

Lösung 7**Aufgabe 24**

- (1) In den Bezeichnungen der Bemerkung (3) aus §3.1 erhalten wir folgendes.

$$\begin{aligned} S' &= \{\{1, 2\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 2, 3, 4\}\} \\ S'' &= \{\emptyset, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 2, 3, 4\}\} \end{aligned}$$

Und $\langle S \rangle_X = S''$ nach loc. cit.

- (2) In den Bezeichnungen der Bemerkung (3) aus §3.1 erhalten wir folgendes.

$$\begin{aligned} S' &= \{\{3\}, \{3, 4\}, \{3, 5\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 5\}, \{3, 4, 5, 6\}, \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\} \\ S'' &= \{\emptyset, \{3\}, \{3, 4\}, \{3, 5\}, \{1, 2, 3\}, \{3, 4, 5\}, \{1, 2, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 5\}, \{1, 2, 3, 4, 5\}, \\ &\quad \{3, 4, 5, 6\}, \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\} \end{aligned}$$

Und $\langle S \rangle_X = S''$ nach loc. cit.

Aufgabe 25

- (1) Ist S eine Basis von X , so gibt es für jedes $x \in U \stackrel{\text{off.}}{\subseteq} X$ noch ein $V \in S$ mit $x \in V \subseteq U$. Insbesondere trifft dies für $U := \bigcap_{i=1}^k U_i$ zu.

Sei umgekehrt die genannte Eigenschaft für S erfüllt. Wir wollen zeigen, daß S eine Basis von X ist. Ist $x \in U \stackrel{\text{off.}}{\subseteq} X$, so haben wir ein $V \in S$ mit $x \in V \subseteq U$ zu finden.

Da S als Subbasis von X vorausgesetzt ist, ist U eine Vereinigung von endlichen Schnitten von in S gelegenen Mengen. Insbesondere liegt x in einem solchen Schnitt, sagen wir, $x \in \bigcap_{i=1}^k U_i \subseteq U$ mit $k \geq 1$ und gewissen $U_i \in S$. Nach Voraussetzung gibt es nun ein $V \in S$ mit

$$x \in V \subseteq \bigcap_{i=1}^k U_i \subseteq U.$$

- (2) Ist der Schnitt von zwei Elementen von S wieder ein Element von S , so ist mit Induktion auch der Schnitt von $k \geq 1$ Elementen von S wieder ein Element von S . Somit ist die in (1) von S geforderte Eigenschaft in dortigen Bezeichnungen mit der Wahl $V = \bigcap_{i=1}^k U_i$ erfüllt.

- (3) Da $S \subseteq S' \subseteq \langle S \rangle_X$, ist $\langle S \rangle_X \subseteq \langle S' \rangle_X$.

Nun ist aber auch $S' \subseteq S'' = \langle S \rangle_X$, und folglich $\langle S' \rangle_X \subseteq \langle S \rangle_X$; vgl. Bemerkung (3) in §3.1.

Zusammengenommen ist also $\langle S \rangle_X = \langle S' \rangle_X$, und damit auch S' eine Subbasis von X .

Sind nun $U, V \in S'$, und schreiben wir $U = \bigcap_{i=1}^k U_i$ und $V = \bigcap_{i=k+1}^{k+k'} U_i$, wobei $k, k' \in \mathbf{Z}_{\geq 0}$ und $U_i \in S$ stets, so wird

$$U \cap V = \left(\bigcap_{i=1}^k U_i\right) \cap \left(\bigcap_{i=k+1}^{k+k'} U_i\right) = \bigcap_{i=1}^{k+k'} U_i \in S'.$$

Also ist die in (2) geforderte Eigenschaft erfüllt, und S' ist in der Tat eine Basis von X .

Aufgabe 26

Nach Definition ist eine Teilmenge B von $T_{X, \text{diskret}}$ eine Basis von $(X, T_{X, \text{diskret}})$, falls für alle $U \stackrel{\text{off.}}{\subseteq} X$ und alle $x \in U$ noch ein Element $V \in B$ existiert mit $x \in V \subseteq U$.

Sei nun $B := \{\{x\} : x \in X\}$. Sicher ist $B \subseteq T_{X, \text{diskret}} = \text{Pot}(X)$. Sei nun $U \subseteq X$ gegeben – jede Teilmenge von X ist ja nun offen. Sei ferner $x \in U$. Dann gilt $\{x\} \in B$ und $x \in \{x\} \subseteq U$.

Aufgabe 27

- (1) Ist $X = \emptyset$, so ist auch $f(X) = \emptyset$, und mithin abzählbar. Also ist o.E. $X \neq \emptyset$.

Sei $\mathbf{Z}_{\geq 1} \rightarrow X$ surjektiv. Es ist $f|^{f(X)} : X \rightarrow f(X)$ surjektiv. Also ist auch das Kompositum $\mathbf{Z}_{\geq 1} \rightarrow f(X)$ surjektiv. Somit ist $f(X)$ abzählbar.

- (2) Sei X abzählbar. Sei $Y \subseteq X$. Ist $Y = \emptyset$, so ist auch Y abzählbar. Somit ist o.E. $Y \neq \emptyset$.

Mit (1) genügt es, eine Surjektion von X auf Y anzugeben, um zu zeigen, daß auch Y abzählbar ist. Wähle $y_0 \in Y$. Sei

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & Y \\ x & \longmapsto & \begin{cases} x & \text{falls } x \in Y \\ y_0 & \text{falls } x \in X \setminus Y \end{cases} \end{array}$$

Diese Abbildung ist surjektiv, da jedes $y \in Y$ im Bild liegt, als Bild von ebendiesem y .

- (3) O.E. sind $X, Y \neq \emptyset$. Da wir Surjektionen $\mathbf{Z}_{\geq 1} \rightarrow X, i \mapsto x_i$ und $\mathbf{Z}_{\geq 1} \rightarrow Y, j \mapsto y_j$ haben, existiert auch eine Surjektion

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Z}_{\geq 1} \times \mathbf{Z}_{\geq 1} & \longmapsto & X \times Y \\ (i, j) & \longmapsto & (x_i, y_j) \end{array}$$

Mit (1) genügt es also zu zeigen, daß $\mathbf{Z}_{\geq 1} \times \mathbf{Z}_{\geq 1}$ abzählbar ist.

Dazu kann man die Surjektion

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Z}_{\geq 1} & \longrightarrow & \mathbf{Z}_{\geq 1} \times \mathbf{Z}_{\geq 1} \\ 1 & \longmapsto & (1, 1) \\ 2 & \longmapsto & (1, 2) \\ 3 & \longmapsto & (2, 1) \\ 4 & \longmapsto & (1, 3) \\ 5 & \longmapsto & (2, 2) \\ 6 & \longmapsto & (3, 1) \\ 7 & \longmapsto & (1, 4) \\ 8 & \longmapsto & (2, 3) \\ 9 & \longmapsto & (3, 2) \\ 10 & \longmapsto & (4, 1) \\ \vdots & & \vdots \end{array}$$

verwenden.

- (4) Wir haben eine Surjektion $\mathbf{Z} \times (\mathbf{Z} \setminus \{0\}) \rightarrow \mathbf{Q}, (z, w) \mapsto z/w$. Also genügt es zu zeigen, daß $\mathbf{Z} \times (\mathbf{Z} \setminus \{0\})$ abzählbar ist. Mit (3) genügt es zu zeigen, daß $\mathbf{Z}$ und $\mathbf{Z} \setminus \{0\}$ abzählbar sind. Mit (2) genügt es zu zeigen, daß $\mathbf{Z}$ abzählbar ist. Dazu kann man die Surjektion

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Z}_{\geq 1} & \longrightarrow & \mathbf{Z} \\ 1 & \longmapsto & 0 \\ 2 & \longmapsto & 1 \\ 3 & \longmapsto & -1 \\ 4 & \longmapsto & 2 \\ 5 & \longmapsto & -2 \\ 6 & \longmapsto & 3 \\ 7 & \longmapsto & -3 \\ \vdots & & \vdots \end{array}$$

verwenden.

(5) Nach Beispiel (4) aus §3.2 besitzt $\mathbf{R}^n$ die Basis

$$B = \{B_\varepsilon(x) : x \in \mathbf{Q}^n, \varepsilon \in \mathbf{Q}_{>0}\}.$$

Wir haben also eine Surjektion $\mathbf{Q}^n \times \mathbf{Q}_{>0} \longrightarrow B, (x, \varepsilon) \longmapsto B_\varepsilon(x)$. Somit genügt es zu zeigen, daß $\mathbf{Q}^n \times \mathbf{Q}_{>0}$ abzählbar ist.

Mit (3), iteriert angewandt, genügt es, dafür zu zeigen, daß $\mathbf{Q}$ und $\mathbf{Q}_{>0}$ abzählbar sind. Das aber folgt aus (4) und (2).

Es ist auch nicht schwierig zu zeigen, daß $\mathbf{R}$ keine abzählbare Menge ist. *Annahme*, doch. Dann ist auch das Intervall $(0, 1)$ abzählbar. Sei $\mathbf{Z}_{\geq 1} \rightarrow (0, 1), i \mapsto x_i$ eine Surjektion. Sei $y \in (0, 1)$ ein Dezimalbruch, der in der i -ten Nachkommastelle sich von x_i unterscheidet, und dies für alle $i \in \mathbf{Z}_{\geq 1}$. Insbesondere ist dann $y \neq x_i$ für alle $i \in \mathbf{Z}_{\geq 1}$, im *Widerspruch* zur Surjektivität unserer Abbildung. (Hierbei seien keine Neunerperioden in einer Dezimalbruchdarstellung zugelassen.)