

**Lösung 5****Aufgabe 17**

- (1) Mit einiger Berechtigung kann man sagen, diese Aussage sei ersichtlich richtig. Um es sauber durchzuführen, gehen wir einmal den Weg über einen prämetrischen Raum.

Betrachte folgende Prämetrik  $d$  auf  $\{1, 2, 3\}$ .

$$\begin{array}{llll} d(1, 1) & := & 0 & d(1, 2) & := & 0 & d(1, 3) & := & 0 \\ d(2, 1) & := & 1 & d(2, 2) & := & 0 & d(2, 3) & := & 1 \\ d(3, 1) & := & 1 & d(3, 2) & := & 1 & d(3, 3) & := & 0 \end{array}$$

Wir *behaupten*, daß diese Prämetrik die Topologie

$$T^{\{1,2,3\},d} \stackrel{!}{=} \{\emptyset, \{1\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$$

induziert.

Es wird  $B_1(1) = \{1\}$ . Es wird  $B_1(2) = \{1, 2\}$ . Es wird  $B_1(3) = \{1, 3\}$ .

Somit sind  $\{1\} \stackrel{\text{off.}}{\subseteq} \{1, 2, 3\}$ ,  $\{1, 2\} \stackrel{\text{off.}}{\subseteq} \{1, 2, 3\}$  und  $\{1, 3\} \stackrel{\text{off.}}{\subseteq} \{1, 2, 3\}$ .

Nun ist  $1 \in B_\varepsilon(3)$  für alle  $\varepsilon \in \mathbf{R}_{>0}$ . Also sind  $\{3\}$  und  $\{2, 3\}$  keine offenen Teilmengen.

Ferner ist  $1 \in B_\varepsilon(2)$  für alle  $\varepsilon \in \mathbf{R}_{>0}$ . Also ist  $\{2\}$  keine offene Teilmenge.

Dies zeigt die *Behauptung*. Insbesondere liegt eine Topologie vor.

- (2) Wir notieren eine Abbildung  $f$  von  $\{1, 2, 3\}$  nach  $\{1, 2\}$  in der Form  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ f(1) & f(2) & f(3) \end{pmatrix}$ ; vgl. Konventionen.

Bekanntermaßen sind die beiden konstanten Abbildungen  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$  und  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$  stetig; cf. Beispiel (2) aus §2.1.1. Bleiben 6 weitere Abbildungen zu untersuchen.

Da das Urbild von  $\emptyset$  unter einer solchen Abbildung leer ist, und damit offen, und da das Urbild von  $\{1, 2\}$  unter einer solchen Abbildung gleich  $\{1, 2, 3\}$  ist, und damit offen, ist eine solche Abbildung stetig genau dann, wenn das Urbild der verbleibenden offenen Menge  $\{1\}$  offen ist.

Unter  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$  ist das Urbild von  $\{1\}$  gleich  $\{1, 2\}$ , und damit offen. Diese Abbildung ist also stetig.

Unter  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$  ist das Urbild von  $\{1\}$  gleich  $\{1, 3\}$ , und damit offen. Diese Abbildung ist also stetig.

Unter  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$  ist das Urbild von  $\{1\}$  gleich  $\{1\}$ , und damit offen. Diese Abbildung ist also stetig.

Unter  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$  ist das Urbild von  $\{1\}$  gleich  $\{2, 3\}$ , und damit nicht offen. Diese Abbildung ist also nicht stetig.

Unter  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$  ist das Urbild von  $\{1\}$  gleich  $\{2\}$ , und damit nicht offen. Diese Abbildung ist also nicht stetig.

Unter  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$  ist das Urbild von  $\{1\}$  gleich  $\{3\}$ , und damit nicht offen. Diese Abbildung ist also nicht stetig.

Wir können folgendes Ergebnis festhalten.

$$C(X, Y) = C(\{1, 2, 3\}, \{1, 2\}) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \right\}.$$

- (3) Wir sollen nun unter den  $3! = 6$  Bijektionen von  $X$  nach  $X$  die Homöomorphismen herausuchen, i.e. die Bijektionen, die stetig und offen sind.

Um offen zu sein, muß die einelementige Teilmenge  $\{1\}$  auf eine offene einelementige Teilmenge abgebildet werden, d.h. auf  $\{1\}$ .

Bekanntlich ist  $\text{id}_X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$  ein Homöomorphismus; cf. Beispiel (1) aus §2.1.3.

Da, wie gesagt, 1 auf 1 zu gehen hat, bleibt als andere Möglichkeit nurmehr  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ . Und in der Tat ist dies eine stetige und offene Bijektion, welche via Bild- und via Urbildnahme die offenen Teilmengen  $\{1, 2\}$  und  $\{1, 3\}$  vertauscht.

Als Ergebnis können wir festhalten, daß der Raum  $X$  zwei Homöomorphismen auf sich selbst besitzt,  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$  und  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ .

## Aufgabe 18

- (1) Die Aussage ist richtig.

Sei  $f$  stetig. Sei  $B \subseteq^{\text{abg.}} Y$ . Es wird

$$X \setminus f^{-1}(B) = f^{-1}(Y \setminus B) \subseteq^{\text{off.}} X,$$

und also  $f^{-1}(B) \subseteq^{\text{abg.}} X$ .

Sei umgekehrt  $f^{-1}(B) \subseteq^{\text{abg.}} X$  für alle  $B \subseteq^{\text{abg.}} Y$ . Sei  $V \subseteq^{\text{off.}} Y$ . Es wird

$$X \setminus f^{-1}(V) = f^{-1}(Y \setminus V) \subseteq^{\text{abg.}} X,$$

und also  $f^{-1}(V) \subseteq^{\text{off.}} X$ .

- (2) Die Aussage ist richtig.

Sei  $f$  stetig. Wir wollen zeigen, daß  $f(\overline{X'}) \subseteq \overline{f(X')}$ , i.e. daß  $\overline{X'} \subseteq f^{-1}(\overline{f(X')})$ . Nach (1) ist  $f^{-1}(\overline{f(X')})$  abgeschlossen, so daß es nach Bemerkung (2) aus §1.4 zu zeigen genügt, daß  $X' \subseteq f^{-1}(\overline{f(X')})$ , i.e. daß  $f(X') \subseteq \overline{f(X')}$ . Dies allerdings trifft zu.

Sei umgekehrt  $f(\overline{X'}) \subseteq \overline{f(X')}$  für alle  $X' \subseteq X$ , i.e. sei  $\overline{X'} \subseteq f^{-1}(\overline{f(X')})$  für alle  $X' \subseteq X$ . Sei  $B \subseteq^{\text{abg.}} Y$ . Nach (1) haben wir zu zeigen, daß  $f^{-1}(B) \subseteq^{\text{abg.}} X$ .

Sei  $X' := f^{-1}(B)$ . Es ist  $f(X') = B \cap f(X)$ . Es wird

$$\overline{f(X')} = \overline{B \cap f(X)} \subseteq \overline{B} \cap \overline{f(X)} = B \cap \overline{f(X)},$$

vgl. Lösung zu Aufgabe 15.(2), und also

$$\overline{f^{-1}(B)} = \overline{X'} \subseteq f^{-1}(\overline{f(X')}) \subseteq f^{-1}(B \cap \overline{f(X)}) = f^{-1}(B) \cap f^{-1}(\overline{f(X)}) = f^{-1}(B).$$

Da ohnehin  $\overline{f^{-1}(B)} \supseteq f^{-1}(B)$ , folgt  $\overline{f^{-1}(B)} = f^{-1}(B)$ , i.e.  $f^{-1}(B) \subseteq^{\text{abg.}} X$ .

Um ein Beispiel mit  $f(\overline{X'}) \subsetneq \overline{f(X')}$  zu bekommen, kann man von einem nichtleeren diskreten Raum  $X$  in einen verklumpten Raum  $Y$  via  $f$  nichtsurjektiv abbilden. Für  $X' = X$  wird dann  $f(\overline{X'}) = f(X) \subsetneq Y$ . Dahingegen ist  $\overline{f(X')} = Y$ , schon allein da der Abschluß jeder nichtleeren Teilmenge von  $Y$  gleich  $Y$  ist.

- (3) Die Aussage ist falsch.

Seien etwa  $X = \{1, 2, 3\}$  und  $Y = \{1, 2\}$  wie in Aufgabe 17.(2). Sei  $f := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ , es ist  $f$ , wie in loc. cit. festgestellt, stetig. Sei  $X' := \{2, 3\}$ .

Es ist  $X'^{\circ} = \emptyset$ , da dies die einzige in  $\{2, 3\}$  liegende offene Menge ist. Insbesondere ist  $f(X'^{\circ}) = \emptyset$ .

Es ist  $f(X') = \{1, 2\} \subseteq^{\text{off.}} Y$ . Insbesondere ist  $f(X')^{\circ} = \{1, 2\}$ .

Wir sehen, daß  $f(X'^{\circ}) = \emptyset$  keine Obermenge von  $f(X')^{\circ} = \{1, 2\}$  ist.

- (4) Die Aussage ist falsch.

Seien etwa  $X = \{1, 2, 3\}$  und  $Y = \{1, 2\}$  wie in Aufgabe 17.(2). Sei  $f := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ . Als konstante Abbildung ist  $f$  stetig; cf. Beispiel (2) aus §2.1.1. Sei  $X' := \{1\}$ .

Es ist  $X' \subseteq^{\text{off.}} X$ , und also  $X'^{\circ} = X' = \{1\}$ . Insbesondere ist  $f(X'^{\circ}) = \{2\}$ .

Es ist  $f(X') = \{2\}$ . Also ist  $f(X')^{\circ} = \{2\}^{\circ} = \emptyset$ .

Wir sehen, daß  $f(X'^{\circ}) = \{2\}$  keine Teilmenge von  $f(X')^{\circ} = \emptyset$  ist.

## Aufgabe 19

- (1) Sei  $f$  ein Homöomorphismus, also stetig, offen und bijektiv. Ist  $U \stackrel{\text{off.}}{\subseteq} X$ , so ist wegen  $f$  offen auch  $f(U)$  offen.

Ist umgekehrt  $f(U)$  offen, so ist wegen  $f$  stetig auch  $f^{-1}(f(U))$  offen. Da  $f$  injektiv ist, ist  $f^{-1}(f(U)) = U$ . Also ist  $U$  offen.

- (2) Ist  $f$  Homöomorphismus, so ist  $f$  stetig, offen und bijektiv. Insbesondere gibt es eine Umkehrabbildung  $X \xleftarrow{f^{-1}} Y$ . Setzen wir  $g := f^{-1}$ , so haben wir zu zeigen, daß  $g$  stetig ist. Sei  $U \stackrel{\text{off.}}{\subseteq} X$ . Es ist zu zeigen, daß  $g^{-1}(U) \stackrel{\text{off.}}{\subseteq} Y$ .

Da  $f$  bijektiv ist, und da  $g = f^{-1}$ , ist  $g^{-1}(U) = f(U)$ . Da  $f$  offen ist, ist nun in der Tat  $g^{-1}(U) = f(U) \stackrel{\text{off.}}{\subseteq} Y$ .

Sei nun umgekehrt ein  $X \xleftarrow{g} Y$  stetig mit  $g \circ f = \text{id}_X$  und  $f \circ g = \text{id}_Y$  existent. Dann ist zunächst  $f$  bijektiv mit  $f^{-1} = g$ . Wir haben zu zeigen, daß  $f$  offen ist. Sei  $U \stackrel{\text{off.}}{\subseteq} X$ . Es ist  $f(U) = g^{-1}(U) \stackrel{\text{off.}}{\subseteq} Y$ , da  $g$  als stetig vorausgesetzt ist. Somit ist  $f$  als offen nachgewiesen.

## Aufgabe 20

- (1) Schreibe  $h := f + g$ . Sei  $V \stackrel{\text{off.}}{\subseteq} \mathbf{R}$ . Wir wollen  $h^{-1}(V) \stackrel{\text{off.}}{\subseteq} X$  zeigen.

Sei  $x \in h^{-1}(V)$ . Es genügt zu zeigen, daß es  $U_x \stackrel{\text{off.}}{\subseteq} X$  gibt mit  $x \in U_x \subseteq h^{-1}(V)$ ; vgl. Bemerkung aus §1.1.3.

Es ist  $h(x) \in V$ . Sei  $\varepsilon \in \mathbf{R}_{>0}$  mit  $B_\varepsilon(h(x)) \subseteq V$ .

Wegen  $f$  stetig ist  $f^{-1}(B_{\varepsilon/2}(f(x))) \stackrel{\text{off.}}{\subseteq} X$ .

Wegen  $g$  stetig ist  $g^{-1}(B_{\varepsilon/2}(g(x))) \stackrel{\text{off.}}{\subseteq} X$ .

Sei

$$U_x := f^{-1}(B_{\varepsilon/2}(f(x))) \cap g^{-1}(B_{\varepsilon/2}(g(x))) \stackrel{\text{off.}}{\subseteq} X.$$

Da  $x$  in beiden Teilnehmern liegt, ist  $x \in U_x$ .

Bleibt zu zeigen, daß  $U_x \subseteq h^{-1}(V)$ . Sei  $y \in U_x$ , i.e. sei  $|f(y) - f(x)| < \varepsilon/2$  und  $|g(y) - g(x)| < \varepsilon/2$ . Es wird

$$\begin{aligned} |h(y) - h(x)| &= |(f(y) + g(y)) - (f(x) + g(x))| \\ &\leq |f(y) - f(x)| + |g(y) - g(x)| \\ &< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 \\ &= \varepsilon, \end{aligned}$$

und somit  $h(y) \in B_\varepsilon(h(x)) \subseteq V$ , woraus  $y \in h^{-1}(V)$ .

- (2) Schreibe  $h := f \cdot g$ . Sei  $V \stackrel{\text{off.}}{\subseteq} \mathbf{R}$ . Wir wollen  $h^{-1}(V) \stackrel{\text{off.}}{\subseteq} X$  zeigen.

Sei  $x \in h^{-1}(V)$ . Es genügt zu zeigen, daß es  $U_x \stackrel{\text{off.}}{\subseteq} X$  gibt mit  $x \in U_x \subseteq h^{-1}(V)$ ; vgl. Bemerkung aus §1.1.3.

Es ist  $h(x) \in V$ . Sei  $\varepsilon \in \mathbf{R}_{>0}$  mit  $B_\varepsilon(h(x)) \subseteq V$ .

Sei  $m := \max\{1, |f(x)|, |g(x)| + \varepsilon\}$  <sup>(1)</sup>. Es ist  $m \in \mathbf{R}_{>0}$ . Es ist  $\varepsilon/m \leq \varepsilon$ .

Wegen  $f$  stetig ist  $f^{-1}(B_{\varepsilon/m}(f(x))) \stackrel{\text{off.}}{\subseteq} X$ .

Wegen  $g$  stetig ist  $g^{-1}(B_{\varepsilon/m}(g(x))) \stackrel{\text{off.}}{\subseteq} X$ .

Sei

$$U_x := f^{-1}(B_{\varepsilon/m}(f(x))) \cap g^{-1}(B_{\varepsilon/m}(g(x))) \stackrel{\text{off.}}{\subseteq} X.$$

---

<sup>1</sup>Wie sich beim Lösen der Aufgabe am Ende als zweckmäßig herausstellt.

Da  $x$  in beiden Teilnehmern liegt, ist  $x \in U_x$ .

Bleibt zu zeigen, daß  $U_x \subseteq h^{-1}(V)$ . Sei  $y \in U_x$ , i.e. sei  $|f(y) - f(x)| < \varepsilon/m$  und  $|g(y) - g(x)| < \varepsilon/m$ . Insbesondere ist

$$|g(y)| \leq |g(x)| + \varepsilon/m \leq |g(x)| + \varepsilon$$

Es wird

$$\begin{aligned} |h(y) - h(x)| &= |f(y) \cdot g(y) - f(x) \cdot g(x)| \\ &= |f(y) \cdot g(y) - f(x) \cdot g(y) + f(x) \cdot g(y) - f(x) \cdot g(x)| \\ &\leq |f(y) \cdot g(y) - f(x) \cdot g(y)| + |f(x) \cdot g(y) - f(x) \cdot g(x)| \\ &= |f(y) - f(x)| |g(y)| + |f(x)| |g(y) - g(x)| \\ &\leq |f(y) - f(x)| (|g(x)| + \varepsilon) + |f(x)| |g(y) - g(x)| \\ &< (\varepsilon/m) \cdot m + m \cdot (\varepsilon/m) \\ &= \varepsilon, \end{aligned}$$

und somit  $h(y) \in B_\varepsilon(h(x)) \subseteq V$ , woraus  $y \in h^{-1}(V)$ .

Vgl. auch Aufgabe 33.(5).