M. Künzer

Topologie, SS 09

Lösung 6

Aufgabe 21

(1) Es ist f stetig. Wir wollen Satz 1b anwenden und verfahren wie folgt.

Sei $A_1 := \mathbf{R}_{\leqslant 0}$. Sei $A_2 := \mathbf{R}_{\geqslant 0}$. Es ist (A_1, A_2) eine lokalendliche (da endliche) abgeschlossene Überdeckung von $\mathbf{R}$.

Sei $f_1 : A_1 \longrightarrow \mathbf{R}$, $x \longmapsto -x$. Es ist f_1 stetig, etwa als Einschränkung der Identität von $\mathbf{R}$ auf A_1, multipliziert mit der konstanten Abbildung $x \longmapsto -1$; cf. Aufgabe 20.

Sei $f_2 : A_2 \longrightarrow \mathbf{R}$, $x \longmapsto x$. Es ist f_2 stetig, etwa als Einschränkung der Identität von $\mathbf{R}$ auf A_2.

Es ist $A_1 \cap A_2 = \{0\}$, und es ist $f_1|_{A_1 \cap A_2} = f_2|_{A_1 \cap A_2}$, da $f_1(0) = 0 = f_2(0)$.

Da nun $f|_{A_1} = f_1$ (i.e. $|x| = -x$ für $x \in \mathbf{R}_{\leqslant 0}$) und $f|_{A_2} = f_2$ (i.e. $|x| = x$ für $x \in \mathbf{R}_{\geqslant 0}$), folgt mit Satz 1b, daß f stetig ist.

Man kann auch direkt die ε-δ-Charakterisierung aus §2.2 anwenden.

(2) Es ist f nicht stetig. Wir wollen die ε-δ-Charakterisierung aus §2.2 anwenden.

Sei $x = 0$. Sei $\varepsilon = 1/2$. Sei $\delta \in \mathbf{R}_{>0}$. Wir wollen zeigen, daß $f(\mathrm{B}_\delta(x)) \not\subseteq \mathrm{B}_\varepsilon(f(x))$, i.e. daß $f\big((-\delta, +\delta)\big) \not\subseteq (-1/2, +1/2)$.

Dazu genügt es, ein $x \in (0, \delta)$ so anzugeben, daß $f(x) = 1$. Wähle $n \in \mathbf{Z}$ mit $n \geqslant 1/(2\pi\delta)$. Wähle $x = 1/(\pi/2 + 2\pi n)$. Dann ist $1/x = \pi/2 + 2\pi n > 1/\delta$, also $x < \delta$, und also auch $x \in (0, \delta)$. Ferner ist

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin(1/x) \\ &= \sin(\pi/2 + 2\pi n) \\ &= \sin(\pi/2) \\ &= 1\,. \end{aligned}$$

Skizze.

(3) Es ist f stetig. Wir wollen dazu die ε-δ-Charakterisierung aus §2.2 anwenden.

Sei $x \in \mathbf{R}_{>0}$. Sei $\varepsilon \in \mathbf{R}_{>0}$. Wir müssen ein $\delta \in \mathbf{R}_{>0}$ finden mit $f(\mathrm{B}_\delta(x) \cap \mathbf{R}_{>0}) \subseteq \mathrm{B}_\varepsilon(f(x))$. Beachte hierzu, daß der Ball mit Radius δ im metrischen Teilraum $\mathbf{R}_{>0}$ von $\mathbf{R}$ sich als Schnitt des Balles $\mathrm{B}_\delta(x)$ in $\mathbf{R}$ mit $\mathbf{R}_{>0}$ ergibt.

Es sollte also für alle $\tilde{x} \in \mathbf{R}_{>0}$ mit $|\tilde{x} - x| < \delta$ gelten, daß

$$\left|\frac{1}{\tilde{x}} - \frac{1}{x}\right| \overset{!}{<} \varepsilon \;,$$

i.e. daß

$$|x - \tilde{x}| \overset{!}{<} \varepsilon x \tilde{x} \;.$$

Sei dementsprechend $\delta := \min\{\varepsilon x^2/2,\, x/2\}$. Falls $|\tilde{x} - x| < \delta$, ist also insbesondere $x/2 < \tilde{x}$. Für ein solches $\tilde{x}$ wird somit in der Tat

$$|x - \tilde{x}| \;<\; \delta \;\leqslant\; \varepsilon x (x/2) \;<\; \varepsilon x \tilde{x} \;.$$

(4) Es ist f stetig.

Dank Aufgabe 20 dürfen wir verwenden, daß die Summe und das Produkt stetiger Funktionen wiederum stetig ist.

Nun ist eine konstante Funktion stetig. Ferner ist die Identität $\mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$, $x \longmapsto x$ stetig. Ein Produkt solcher Funktionen liefert die stetige Monomfunktion $\mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$, $x \longmapsto a_i x^i$.

Als Summe von solchen Monomfunktionen ist nun auch die Polynomfunktion

$$\mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}\;, \quad x \longmapsto a_n x^n + \cdots a_0 x^0$$

stetig.

(5) Es ist f stetig. Wir wollen dazu die ε-δ-Charakterisierung aus §2.2 anwenden.

Die Norm auf Y werde mit $\|-\|_Y$ bezeichnet.

Sei $x \in X$. Sei $\varepsilon > 0$. Wir müssen ein $\delta \in \mathbf{R}_{>0}$ so finden, daß $f(\mathrm{B}_\delta(x)) \subseteq \mathrm{B}_\varepsilon(f(x))$, i.e. so, daß für alle $\tilde{x} \in X$ mit $\|x - \tilde{x}\|_2 < \delta$ auch $\|f(x) - f(\tilde{x})\|_Y < \varepsilon$.

Nun aber ist $f(x) - f(\tilde{x}) = f(x - \tilde{x})$. Also genügt es, ein $\delta \in \mathbf{R}_{>0}$ so zu finden, daß aus $\|\xi\|_2 < \delta$ schon $\|f(\xi)\|_Y < \varepsilon$ folgt – denn dies kann man dann auf $\xi = x - \tilde{x}$ anwenden.

Sei $(e_1, \ldots, e_k)$ die $\mathbf{R}$-lineare Standardbasis von X. Schreibe $\xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} = \xi_1 e_1 + \cdots + \xi_n e_n$. Damit wird jedenfalls

$$\|f(\xi)\|_Y \;=\; \|\xi_1 f(e_1) + \cdots + \xi_n f(e_n)\|_Y \;\leqslant\; |\xi_1|\|f(e_1)\|_Y + \cdots + |\xi_n|\|f(e_n)\|_Y \;.$$

Auf der anderen Seite ist für $1 \leqslant i \leqslant n$

$$|\xi_i| \;=\; \sqrt{\xi_i^2} \;\leqslant\; \sqrt{\xi_1^2 + \cdots + \xi_n^2} \;=\; \|\xi\|_2 \;.$$

Ist also $\|\xi\|_2 < \delta$, so ist

$$\begin{array}{rcl} \|f(\xi)\|_Y & \leqslant & |\xi_1|\|f(e_1)\|_Y + \cdots + |\xi_n|\|f(e_n)\|_Y \\ & \leqslant & \|\xi\|_2\|f(e_1)\|_Y + \cdots + \|\xi\|_2\|f(e_n)\|_Y \\ & < & \delta(\|f(e_1)\|_Y + \cdots + \|f(e_n)\|_Y) \end{array}$$

falls $(\|f(e_1)\|_Y + \cdots + \|f(e_n)\|_Y) \neq 0$. Wählen wir

$$\delta \;:=\; \begin{cases} \varepsilon/(\|f(e_1)\|_Y + \cdots + \|f(e_n)\|_Y) & \text{falls } \|f(e_1)\|_Y + \cdots + \|f(e_n)\|_Y \neq 0 \\ 1 & \text{falls } \|f(e_1)\|_Y + \cdots + \|f(e_n)\|_Y = 0\;, \end{cases}$$

so ist jedenfalls $\|f(\xi)\|_Y < \varepsilon$, falls $\|\xi\|_2 < \delta$.

(6) Es ist f stetig. Wir wollen dazu die ε-δ-Charakterisierung aus §2.2 anwenden.

Sei $x \in X$. Sei $\varepsilon \in \mathbf{R}_{>0}$. Wähle $\delta := \varepsilon$.

Sei $\tilde{x} \in X$. Mit (Nor 3) erhalten wir

$$\|x\| \;=\; \|x - \tilde{x} + \tilde{x}\| \;\leqslant\; \|x - \tilde{x}\| + \|\tilde{x}\| \;,$$

und also

$$\|x\| - \|\tilde{x}\| \;\leqslant\; \|x - \tilde{x}\| \;.$$

Mit vertauschten Rollen von x und $\tilde{x}$ folgt genauso

$$\|\tilde{x}\| - \|x\| \;\leqslant\; \|\tilde{x} - x\| \;=\; \|x - \tilde{x}\| \;.$$

Zusammengenommen gilt also

$$|\,\|x\| - \|\tilde{x}\|\,| \;\leqslant\; \|x - \tilde{x}\| \;.$$

Ist nun $\|x - \tilde{x}\| < \varepsilon$, so ist auch $|\,\|x\| - \|\tilde{x}\|\,| < \varepsilon$. Also ist $f(\mathrm{B}_\varepsilon(x)) \subseteq \mathrm{B}_\varepsilon(f(x))$.

Wir bemerken noch, daß (1) ein Spezialfall von (6) ist.

Aufgabe 22

(1) Es ist $f^{-1}(Y') \subseteq f^{-1}(\bar{Y}') \overset{\text{abg.}}{\subseteq} X$; cf. Aufgabe 18.(1). Also ist $\overline{f^{-1}(Y')} \subseteq f^{-1}(\bar{Y}')$; vgl. Bemerkung (2) aus §1.4.

Sei nun $X = \{1,2\}$, ausgestattet mit der diskreten Topologie. Sei $Y = \{1,2\}$, ausgestattet mit der Sierpinski-Topologie $\big\{\emptyset,\ \{1\},\ \{1,2\}\big\}$.

Sei die Abbildung f von X nach Y die Identität, also $f(1) = 1,\ f(2) = 2$.

Sei $Y' = \{1\}$. Es ist $\overline{\{1\}} = \{1,2\}$, da dies die einzige abgeschlossene Menge in Y ist, die $\{1\}$ umfaßt. Also ist $f^{-1}(\overline{\{1\}}) = \{1,2\}$.

Dahingegen ist $\overline{f^{-1}(\{1\})} = \overline{\{1\}} = \{1\}$, da in X alle Teilmengen abgeschlossen sind.

Gleichheit gilt hier also im allgemeinen nicht.

(2) Es ist $\emptyset = \partial X' = \bar{X}' \smallsetminus X'^{\circ}$ genau dann, wenn $X'^{\circ} = \bar{X}'$. Da X' zwischen diesen beiden Mengen liegt, ist dies genau dann erfüllt, wenn $X'^{\circ} = X' = \bar{X}'$. Dies wiederum ist genau dann der Fall, wenn $X' \overset{\text{off.}}{\subseteq} X$ und $X' \overset{\text{abg.}}{\subseteq} X$; vgl. Bemerkung $(4,5)$ in §1.4.

(3) Da $X' \subseteq \bar{X}'$, ist $X'^{\circ} \subseteq (\bar{X}')^{\circ}$. Ferner ist $\bar{\bar{X}}' = \bar{X}'$; cf. Bemerkung $(4,5)$ in §1.4. Also ist

$$\partial \bar{X}' \;=\; \bar{\bar{X}}' \smallsetminus (\bar{X}')^{\circ} \;=\; \bar{X}' \smallsetminus (\bar{X}')^{\circ} \;\supseteq\; \bar{X}' \smallsetminus X'^{\circ} \;=\; \partial X' \;.$$

Sei nun $X = \mathbf{R}$. Sei $X' = \mathbf{R} \smallsetminus \{0\}$. Es ist $X' = \mathbf{R}_{<0} \cup \mathbf{R}_{>0} \overset{\text{off.}}{\subseteq} \mathbf{R} = X$. Ferner ist $\bar{X}' = \mathbf{R} = X$, da insbesondere $0 \in \bar{X}'$, da für alle $\varepsilon \in \mathbf{R}_{>0}$ noch $\varepsilon/2 \in (0 - \varepsilon, 0 + \varepsilon) \cap X'$ liegt und damit dieser Schnitt nicht leer ist.

Also wird $\partial X' = \bar{X}' \smallsetminus X'^{\circ} = X \smallsetminus X' = \{0\}$.

Auf der anderen Seite wird $\partial \bar{X}' = \partial X = \emptyset$, da $X \overset{\text{off.}}{\subseteq} X$ und $X \overset{\text{abg.}}{\subseteq} X$; vgl. (2).

Gleichheit gilt hier also im allgemeinen nicht.

Aufgabe 23

(1) Die Aussage ist falsch. Für ein Gegenbeispiel begeben wir uns in die Situation von Aufgabe 17.

Sei $X = \{1,2,3\}$ mit der Topologie $\big\{\emptyset, \{1\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{1,2,3\}\big\})$.

Sei $Y = \{1,2\}$ mit der Topologie $\big\{\emptyset, \{1\}, \{1,2\}\big\}$ der Sierpinski-Raum.

Sei

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ 1 & \longmapsto & 1 \\ 2 & \longmapsto & 1 \\ 3 & \longmapsto & 2\,. \end{array}$$

Es ist f offen, da jedes Bild einer offenen Mengen in X wieder offen in Y ist.

Sei $X' = \{2,3\}$. Es ist $Y' = f(X') = \{1,2\} = Y$.

Es ist $\{3\} = \{1,3\} \cap X' \overset{\text{off.}}{\subseteq} X'$ nach Definition der Spurtopologie.

Dahingegen ist $f|_{X'}^{Y'}(\{3\}) = f(\{3\}) = \{2\}$ nicht offen in Y'.

(2) Die Aussage ist richtig. Wir wollen zeigen, daß

$$\begin{array}{rcl} (0,1) & \xrightarrow{f} & \mathbf{R}_{>1} \\ x & \longmapsto & 1/x \end{array}$$

ein Homöomorphismus ist. Nach Aufgabe 21.(3) ist diese Abbildung als Einschränkung einer stetigen Abbildung stetig; vgl. zweite Bemerkung aus §2.1.1.

Nun ist mit derselben Begründung auch

$$\begin{array}{rcl} (0,1) & \xleftarrow{g} & \mathbf{R}_{>1} \\ 1/y & \longleftarrow\!\shortmid & y \end{array}$$

stetig.

Es ist $(g \circ f)(x) = g(1/x) = x$ für $x \in (0,1)$, also $g \circ f = \mathrm{id}$.

Es ist $(f \circ g)(y) = f(1/y) = y$ für $y \in \mathbf{R}_{>1}$, also $f \circ g = \mathrm{id}$.

Nach Aufgabe 19.(2) ist f also ein Homömorphismus. Mithin sind $(0,1)$ und $\mathbf{R}_{>1}$ homöomorph.