine 2-te Wurzel von $a + b\mathrm{i}$. Bestimmen Sie alle 2-ten Wurzeln von $-a - b\mathrm{i}$.

(2) Sei $a + bi = (x + y\mathrm{i})^n$. Zeigen Sie: $a^2 + b^2 = (x^2 + y^2)^n$.

(3) Sei ζ_n die erste n-te Einheitswurzel.

Berechnen Sie $\prod_{k=0}^{n-1}(X-\zeta_n^k)$.

Berechnen Sie $\sum_{k=0}^{n-1}\zeta_n^k$ und $\prod_{k=0}^{n-1}\zeta_n^k$.

(4) Sei $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ die paarweise verschiedenen Nullstellen des Polynoms

$$X^3 + bX^2 + cX + d \in \mathbb{C}[X].$$

Bestimmen Sie das Polynom mit Nullstellen $z_1 + z_2, z_2 + z_3$ und $z_1 + z_3$.

Lösung zu Aufgabe 4:

(1) Da $-a - b\mathrm{i} = -1(a + b\mathrm{i})$ und da $\pm\mathrm{i}$ die 2-ten Wurzeln von -1 sind, bekommen wir, dass $\pm\mathrm{i}(x + y\mathrm{i}) = \pm(-y + x\mathrm{i})$ die 2-ten Wurzeln von $-a - b\mathrm{i}$ sind.

Für $(x + y\mathrm{i}) \neq 0$ haben wir zwei verschiedene Wurzeln gefunden, da $\mathrm{i}((x + y\mathrm{i})) \neq -\mathrm{i}(x + y\mathrm{i})$. D.h. haben wir alle Wurzeln gefunden, da es maximal zwei verschiedene Wurzeln gibt.

Für $(x+y\mathrm{i}) = 0$ haben wir $a+b\mathrm{i} = (x+y\mathrm{i})^2 = 0 = -(a+b\mathrm{i})$ und $0 = \pm\mathrm{i}(x+y\mathrm{i})$ ist die einzige Wurzel. D.h. haben wir auch alle Wurzeln gefunden.

(2)

$$a^2 + b^2 = (a + b\mathrm{i})(a - b\mathrm{i}) = (x + y\mathrm{i})^n(x - y\mathrm{i})^n = ((x + y\mathrm{i})(x - y\mathrm{i}))^n = (x^2 + y^2)^n.$$

(3)

$$\prod_{k=0}^{n-1}(X-\zeta_n^k) = X^n - \left(\sum_{k=0}^{n-1}\zeta_n^k\right)X^{n-1} + \cdots + (-1)^n\prod_{k=0}^{n-1}\zeta_n^k = X^n - 1.$$

Daraus folgt

$$\sum_{k=0}^{n-1}\zeta_n^k = 0 \text{ für } n > 1 \text{ und } \sum_{k=0}^{n-1}\zeta_n^k = 1 \text{ für } n = 1.$$

Genau so

$$\prod_{k=0}^{n-1}\zeta_n^k = (-1)^{n+1} \text{ für alle } n \geq 1.$$

(4)

$$X^3+bX^2+cX+d = (X-z_1)(X-z_2)(X-z_3) = X^3-(z_1+z_2+z_3)X^2+(z_1z_2+z_1z_3+z_2z_3)X-z_1z_2z_3.$$

Also

$$\begin{cases} b = -(z_1 + z_2 + z_3) \\ c = z_1z_2 + z_1z_3 + z_2z_3 \\ d = -z_1z_2z_3. \end{cases}$$

Das Polynom mit den Nullstellen $z_1 + z_2, z_2 + z_3$ und $z_1 + z_3$ ist eine skalare Vielfache des Polynoms

$$g(X) = (X - (z_1 + z_2))(X - (z_2 + z_3))(X - (z_1 + z_3)) = X^3 + b'X^2 + c'X + d'$$

mit

$$\begin{cases} b' = -2(z_1 + z_2 + z_3) = 2b \\ c' = (z_1 + z_2)(z_2 + z_3) + (z_1 + z_2)(z_1 + z_3) + (z_2 + z_3)(z_1 + z_3) \\ d' = -(z_1 + z_2)(z_2 + z_3)(z_1 + z_3). \end{cases}$$

Berechnen wir

$$b^2 = (z_1 + z_2 + z_3)^2 = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + 2(z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_2 z_3).$$

Also

$$c' = z_2^2 + z_1^2 + z_3^2 + 3(z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_2 z_3) = b^2 + c.$$

Berechnen wir

$$-bc = (z_1+z_2+z_3)(z_1 z_2+z_1 z_3+z_2 z_3) = z_1^2 z_2+z_1^2 z_3+z_1 z_2 z_3+z_1 z_2^2+z_1 z_2 z_3+z_2^2 z_3+z_1 z_2 z_3+z_3^2 z_1+z_3^2 z_2.$$

Also

$$-d' = (z_1+z_2)(z_2+z_3)(z_1+z_3) = z_1^2 z_2+z_1 z_2 z_3+z_1^2 z_3+z_1 z_3^2+z_2^2 z_1+z_2^2 z_3+z_1 z_2 z_3+z_2 z_3^2 = -bc-d.$$

Wir bekommen:

$$g(X) = X^3 + 2bX^2 + (b^2 + c)X + (bc + d).$$

http://pnp.mathematik.uni-stuttgart.de/lexmath/kuenzer/schulmathematik_22/