

Lösung 8**Aufgabe 28**

(1) Wir haben

$$\begin{aligned} \{f_1^{-1}(V_1) : V_1 \overset{\text{off.}}{\subseteq} Y_1\} &= \{\emptyset, \{1, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 2, 3, 4\}\} \\ \{f_2^{-1}(V_2) : V_2 \overset{\text{off.}}{\subseteq} Y_2\} &= \{\emptyset, \{1, 3\}, \{1, 2, 3, 4\}\} \end{aligned}$$

Somit haben wir die von der Vereinigung

$$S := \{\emptyset, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 4\}\}$$

dieser beiden Mengen erzeugte Topologie zu berechnen. Wir erhalten, in der Notation der Bemerkung von §3.1,

$$\begin{aligned} S' &= \{\emptyset, \{1\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 4\}\} \\ S'' &= \{\emptyset, \{1\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 4\}\} . \end{aligned}$$

Es ist $T_{X, \text{initial}, (f_1, f_2)} = S''$.

(2) Wir haben

$$\begin{aligned} \{f_1^{-1}(V_1) : V_1 \overset{\text{off.}}{\subseteq} Y_1\} &= \{\emptyset, \{1\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 4\}, \{1, 2, 3, 4\}\} \\ \{f_2^{-1}(V_2) : V_2 \overset{\text{off.}}{\subseteq} Y_2\} &= \{\emptyset, \{2, 4\}, \{1, 2, 3, 4\}\} \end{aligned}$$

Somit haben wir die von der Vereinigung

$$S := \{\emptyset, \{1\}, \{1, 4\}, \{2, 4\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 3, 4\}\}$$

dieser beiden Mengen erzeugte Topologie zu berechnen. Wir erhalten, in der Notation der Bemerkung von §3.1,

$$\begin{aligned} S' &= \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{4\}, \{1, 4\}, \{2, 4\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 3, 4\}\} \\ S'' &= \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{4\}, \{1, 2\}, \{1, 4\}, \{2, 4\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 2, 3, 4\}\} . \end{aligned}$$

Es ist $T_{X, \text{initial}, (f_1, f_2)} = S''$.**Aufgabe 29**

Wir erhalten

$$\begin{aligned} &T_{X, \text{final}, (f_1, f_2)} \\ &= \{U \subseteq X : f_1^{-1}(U) \overset{\text{off.}}{\subseteq} Y_1\} \cap \{U \subseteq X : f_2^{-1}(U) \overset{\text{off.}}{\subseteq} Y_2\} \\ &= \{\emptyset, \{1\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 4\}\} \\ &\quad \cap \{U \subseteq X : f_2^{-1}(U) \overset{\text{off.}}{\subseteq} Y_2\} \\ &= \{\emptyset, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 2, 3, 4\}\} . \end{aligned}$$

Aufgabe 30

Wir haben

$$T_Y = \{g^{-1}(W) : W \overset{\text{off.}}{\subseteq} Z\} ,$$

und also

$$\begin{aligned}
T_X &= \{f^{-1}(V) : V \subseteq^{\text{off.}} Y\} \\
&= \{f^{-1}(V) : V = g^{-1}(W) \text{ für ein } W \subseteq^{\text{off.}} Z\} \\
&= \{f^{-1}(g^{-1}(W)) : W \subseteq^{\text{off.}} Z\} \\
&= \{(g \circ f)^{-1}(W) : W \subseteq^{\text{off.}} Z\} \\
&= T'_X.
\end{aligned}$$

Aufgabe 31

Wir haben die stetige Abbildung

$$\begin{aligned}
\mathbf{R} &\xrightarrow{f} \mathbf{R}^2 \\
t &\longmapsto f(t) := \begin{pmatrix} \cos(2\pi t) \\ \sin(2\pi t) \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

wie aus der Analysis bekannt.

Wegen $(\sin x)^2 + (\cos x)^2 = 1$ für $x \in \mathbf{R}$ existiert $f|_{S^1}$, ist stetig, und dazuhin, wie aus der Analysis bekannt, surjektiv.

Sind nun $t, t' \in \mathbf{R}$ mit $t - t' \in \mathbf{Z}$ gegeben, so ist $f(t) = \begin{pmatrix} \cos(2\pi t) \\ \sin(2\pi t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(2\pi t') \\ \sin(2\pi t') \end{pmatrix} = f(t')$, da $\sin x$ und $\cos x$ die Periode 2π besitzen. Somit gibt Beispiel (2) aus §3.3.2 die stetige Funktion

$$\begin{aligned}
\mathbf{R}/(\sim) &\xrightarrow{\bar{f}} S^1 \\
[t]_{\sim} &\longmapsto \bar{f}([t]_{\sim}) = f|_{S^1}(t) = f(t) = \begin{pmatrix} \cos(2\pi t) \\ \sin(2\pi t) \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

von der wir zeigen wollen, daß sie ein Homöomorphismus ist. Sie ist zunächst einmal surjektiv, wie sich von $f|_{S^1}$ vererbt.

Sind $t, t' \in \mathbf{R}$ so, daß $\begin{pmatrix} \cos(2\pi t) \\ \sin(2\pi t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(2\pi t') \\ \sin(2\pi t') \end{pmatrix} = \bar{f}([t]_{\sim}) = \bar{f}([t']_{\sim})$, so wird, wie aus der Analysis bekannt, $t - t' \in \mathbf{Z}$, und also $[t]_{\sim} = [t']_{\sim}$. Somit ist $\bar{f}$ injektiv.

Insgesamt ist $\bar{f}$ nun als bijektiv und stetig erkannt. Bleibt zu zeigen, daß $\bar{f}$ offen ist.

Schreibe $\mathbf{R} \xrightarrow{q} \mathbf{R}/(\sim)$, $t \longmapsto [t]_{\sim}$.

$$\begin{array}{ccc}
\mathbf{R} & \xrightarrow{f|_{S^1}} & S^1 \\
q \downarrow & \nearrow \bar{f} & \\
\mathbf{R}/(\sim) & &
\end{array}$$

Ist $\bar{U} \subseteq \mathbf{R}/(\sim)$ offen, so auch $q^{-1}(\bar{U})$, und zu zeigen ist, daß

$$\bar{f}(\bar{U}) = (\bar{f} \circ q)(q^{-1}(\bar{U})) = f|_{S^1}(q^{-1}(\bar{U})) \subseteq^{\text{off.}!} S^1.$$

Somit genügt es zu zeigen, daß $f|_{S^1}$ offen ist.

Da die Intervalle der Form (a, b) mit $a, b \in \mathbf{R}$ und $a < b$ eine Basis von $\mathbf{R}$ bilden, und da Bild zu nehmen mit Vereinigung vertauscht, genügt es, $f((a, b)) \subseteq^{\text{off.}!} S^1$ zu zeigen.

Mit einer Drehung, die umkehrbar linear und damit ein Homöomorphismus ist, vgl. Aufgabe 21.(5), und auch zu einem Homöomorphismus auf S^1 einschränkt, dürfen wir $a = 0$ annehmen.

Fall $b \in [0, 1/2]$. Dann ist

$$f((0, b)) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : y > 0 \text{ und } x > \cos(2\pi b) \right\} \cap S^1$$

und

$$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : y > 0 \text{ und } x > \cos(2\pi b) \right\} \subseteq^{\text{off.}} \mathbf{R}^2.$$

Fall $b \in [1/2, 1]$. Dann ist

$$f((0, b)) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : y > 0 \text{ oder } x < \cos(2\pi b) \right\} \cap S^1$$

und

$$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : y > 0 \text{ oder } x < \cos(2\pi b) \right\} \stackrel{\text{off.}}{\subseteq} \mathbf{R}^2.$$

Fall $b > 1$. Dann ist $f((0, b)) = S^1$.

Jedenfalls ist $f((0, b)) \stackrel{\text{off.}}{\subseteq} S^1$.