

Lösung 3

Aufgabe 9

Wir haben zu zeigen, daß $X \setminus \bar{B}_\varepsilon(x) \stackrel{\text{off.}}{\subseteq} X$. Sei $y \in X \setminus \bar{B}_\varepsilon(x)$, d.h. sei $d(y, x) > \varepsilon$.

Sei $\eta := d(y, x) - \varepsilon$. Wir behaupten, daß $B_\eta(y) \stackrel{!}{\subseteq} X \setminus \bar{B}_\varepsilon(x)$.

Sei $z \in B_\eta(y)$, i.e. $d(z, y) < \eta$. Wir müssen zeigen, daß $z \in X \setminus \bar{B}_\varepsilon(x)$, i.e. daß $d(z, x) > \varepsilon$. In der Tat wird mit (Met 3)

$$d(x, z) + d(z, y) \geq d(x, y) ,$$

und also

$$d(z, x) \geq d(x, y) - d(z, y) > d(x, y) - \eta = d(x, y) - (d(y, x) - \varepsilon) = \varepsilon .$$

Vgl. auch das Lemma in §1.3.2.

Aufgabe 10

Das Lemma von Cauchy-Schwarz aus §1.3.4 liefert bezüglich des Standardskalarprodukts $\langle x, y \rangle := x^t y$ für $x, y \in \mathbf{R}^3$, daß

$$\left((a \ b \ c) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)^2 \leq \left((a \ b \ c) \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \right) \left((1 \ 1 \ 1) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) ,$$

also daß

$$(a + b + c)^2 \leq 3(a^2 + b^2 + c^2) ,$$

was wiederum zu

$$2ab + 2ac + 2bc \leq 2(a^2 + b^2 + c^2)$$

und also zu

$$ab + ac + bc \leq a^2 + b^2 + c^2$$

äquivalent ist.

In der ersten, und damit auch in jeder weiteren dieser Ungleichungen gilt nach der Zusatzaussage im Lemma von Cauchy-Schwarz Gleichheit genau dann, wenn $\left(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ linear abhängig ist, i.e. wenn $a = b = c$.

Aufgabe 11

- (1) Beachte, daß $\beta^{-1} \|x\|' \leq \|x\| \leq \alpha^{-1} \|x\|'$ für $x \in V$. Die Situation ist also symmetrisch in $\| - \|$ und $\| - \|'$, so daß es genügt, $T' \stackrel{!}{\subseteq} T$ zu zeigen.

Sei $U \subseteq V$ eine bezüglich T' offene Teilmenge, i.e. $U \in T'$. Wir haben zu zeigen, daß sie bezüglich T offen ist, i.e. $U \stackrel{!}{\in} T$. Sei also $x \in U$. Wir müssen ein $\eta \in \mathbf{R}_{>0}$ finden mit $B_\eta^{(V,d)}(x) \stackrel{!}{\subseteq} U$.

Da $U \subseteq V$ bezüglich T' offen ist, gibt es ein $\varepsilon \in \mathbf{R}_{>0}$ mit $B_\varepsilon^{(V,d')}(x) \subseteq U$. Setze $\eta := \varepsilon/\beta \in \mathbf{R}_{>0}$. Es wird

$$B_\eta^{(V,d)}(x) \subseteq B_\varepsilon^{(V,d')}(x) ,$$

da für $y \in B_\eta^{(V,d)}(x)$, also für $d(y, x) < \eta$, in der Tat

$$d'(y, x) = \|y - x\|' \leq \beta \|y - x\| = \beta \cdot d(y, x) < \beta \cdot \eta = \varepsilon ,$$

und somit $y \in B_\varepsilon^{(V,d')}(x)$ ist. Also ist insgesamt

$$B_\eta^{(V,d)}(x) \subseteq B_\varepsilon^{(V,d')}(x) \subseteq U ,$$

wie verlangt.

(2) Zum einen ist wegen $|x_j| = \sqrt{x_j^2} \leq \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$ für $1 \leq j \leq n$ auch

$$\|x\|_\infty = \max\{|x_i| : 1 \leq i \leq n\} \leq \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} = \|x\|_2.$$

für $x = (x_i)_i \in \mathbf{R}^n$.

Zum anderen ist

$$\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} \leq \sqrt{n \cdot \max\{|x_i| : 1 \leq i \leq n\}^2} = \sqrt{n} \cdot \|x\|_\infty$$

für $x \in \mathbf{R}^n$.

Also ist insgesamt, wie in (1) verlangt,

$$1 \cdot \|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n} \cdot \|x\|_\infty$$

für $x \in \mathbf{R}^n$.

Aufgabe 12

(1) Es ist $U = U \cap Y$ mit $U \overset{\text{off.}}{\subseteq} X$. Nach Definition der Spurtopologie ist also $U \overset{\text{off.}}{\subseteq} Y$.

(2) Es ist $A = A \cap Y$ mit $A \overset{\text{abg.}}{\subseteq} X$. Nach Aufgabe 5.(2) ist also $A \overset{\text{abg.}}{\subseteq} Y$.