M. Künzer

Topologie, SS 09

Lösung 4

Aufgabe 13

(1) Wir überprüfen die Axiome (Nor 1, 2, 3). Davon sind (Nor 1, 2) nahezu evident.

Zu (Nor 1). Sei $x \in \mathbf{R}^n$. Es ist $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i| = 0$ genau dann, wenn $|x_i| = 0$ für alle $1 \leqslant i \leqslant n$, was wiederum genau dann zutrifft, wenn $x = 0$.

Zu (Nor 2). Sei $x \in \mathbf{R}^n$. Sei $\lambda \in \mathbf{R}$. Es wird

$$\|\lambda x\|_1 \;=\; \textstyle\sum_{i=1}^n |\lambda x_i| \;=\; \sum_{i=1}^n |\lambda||x_i| \;=\; |\lambda| \sum_{i=1}^n |x_i| \;=\; |\lambda| \|x\|_1 \;.$$

Zu (Nor 3). Seien $x,\, y \,\in\, \mathbf{R}^n$. Es wird

$$\|x+y\|_1 \;=\; \textstyle\sum_{i=1}^n |x_i + y_i| \;\leqslant\; \sum_{i=1}^n (|x_i| + |y_i|) \;=\; \|x\|_1 + \|y\|_1 \;.$$

dank $(*)$ in Beispiel (1) von §1.3.2.

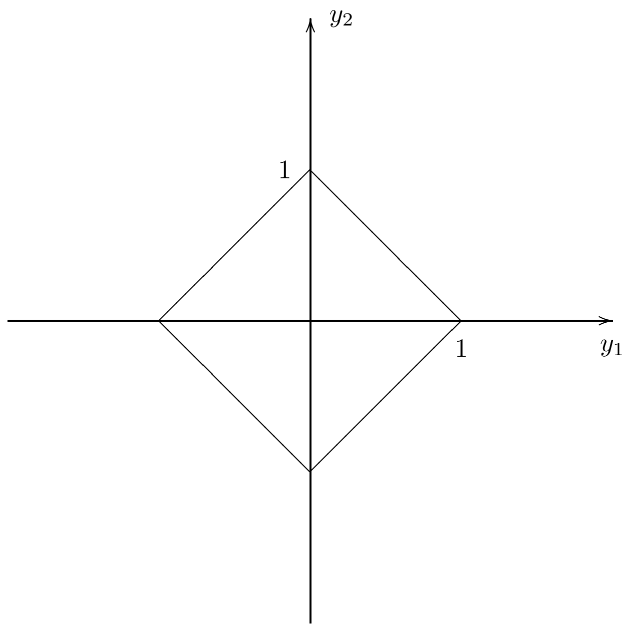
(2) Es ist allgemein

$$\mathrm{B}^{(1)}_\varepsilon(x) \;=\; \{ y \in \mathbf{R}^n \;:\; |y_1 - x_1| + \cdots + |y_n - x_n| < \varepsilon \} \;,$$

und speziell

$$\mathrm{B}^{(1)}_1\big(\big(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\big)\big) \;=\; \{ y \in \mathbf{R}^2 \;:\; |y_1| + |y_2| < 1 \} \;.$$

Somit ist $\mathrm{B}^{(1)}_1\big(\big(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\big)\big)$ das Innere des folgenden Quadrats.



(3) Gemäß Aufgabe 11 genügt es, $\alpha,\, \beta \,\in\, \mathbf{R}_{>0}$ mit

$$\alpha \|x\|_1 \;\leqslant\; \|x\|_2 \;\leqslant\; \beta \|x\|_1$$

für $x \in \mathbf{R}^n$ zu finden.

Zum einen wird

$$\|x\|_1^2 \;=\; \big(\textstyle\sum_{i=1}^n |x_i|\big)^2 \;\geqslant\; \big(\sum_{i=1}^n x_i^2\big) \;=\; \|x\|_2^2 \;,$$

und also $\|x\|_2 \leqslant \|x\|_1$, weswegen wir $\beta = 1$ wählen können.

Zum anderen ist $|x_i|^2 \leqslant \sum_{i=1}^n x_i^2$ für $1 \leqslant i \leqslant n$, woraus wir $|x_i| \leqslant \|x\|_2$ und also

$$\|x\|_1 \;=\; \sum_{i=1}^n |x_i| \;\leqslant\; \sum_{i=1}^n \|x\|_2 \;=\; n\|x\|_2$$

entnehmen, weswegen wir $\alpha = 1/n$ wählen können.

Der Faktor $\alpha = 1/n$ ist zulässig, aber nicht optimal.

Aufgabe 14

(1) Schreibe $Y := \{2^{-n} \;:\; n \in \mathbf{Z}_{\geqslant 0}\}$.
Wir behaupten, daß

$$\bar{Y} \overset{!}{=} Y \cup \{0\}\;.$$

Wir verwenden hierzu die Charakterisierung aus Lemma (1) aus §1.4.

Wir zeigen $\subseteq$. Sei $x \in \mathbf{R} \smallsetminus (Y \cup \{0\})$. Wir haben $x \overset{!}{\notin} \bar{Y}$ zu zeigen. Wir unterscheiden drei Fälle.
Falls $x < 0$, so ist $(x - |x|,\, x + |x|) \cap Y = \emptyset$, und also $x \notin \bar{Y}$.
Falls $x > 1$, so ist $(x - (x-1),\, x + (x-1)) \cap Y = \emptyset$, und also $x \notin \bar{Y}$.
Falls $x \in (0,1)$, so sei $n \in \mathbf{Z}_{\geqslant 1}$ mit $2^{-n} < x < 2^{-(n-1)}$. Explizit wird $n := -\lfloor \log_2 x \rfloor$. Sei

$$\varepsilon \;:=\; \min\{x - 2^{-n},\; 2^{-n+1} - x\}\;.$$

Dann ist $(x - \varepsilon,\, x + \varepsilon) \cap Y = \emptyset$, und also $x \notin \bar{Y}$.
Wir zeigen $\supseteq$. Da ohnehin $Y \subseteq \bar{Y}$, genügt es zu zeigen, daß $0 \in \bar{Y}$.
Sei $\varepsilon \in \mathbf{R}_{>0}$. Für $n = -\lfloor \log_2 \varepsilon \rfloor$ ist $2^{-n} \in (0 - \varepsilon,\, 0 + \varepsilon)$, und also $(0 - \varepsilon,\, 0 + \varepsilon) \cap Y \neq \emptyset$.
Somit ist in der Tat $0 \in \bar{Y}$.

(2) Schreibe $Y := \{\binom{x}{y} \;:\; x \in [-1,+1],\, y \in (-1,+1)\}$.
Schreibe $Y^- := \{\binom{x}{y} \;:\; x \in [-1,+1],\, y = -1\}$ und $Y^+ := \{\binom{x}{y} \;:\; x \in [-1,+1],\, y = +1\}$
Wir behaupten, daß

$$\bar{Y} \overset{!}{=} Y \cup Y^- \cup Y^+ \;=\; \{\tbinom{x}{y} \;:\; x \in [-1,+1],\, y \in [-1,+1]\}\;.$$

Wir verwenden hierzu die Charakterisierung aus Lemma (1) aus §1.4.

Wir zeigen $\subseteq$. Sei $\binom{x}{y} \in \mathbf{R}^2 \smallsetminus (Y \cup Y^- \cup Y^+)$. Wir haben $x \overset{!}{\notin} \bar{Y}$ zu zeigen. Wir unterscheiden zwei nicht disjunkte Fälle.
Falls $y \notin [-1,+1]$, so sei $\varepsilon := |y| - 1$. Dann ist $\mathrm{B}_\varepsilon(\binom{x}{y}) \cap Y = \emptyset$.
Falls $x \notin [-1,+1]$, so sei $\varepsilon := |x| - 1$. Dann ist $\mathrm{B}_\varepsilon(\binom{x}{y}) \cap Y = \emptyset$.

Wir zeigen $\supseteq$. Da ohnehin $Y \subseteq \bar{Y}$, genügt es zu zeigen, daß $Y^- \overset{!}{\subseteq} \bar{Y}$ und $Y^+ \overset{!}{\subseteq} \bar{Y}$.
Sei $\binom{x}{y} \in Y^-$, i.e. sei $x \in [-1,+1]$ und $y = -1$. Sei $\varepsilon \in \mathbf{R}_{>0}$. Falls $\varepsilon \leqslant 1$, dann ist $\binom{x}{-1+\varepsilon/2} \in \mathrm{B}_\varepsilon(\binom{x}{y}) \cap Y$; falls $\varepsilon > 1$, dann ist $\binom{x}{0} \in \mathrm{B}_\varepsilon(\binom{x}{y}) \cap Y$. Jedenfalls ist $\mathrm{B}_\varepsilon(\binom{x}{y}) \cap Y \neq \emptyset$. Somit ist $\binom{x}{y} \in \bar{Y}$.
Sei $\binom{x}{y} \in Y^+$, i.e. sei $x \in [-1,+1]$ und $y = +1$. Sei $\varepsilon \in \mathbf{R}_{>0}$. Falls $\varepsilon \leqslant 1$, dann ist $\binom{x}{1-\varepsilon/2} \in \mathrm{B}_\varepsilon(\binom{x}{y}) \cap Y$; falls $\varepsilon > 1$, dann ist $\binom{x}{0} \in \mathrm{B}_\varepsilon(\binom{x}{y}) \cap Y$. Jedenfalls ist $\mathrm{B}_\varepsilon(\binom{x}{y}) \cap Y \neq \emptyset$. Somit ist $\binom{x}{y} \in \bar{Y}$.

(3) Da $\emptyset \overset{\text{off.}}{\subseteq} \{1,2\}$, ist

$$\emptyset^\circ \;=\; \emptyset\;.$$

Da $\{1\} \overset{\text{off.}}{\subseteq} \{1,2\}$, ist

$$\{1\}^\circ \;=\; \{1\}\;.$$

Da $\{1,2\} \overset{\text{off.}}{\subseteq} \{1,2\}$, ist

$$\{1,2\}^\circ \;=\; \{1,2\}\;.$$

Betrachten wir die Teilmenge $\{2\}$. Die einzige offene Teilmenge von $\{1,2\}$, die in $\{2\}$ enthalten ist, ist $\emptyset$. Nach Definition des Inneren ist also

$$\{2\}^\circ \;=\; \emptyset\;.$$

(4) Nach Aufgabe 9 wissen wir, daß $\mathrm{B}_\varepsilon(x) \overset{\text{abg.}}{\subseteq} V$. Also ist $\overline{\mathrm{B}_\varepsilon(x)} \subseteq \bar{\mathrm{B}}_\varepsilon(x)$; vgl. Bemerkung (2) aus §1.4. Bleibt $\overline{\mathrm{B}_\varepsilon(x)} \overset{!}{\supseteq} \bar{\mathrm{B}}_\varepsilon(x)$ zu zeigen.

Ohnehin ist $\overline{\mathrm{B}_\varepsilon(x)} \supseteq \mathrm{B}_\varepsilon(x)$. Es bleibt also für $y \in \bar{\mathrm{B}}_\varepsilon(x) \smallsetminus \mathrm{B}_\varepsilon(x)$ zu zeigen, daß $y \overset{!}{\in} \overline{\mathrm{B}_\varepsilon(x)}$.

Für ein solches y ist $d(y,x) = \varepsilon$. Wir wollen Lemma (1) aus loc. cit. anwenden.

Sei $\eta > 0$. Wir haben zu zeigen, daß $\mathrm{B}_\eta(y) \cap \mathrm{B}_\varepsilon(x) \neq \emptyset$. Falls $\eta > \varepsilon$, so ist x in der Schnittmenge.

Betrachten wir noch den Fall $\eta \leqslant \varepsilon$.

Nun benötigen wir die Tatsache, daß V ein normierter Raum ist. Setze

$$z \;:=\; y + \tfrac{\eta}{2\varepsilon}(x-y)\;.$$

Es wird

$$\|z-y\| \;=\; \tfrac{\eta}{2\varepsilon}\|x-y\| \;=\; \tfrac{\eta}{2} \;<\; \eta\;,$$

und also $z \in \mathrm{B}_\eta(y)$. Es wird

$$\|z-x\| \;=\; \|(y-x) + \tfrac{\eta}{2\varepsilon}(x-y)\| \;=\; \|(1-\tfrac{\eta}{2\varepsilon})(y-x)\| \;=\; (1-\tfrac{\eta}{2\varepsilon})\|y-x\| \;=\; \varepsilon - \eta/2 \;<\; \varepsilon\;,$$

und also $z \in \mathrm{B}_\varepsilon(x)$. Somit ist $z \in \mathrm{B}_\eta(y) \cap \mathrm{B}_\varepsilon(x)$, und also $\mathrm{B}_\eta(y) \cap \mathrm{B}_\varepsilon(x) \neq \emptyset$

In einem metrischen Raum kann es passieren, daß $\overline{\mathrm{B}_\varepsilon(x)} \subsetneq \bar{\mathrm{B}}_\varepsilon(x)$. Sei etwa der metrische Raum $\mathbf{Z}$ mit der von der reellen Geraden eingeschränkten Metrik versehen. Dann wird $\mathrm{B}_1(0) = \{0\} \overset{\text{abg.}}{\subseteq} \mathbf{Z}$, und also $\overline{\mathrm{B}_1(0)} = \mathrm{B}_1(0) = \{0\}$. Auf der anderen Seite ist aber $\bar{\mathrm{B}}_1(0) = \{-1,0,+1\}$.

Aufgabe 15

(1) Die Aussage ist richtig.

Zum einen ist $X \smallsetminus Y \subseteq X \smallsetminus Y^\circ \overset{\text{abg.}}{\subseteq} X$, was $\overline{X \smallsetminus Y} \subseteq X \smallsetminus Y^\circ$ zeigt; cf. Bemerkung (2) aus §1.4.

Zum anderen ist $X \smallsetminus (\overline{X \smallsetminus Y}) \overset{\text{off.}}{\subseteq} X$ und $X \smallsetminus (\overline{X \smallsetminus Y}) \subseteq Y$, was $X \smallsetminus (\overline{X \smallsetminus Y}) \subseteq Y^\circ$ zeigt; cf. Bemerkung (3) aus loc. cit. Dies wiederum ist gleichbedeutend mit $\overline{X \smallsetminus Y} \supseteq X \smallsetminus Y^\circ$.

Insgesamt haben wir also $\overline{X \smallsetminus Y} = X \smallsetminus Y^\circ$ nachgewiesen.

(2) Die Aussage ist falsch

Zwar ist $Y \cap Z \subseteq \overline{Y} \cap \overline{Z} \overset{\text{abg.}}{\subseteq} X$, was $\overline{Y \cap Z} \subseteq \overline{Y} \cap \overline{Z}$ zeigt; cf. Bemerkung (2) aus §1.4.

Aber diese Inklusion kann zuweilen echt sein. Sei z.B. $Y := [0,1) \subseteq \mathbf{R}$, sei $Z := \mathbf{R}_{\geqslant 1}$. Wir haben im Beispiel in loc. cit. ermittelt, daß $\overline{Y} = [0,1]$. Ferner ist $Z \overset{\text{abg.}}{\subseteq} \mathbf{R}$, und also $\bar{Z} = Z = \mathbf{R}_{\geqslant 1}$. Nun aber wird

$$\overline{Y \cap Z} \;=\; \bar{\emptyset} \;=\; \emptyset\;,$$

da $\emptyset \overset{\text{abg.}}{\subseteq} \mathbf{R}$. Auf der anderen Seite ist jedoch

$$\overline{Y} \cap \overline{Z} \;=\; [0,1] \cap \mathbf{R}_{\geqslant 1} \;=\; \{1\}\;.$$

(3) Die Aussage ist richtig.

Zum einen ist $Y \cup Z \subseteq \overline{Y} \cup \overline{Z} \overset{\text{abg.}}{\subseteq} X$; cf. Aufgabe 4.(5). Dies zeigt $\overline{Y \cup Z} \subseteq \overline{Y} \cup \overline{Z}$; cf. Bemerkung (2) aus §1.4.

Zum anderen folgt aus $Y \subseteq Y \cup Z \subseteq \overline{Y \cup Z}$, daß $\bar{Y} \subseteq \overline{Y \cup Z}$; cf. Bemerkung (2) aus loc. cit. Genauso folgt $\bar{Z} \subseteq \overline{Y \cup Z}$. Somit ist also auch $\bar{Y} \cup \bar{Z} \subseteq \overline{Y \cup Z}$.

Insgesamt ist mithin $\overline{Y \cup Z} = \overline{Y} \cup \overline{Z}$.

Aufgabe 16

Ist $y = \lambda x$ für ein $\lambda \in \mathbf{R}_{>0}$, so folgt

$$\|x+y\| \;=\; \|(1+\lambda)x\| \;=\; (1+\lambda)\|x\| \;=\; \|x\| + \lambda\|x\| \;=\; \|x\| + \|\lambda x\| \;=\; \|x\| + \|y\| \;.$$

Sei umgekehrt $\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$ vorausgesetzt. Dann ist

$$\begin{aligned} 0 &= (\|x\| + \|y\|)^2 - \|x+y\|^2 \\ &= (\langle x,x\rangle^{1/2} + \langle y,y\rangle^{1/2})^2 - \langle x+y, x+y\rangle \\ &= (\langle x,x\rangle + 2\langle x,x\rangle^{1/2}\langle y,y\rangle^{1/2} + \langle y,y\rangle) - (\langle x,x\rangle + 2\langle x,y\rangle + \langle y,y\rangle) \\ &= 2(\langle x,x\rangle^{1/2}\langle y,y\rangle^{1/2} - \langle x,y\rangle)\;, \end{aligned}$$

also $\langle x,y\rangle = \langle x,x\rangle^{1/2}\langle y,y\rangle^{1/2}$ und somit $\langle x,y\rangle^2 = \langle x,x\rangle\langle y,y\rangle$. Mit der Zusatzaussage aus dem Lemma von Cauchy-Schwarz aus §1.3.4 ist mithin (x,y) linear abhängig. Da $x \neq 0$ vorausgesetzt ist, gibt es somit ein $\lambda \in \mathbf{R}$ mit $y = \lambda x$. Wir wollen $\lambda \overset{!}{>} 0$ zeigen.

Da $x \neq 0$ und $y \neq 0$, ist $\langle x,x\rangle^{1/2}\langle y,y\rangle^{1/2} > 0$, und also auch $\langle x,y\rangle > 0$. Nun aber ist $\langle x,y\rangle = \langle x,\lambda x\rangle = \lambda\langle x,x\rangle$. Da $\langle x,x\rangle > 0$, folgt in der Tat, daß $\lambda > 0$.

Für einen normierten Raum ist die Aussage im allgemeinen falsch. Sei etwa $(\mathbf{R}^2, \|-\|_\infty)$ betrachtet. Dann ist zwar

$$\|\left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right) + \left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right)\|_\infty \;=\; 2 \;=\; \|\left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right)\|_\infty + \|\left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right)\|_\infty\;,$$

aber $(\left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right))$ ist linear unabhängig.