M. Künzer

Topologie, SS 09

Lösung 9

Aufgabe 32

(1) Gegeben ist $S \subseteq T_X$ mit $\langle S\rangle_X = T_X$. Sei $T_Y = \{\tilde{U} \cap Y \;:\; \tilde{U} \in T_X\}$ die Spurtopologie auf Y. Wir haben zu zeigen, daß

$$\langle\{U \cap Y \;:\; U \in S\}\rangle_Y \overset{!}{=} T_Y \;=\; \{\tilde{U} \cap Y \;:\; \tilde{U} \in T_X\}\,.$$

Zunächst ist $\{U \cap Y \;:\; U \in S\} \subseteq \{\tilde{U} \cap Y \;:\; \tilde{U} \in T_X\}$, da $S \subseteq T_X$.

Es bleibt zu zeigen, daß sich für jedes $\tilde{U} \in T_X$ die Menge $\tilde{U} \cap Y$ als beliebige Vereinigung endlicher Schnitte von Elementen von $\{U \cap Y \;:\; U \in S\}$ schreiben läßt; cf. Bemerkung (4) aus §3.1.

Da $\langle S\rangle_X = T_X$, können wir

$$\tilde{U} \;=\; \bigcup_{i\in I} \bigcap_{j=1}^{k_i} U_{i,j}$$

schreiben, wobei I eine Indexmenge ist, $k_i \in \mathbf{Z}_{\geqslant 0}$ und $U_{i,j} \in S$; cf. Bemerkung (3) aus §3.1.

Es wird

$$\begin{aligned} \tilde{U} \cap Y &= \Big(\bigcup_{i\in I} \bigcap_{j=1}^{k_i} U_{i,j}\Big) \cap Y \\ &= \bigcup_{i\in I} \Big(\Big(\bigcap_{j=1}^{k_i} U_{i,j}\Big) \cap Y\Big) \\ &= \bigcup_{i\in I} \bigcap_{j=1}^{k_i} \big(U_{i,j} \cap Y\big)\,, \end{aligned}$$

wobei $U_{i,j} \cap Y \in \{U \cap Y \;:\; U \in S\}$, wie gewünscht.

(2) Wir wollen zeigen, daß $\{U \cap Y \;:\; U \in B\}$ eine Basis von Y ist. Sei $y \in V \overset{\text{off.}}{\subseteq} Y$. Wir haben ein $U \in B$ so zu finden, daß $y \in U \cap Y \subseteq V \subseteq Y$.

Da Y die Spurtoplogie trägt, können wir $V = \tilde{U} \cap Y$ für ein $\tilde{U} \overset{\text{off.}}{\subseteq} X$ schreiben. Insbesondere ist $y \in \tilde{U} \overset{\text{off.}}{\subseteq} X$. Da B eine Basis von X ist, existiert ein $U \in B$ mit $y \in U \subseteq \tilde{U} \overset{\text{off.}}{\subseteq} X$. Somit ist

$$y \;\in\; U \cap Y \;\subseteq\; \tilde{U} \cap Y = V \;\overset{\text{off.}}{\subseteq}\; X\,,$$

wie verlangt.

Aufgabe 33

Halten wir zunächst fest, daß φ bijektiv ist.

Um die Stetigkeit von φ zu zeigen, müssen wir nur die Offenheit der Urbilder der der Subbasis aus §3.4 angehörigen Teilmengen überprüfen; cf. Lemma aus §3.1. Dazu sei $1 \leqslant i \leqslant n$ und $U_i \subseteq \mathbf{R}$ offen. Wir haben zu zeigen, daß

$$\varphi^{-1}\big(\pi_i^{-1}(U_i)\big) \overset{\text{off.!}}{\subseteq} \mathbf{R}^n\,.$$

Es ist aber $\varphi^{-1}\big(\pi_i^{-1}(U_i)\big) = (\pi_i \circ \varphi)^{-1}(U_i)$ und $\pi_i \circ \varphi : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}$, $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \longmapsto x_i$ stetig; cf. Aufgabe 21.(5).

Bleibt die Offenheit von φ nachzuweisen. Da Bild unter φ zu nehmen mit beliebigem Vereinigen vertauscht, genügt es Bilder unter φ einer Basis von $\mathbf{R}^n$ als offen in $\mathbf{R}^{\times n}$ nachzuweisen; cf. Bemerkung (1) in §3.2. Somit genügt es, für $x \in \mathbf{R}^n$ und $\varepsilon > 0$ das Bild $\varphi(\mathrm{B}_\varepsilon^{(\infty)}(x))$ als offen in $\mathbf{R}^{\times n}$ nachzuweisen; cf. Beispiel (3) in §3.2. Aber in der Tat ist

$$\begin{array}{rcl}
\varphi(\mathrm{B}_\varepsilon^{(\infty)}(x)) & = & \varphi(\{y \in \mathbf{R}^n \ : \ \|y - x\|_\infty < \varepsilon\}) \\
& = & \varphi(\{y \in \mathbf{R}^n \ : \ |y_i - x_i| < \varepsilon \text{ für } 1 \leqslant i \leqslant n\}) \\
& = & \varphi(\bigcap_{i=1}^n \{y \in \mathbf{R}^n \ : \ |y_i - x_i| < \varepsilon\}) \\
& \overset{\varphi \text{ inj.}}{=} & \bigcap_{i=1}^n \varphi(\{y \in \mathbf{R}^n \ : \ |y_i - x_i| < \varepsilon\}) \\
& = & \bigcap_{i=1}^n \{(y_1, \ldots, y_n) \in \mathbf{R}^{\times n} \ : \ |y_i - x_i| < \varepsilon\}) \\
& = & \bigcap_{i=1}^n \pi_i^{-1}\big((x_i - \varepsilon,\, x_i + \varepsilon)\big) \\
& \overset{\text{off.}}{\subseteq} & \mathbf{R}^{\times n} \,,
\end{array}$$

da $(x_i - \varepsilon,\, x_i + \varepsilon) \overset{\text{off.}}{\subseteq} \mathbf{R}$ für $1 \leqslant i \leqslant n$.

Aufgabe 34

(1) Für $x_1,\, x_2,\, x_3,\, x_4 \in X$ ist

$$d(x_1, x_4) \ \leqslant \ d(x_1, x_3) + d(x_3, x_4) \ \leqslant \ d(x_1, x_2) + d(x_2, x_3) + d(x_3, x_4) \ .$$

Genauso ist

$$d(x_2, x_3) \ \leqslant \ d(x_2, x_1) + d(x_1, x_4) + d(x_4, x_3) \ ,$$

und also

$$d(x_1, x_4) \ \geqslant \ -d(x_1, x_2) + d(x_2, x_3) - d(x_3, x_4) \ .$$

(2) Es genügt zu zeigen, daß $X \times X \longrightarrow \mathbf{R}$, $(x, y) \longmapsto d(x, y)$ stetig ist; vgl. zweite Bemerkung aus §2.1.1.

Eine Subbasis von $\mathbf{R}$ ist gegeben durch $\{\mathbf{R}_{>a} \ : \ a \in \mathbf{R}\} \cup \{\mathbf{R}_{<b} \ : \ b \in \mathbf{R}\}$; cf. Beispiel (2) aus §3.1.

Es genügt zu zeigen, daß $d^{-1}(\mathbf{R}_{>a}) \overset{\text{off.!}}{\subseteq} X \times X$ und $d^{-1}(\mathbf{R}_{<b}) \overset{\text{off.!}}{\subseteq} X \times X$ für $a,\, b \in \mathbf{R}$; vgl. Lemma aus §3.1.

Fall $d^{-1}(\mathbf{R}_{>a}) \overset{\text{off.!}}{\subseteq} X \times X$. Es genügt zu zeigen, daß es für alle $(x', x'') \in d^{-1}(\mathbf{R}_{>a})$, i.e. mit $d(x', x'') > a$, noch ein $(x', x'') \in U_{(x', x'')} \subseteq d^{-1}(\mathbf{R}_{>a})$ mit $U_{(x', x'')} \overset{\text{off.}}{\subseteq} X \times X$ gibt; vgl. Bemerkung aus §1.1.3.

Wir suchen ein $U_{(x', x'')}$ von der Form $\mathrm{B}_\varepsilon(x') \times \mathrm{B}_\varepsilon(x'')$ für ein gewisses, noch zu bestimmendes $\varepsilon \in \mathbf{R}_{>0}$. Ist $(\xi', \xi'') \in \mathrm{B}_\varepsilon(x') \times \mathrm{B}_\varepsilon(x'')$, dann ist $d(\xi', x') < \varepsilon$ und $d(\xi'', x'') < \varepsilon$. Mit (1) folgt zunächst

$$d(\xi', \xi'') \ \geqslant \ -d(\xi', x') + d(x', x'') - d(x'', \xi'') \ > \ -\varepsilon + d(x', x'') - \varepsilon \ .$$

Wählen wir nun $\varepsilon := \big(d(x', x'') - a\big)/2 > 0$, so können wir daraus schließen, daß $d(\xi', \xi'') > a$, i.e. daß $(\xi', \xi'') \in d^{-1}(\mathbf{R}_{>a})$. Somit ist für dieses ε in der Tat $\mathrm{B}_\varepsilon(x') \times \mathrm{B}_\varepsilon(x'') \subseteq d^{-1}(\mathbf{R}_{>a})$.

Fall $d^{-1}(\mathbf{R}_{<b}) \overset{\text{off.!}}{\subseteq} X \times X$. Es genügt zu zeigen, daß es für alle $(x', x'') \in d^{-1}(\mathbf{R}_{<b})$, i.e. mit $d(x', x'') < b$, noch ein $(x', x'') \in \tilde{U}_{(x', x'')} \subseteq d^{-1}(\mathbf{R}_{<b})$ mit $\tilde{U}_{(x', x'')} \overset{\text{off.}}{\subseteq} X \times X$ gibt; vgl. Bemerkung aus §1.1.3.

Wir suchen ein $\tilde{U}_{(x', x'')}$ von der Form $\mathrm{B}_{\tilde\varepsilon}(x') \times \mathrm{B}_{\tilde\varepsilon}(x'')$ für ein gewisses, noch zu bestimmendes $\tilde\varepsilon \in \mathbf{R}_{>0}$. Ist $(\xi', \xi'') \in \mathrm{B}_{\tilde\varepsilon}(x') \times \mathrm{B}_{\tilde\varepsilon}(x'')$, dann ist $d(\xi', x') < \tilde\varepsilon$ und $d(\xi'', x'') < \tilde\varepsilon$. Mit (1) folgt zunächst

$$d(\xi', \xi'') \ \leqslant \ d(\xi', x') + d(x', x'') + d(x'', \xi'') \ < \ \tilde\varepsilon + d(x', x'') + \tilde\varepsilon \ .$$

Wählen wir nun $\tilde\varepsilon := \big(b - d(x', x'')\big)/2 > 0$, so können wir daraus schließen, daß $d(\xi', \xi'') < b$, i.e. daß $(\xi', \xi'') \in d^{-1}(\mathbf{R}_{<b})$. Somit ist für dieses $\tilde\varepsilon$ in der Tat $\mathrm{B}_{\tilde\varepsilon}(x') \times \mathrm{B}_{\tilde\varepsilon}(x'') \subseteq d^{-1}(\mathbf{R}_{<b})$.

(3) *Vorbemerkung.* Für $x,\, \xi \in X$ ist

$$d_Y(x) - d(\xi,x) \;\leqslant\; d_Y(\xi) \;\leqslant\; d_Y(x) + d(\xi,x)\;.$$

Hierzu genügt es, die linke Ungleichung zu zeigen, die rechte folgt durch Vertauschen von ξ und x.

Sei $\varepsilon \in \mathbf{R}_{>0}$. Nach Definition von $d_Y(\xi)$ als größter unterer Schranke gibt es ein $y \in Y$ mit $d_Y(\xi) + \varepsilon > d(\xi,y)$. Es wird

$$\begin{array}{rcl} d_Y(\xi) & \geqslant & d(\xi,y) - \varepsilon \\ & \geqslant & -d(\xi,x) + d(x,y) - \varepsilon \\ & \geqslant & -d(\xi,x) + d_Y(x) - \varepsilon\;. \end{array}$$

Da dies für jedes $\varepsilon \in \mathbf{R}_{>0}$ zutrifft, folgt in der Tat $d_Y(\xi) \geqslant d_Y(x) - d(\xi,x)$. Dies zeigt die *Vorbemerkung.*

Zurück zur eigentlichen Aufgabe. Es genügt zu zeigen, daß $d_Y : X \longrightarrow \mathbf{R},\ x \longmapsto d_Y(x)$ stetig ist; vgl. zweite Bemerkung aus §2.1.1.

Eine Subbasis von $\mathbf{R}$ ist gegeben durch $\{\mathbf{R}_{>a} \;:\; a \in \mathbf{R}\} \cup \{\mathbf{R}_{<b} \;:\; b \in \mathbf{R}\}$; cf. Beispiel (2) aus §3.1.

Es genügt zu zeigen, daß $d_Y^{-1}(\mathbf{R}_{>a}) \overset{\text{off.!}}{\subseteq} X$ und $d_Y^{-1}(\mathbf{R}_{<b}) \overset{\text{off.!}}{\subseteq} X$ für $a,\, b \in \mathbf{R}$; vgl. Lemma aus §3.1.

Fall $d_Y^{-1}(\mathbf{R}_{>a}) \overset{\text{off.!}}{\subseteq} X$. Nach Definition offener Teilmengen von X ist zu zeigen, daß für alle $x \in d_Y^{-1}(\mathbf{R}_{>a})$, i.e. mit $d_Y(x) > a$, ein $\varepsilon \in \mathbf{R}_{>0}$ mit $\mathrm{B}_\varepsilon(x) \subseteq d_Y^{-1}(\mathbf{R}_{>a})$ existiert.

Ist $\xi \in \mathrm{B}_\varepsilon(x)$, so ist $d(\xi,x) < \varepsilon$. Mit der Vorbemerkung ist zunächst

$$d_Y(\xi) \;\geqslant\; d_Y(x) - d(\xi,x) \;>\; d_Y(x) - \varepsilon\;.$$

Wählt man $\varepsilon := d_Y(x) - a > 0$, so können wir $d_Y(\xi) > a$, i.e. $\xi \in d_Y^{-1}(\mathbf{R}_{>a})$ schließen. Somit ist für dieses ε in der Tat $\mathrm{B}_\varepsilon(x) \subseteq d_Y^{-1}(\mathbf{R}_{>a})$.

Fall $d_Y^{-1}(\mathbf{R}_{<b}) \overset{\text{off.!}}{\subseteq} X$. Nach Definition offener Teilmengen von X ist zu zeigen, daß für alle $x \in d_Y^{-1}(\mathbf{R}_{<b})$, i.e. mit $d_Y(x) < b$, ein $\tilde\varepsilon \in \mathbf{R}_{>0}$ mit $\mathrm{B}_{\tilde\varepsilon}(x) \subseteq d_Y^{-1}(\mathbf{R}_{<b})$ existiert.

Ist $\xi \in \mathrm{B}_{\tilde\varepsilon}(x)$, so ist $d(\xi,x) < \tilde\varepsilon$. Mit der Vorbemerkung ist zunächst

$$d_Y(\xi) \;\leqslant\; d_Y(x) + d(\xi,x) \;<\; d_Y(x) + \tilde\varepsilon\;.$$

Wählt man $\tilde\varepsilon := b - d_Y(x) > 0$, so können wir $d_Y(\xi) < b$, i.e. $\xi \in d_Y^{-1}(\mathbf{R}_{<b})$ schließen. Somit ist für dieses $\tilde\varepsilon$ in der Tat $\mathrm{B}_{\tilde\varepsilon}(x) \subseteq d_Y^{-1}(\mathbf{R}_{<b})$.

(4) Schreibe $\|-\| := \|-\|_{\langle -,=\rangle}$, i.e. $\|x\| = \langle x,x\rangle^{1/2}$ für $x \in V$.

Eine Subbasis von $\mathbf{R}$ ist gegeben durch $\{\mathbf{R}_{>a} \;:\; a \in \mathbf{R}\} \cup \{\mathbf{R}_{<b} \;:\; b \in \mathbf{R}\}$; cf. Beispiel (2) aus §3.1.

Es genügt zu zeigen, daß $\langle -,=\rangle^{-1}(\mathbf{R}_{>a}) \overset{\text{off.!}}{\subseteq} V \times V$ und $\langle -,=\rangle^{-1}(\mathbf{R}_{<b}) \overset{\text{off.!}}{\subseteq} V \times V$ für $a,\, b \in \mathbf{R}$; vgl. Lemma aus §3.1.

Sei einmal allgemein $\delta \in \mathbf{R}_{>0}$ gegeben. Sei $(\xi,\eta) \in \mathrm{B}_\delta(x) \times \mathrm{B}_\delta(y)$, also $\|\xi - x\| < \delta$ und $\|\eta - y\| < \delta$. Mit Cauchy-Schwarz aus §1.3.4 wird

$$\begin{array}{rcl} |\langle \xi,\eta\rangle - \langle x,y\rangle| & = & |\langle \xi,\eta\rangle - \langle \xi,y\rangle + \langle \xi,y\rangle - \langle x,y\rangle| \\ & = & |\langle \xi,\eta - y\rangle + \langle \xi - x,y\rangle| \\ & = & |\langle \xi,\eta - y\rangle - \langle x,\eta - y\rangle + \langle x,\eta - y\rangle + \langle \xi - x,y\rangle| \\ & = & |\langle \xi - x,\eta - y\rangle + \langle x,\eta - y\rangle + \langle \xi - x,y\rangle| \\ & \leqslant & |\langle \xi - x,\eta - y\rangle| + |\langle x,\eta - y\rangle| + |\langle \xi - x,y\rangle| \\ & \leqslant & \|\xi - x\| \cdot \|\eta - y\| + \|x\| \cdot \|\eta - y\| + \|\xi - x\| \cdot \|y\| \\ & < & \delta \cdot \delta + \|x\| \cdot \delta + \delta \cdot \|y\| \\ & = & \delta(\|x\| + \|y\| + \delta)\;. \end{array}$$

Fall $\langle -,= \rangle^{-1}(\mathbf{R}_{>a}) \overset{\text{off.!}}{\subseteq} V\times V$. Sei $(x,y) \in \langle -,= \rangle^{-1}(\mathbf{R}_{>a})$, i.e. sei $\langle x,y\rangle > a$. Es genügt, ein $\varepsilon \in \mathbf{R}_{>0}$ so zu finden, daß $\mathrm{B}_\varepsilon(x) \times \mathrm{B}_\varepsilon(y) \subseteq \langle -,= \rangle^{-1}(\mathbf{R}_{>a})$. Wähle $\varepsilon \in \mathbf{R}_{>0}$ dazu so, daß $\varepsilon(\|x\| + \|y\| + \varepsilon) \leqslant \langle x,y\rangle - a$. Dann wird für $(\xi,\eta) \in \mathrm{B}_\varepsilon(x) \times \mathrm{B}_\varepsilon(y)$

$$\langle \xi,\eta\rangle \;>\; \langle x,y\rangle - \varepsilon(\|x\| + \|y\| + \varepsilon) \;\geqslant\; a\;,$$

und also $(\xi,\eta) \in \langle -,= \rangle^{-1}(\mathbf{R}_{>a})$. Somit ist für dieses ε in der Tat $\mathrm{B}_\varepsilon(x) \times \mathrm{B}_\varepsilon(y) \subseteq \langle -,= \rangle^{-1}(\mathbf{R}_{>a})$.

Fall $\langle -,= \rangle^{-1}(\mathbf{R}_{<b}) \overset{\text{off.!}}{\subseteq} V\times V$. Sei $(x,y) \in \langle -,= \rangle^{-1}(\mathbf{R}_{<b})$, i.e. sei $\langle x,y\rangle < b$. Es genügt, ein $\tilde\varepsilon \in \mathbf{R}_{>0}$ so zu finden, daß $\mathrm{B}_{\tilde\varepsilon}(x) \times \mathrm{B}_{\tilde\varepsilon}(y) \subseteq \langle -,= \rangle^{-1}(\mathbf{R}_{<b})$. Wähle $\varepsilon \in \mathbf{R}_{>0}$ dazu so, daß $\varepsilon(\|x\| + \|y\| + \varepsilon) \leqslant b - \langle x,y\rangle$. Dann wird für $(\xi,\eta) \in \mathrm{B}_{\tilde\varepsilon}(x) \times \mathrm{B}_{\tilde\varepsilon}(y)$

$$\langle \xi,\eta\rangle \;<\; \langle x,y\rangle + \varepsilon(\|x\| + \|y\| + \varepsilon) \;\leqslant\; b\;,$$

und also $(\xi,\eta) \in \langle -,= \rangle^{-1}(\mathbf{R}_{<b})$. Somit ist für dieses $\tilde\varepsilon$ in der Tat $\mathrm{B}_{\tilde\varepsilon}(x) \times \mathrm{B}_{\tilde\varepsilon}(y) \subseteq \langle -,= \rangle^{-1}(\mathbf{R}_{<b})$.

(5) Zu $\mathbf{R}\times\mathbf{R} \xrightarrow{(+)} \mathbf{R}$. Nach Aufgabe 21.(5) ist die lineare Abbildung $\mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$, $\binom{x}{y} \longmapsto x+y$ stetig. Mit Aufgabe 32 können wir nun zwei stetige Abbildungen zur fraglichen komponieren, nämlich

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{R}\times\mathbf{R} & \xrightarrow{\sim} & \mathbf{R}^2 & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \binom{x}{y} & \longmapsto & x+y\;, \end{array}$$

und auf diese Weise deren Stetigkeit belegen.

Zu $\mathbf{R}\times\mathbf{R} \xrightarrow{(\cdot)} \mathbf{R}$. Dies ist der Spezialfall $V = \mathbf{R}$ in (4); cf. Beispiel (1) aus §1.3.4.

Ist nun X ein topologischer Raum und sind $f,\, g \in \mathrm{C}(X)$ gegeben, so ist zunächst $X \xrightarrow{(f,g)} \mathbf{R}\times\mathbf{R}$, $x \longmapsto (f(x),g(x))$ stetig; cf. Bemerkung in §3.4.
Als Komposita sind also auch

$$\begin{array}{ccc} (X \xrightarrow{(f,g)} \mathbf{R}\times\mathbf{R} \xrightarrow{(+)} \mathbf{R}) & = & (X \xrightarrow{f+g} \mathbf{R}) \\ (X \xrightarrow{(f,g)} \mathbf{R}\times\mathbf{R} \xrightarrow{(\cdot)} \mathbf{R}) & = & (X \xrightarrow{f\cdot g} \mathbf{R}) \end{array}$$

stetig, i.e. $f+g,\; f\cdot g \in \mathrm{C}(X)$.

Aufgabe 35

(1) Wir wollen zeigen, daß

$$\begin{array}{ccccccccccc} (X & \times & Y) & \times & Z & \longrightarrow & X & \times & Y & \times & Z \\ ((x & , & y) & , & z) & \longmapsto & (x & , & y & , & z) \end{array}$$

ein Homöomorphismus ist.
Wir haben die stetigen Projektionsabbildungen

$$\begin{array}{cccccccc} (X & \times & Y) & \times & Z & \xrightarrow{\pi_{X\times Y}} & X\times Y \\ ((x & , & y) & , & z) & \longmapsto & (x,y) \\[1ex] (X & \times & Y) & \times & Z & \xrightarrow{\pi_Z} & Z \\ ((x & , & y) & , & z) & \longmapsto & z \end{array}$$

Analog haben wir die stetigen Projektionsabbildungen $X\times Y \xrightarrow{\pi_X} X$ und $X\times Y \xrightarrow{\pi_Y} Y$. Die fragliche Abbildung läßt sich

$$(\pi_X \circ \pi_{X\times Y},\; \pi_Y \circ \pi_{X\times Y},\; \pi_Z) \;:\; (X\times Y)\times Z \longrightarrow X\times Y\times Z$$

schreiben, und ist somit stetig; vgl. Bemerkung in §3.4.

Wir haben auch noch die stetigen Projektionsabbildungen $X \times Y \times Z \xrightarrow{\pi_X} X$, $X \times Y \times Z \xrightarrow{\pi_Y} Y$ und $X \times Y \times Z \xrightarrow{\pi_Z} Z$.

Die Umkehrabbildung der fraglichen Abbildung läßt sich

$$((\pi_X, \pi_Y), \pi_Z) \;:\; X \times Y \times Z \longrightarrow (X \times Y) \times Z$$

schreiben, und ist somit ebenfalls stetig.

Nach Aufgabe 19.(2) ist die fragliche Abbildung also ein Homöomorphismus.

Nun wollen wir zeigen, daß

$$\begin{array}{ccccccc} X & \times & Y & \longrightarrow & Y & \times & X \\ (x & , & y) & \longmapsto & (y & , & x) \end{array}$$

ein Homöomorphismus ist.

Wir haben die stetigen Projektionsabbildungen $X \times Y \xrightarrow{\pi_X} X$, $X \times Y \xrightarrow{\pi_Y} Y$, $Y \times X \xrightarrow{\pi_X} X$ und $Y \times X \xrightarrow{\pi_Y} Y$.

Die fragliche Abbildung läßt sich

$$(\pi_Y, \pi_X) \;:\; X \times Y \longrightarrow Y \times X$$

schreiben, und ist somit stetig. Ihre Umkehrabbildung läßt sich

$$(\pi_X, \pi_Y) \;:\; Y \times X \longrightarrow Y \times X$$

schreiben, und ist somit stetig.

Nach Aufgabe 19.(2) ist die fragliche Abbildung also ein Homöomorphismus.

(2) Eine Basis von $\prod_{i=1}^k X_i$ ist gegeben durch $\{\prod_{i=1}^k U_i \;:\; U_i \overset{\text{off.}}{\subseteq} X\}$. Denn der Subbasis von $\prod_{i=1}^k X_i$ aus §3.4 entnimmt man zunächst, daß diese Menge aus offenen Teilmengen von $\prod_{i=1}^k X_i$ besteht. Da sie ferner die Subbasis umfaßt, ist sie selbst eine Subbasis. Da sie schließlich unter Schnitten je zweier ihrer Elemente abgeschlossen ist, ist sie eine Basis; cf. Aufgabe 25.(2).

Nach Aufgabe 32.(2) ist also eine Basis von $\prod_{i=1}^k X'_i$ für die Spurtopologie bezüglich $\prod_{i=1}^k X'_i \subseteq \prod_{i=1}^k X_i$ gegeben durch

$$\big\{ \big(\prod_{i=1}^k U_i\big) \cap \big(\prod_{i=1}^k X'_i\big) \;:\; U_i \overset{\text{off.}}{\subseteq} X \text{ für } 1 \leqslant i \leqslant k \big\} \,.$$

Auf der anderen Seite ist eine offene Menge von X'_i in der Spurtopologie bezüglich $X'_i \subseteq X_i$ von der Form $U_i \cap X'_i$ für ein $U_i \overset{\text{off.}}{\subseteq} X_i$, wobei $1 \leqslant i \leqslant k$. Also ist eine Basis von $\prod_{i=1}^k X'_i$ für die Produkttopologie der Spurtopologien auf den X'_i gegeben durch

$$\big\{ \prod_{i=1}^k (U_i \cap X'_i) \;:\; U_i \overset{\text{off.}}{\subseteq} X \text{ für } 1 \leqslant i \leqslant k \big\} \,.$$

Nun ist aber $\big(\prod_{i=1}^k U_i\big) \cap \big(\prod_{i=1}^k X'_i\big) = \prod_{i=1}^k (U_i \cap X'_i)$, und somit stimmen diese beiden Basen überein. Also stimmen auch die von ihnen erzeugte Topologien überein, als da wären zum einen die Spurtopologie bezüglich der Einbettung in die Produkttopologie und zum anderen die Produkttopologie der Spurtopologien.