M. Künzer

Topologie, SS 09

Lösung 2

Aufgabe 5

(1) Es ist $U_i := X \smallsetminus A_i \overset{\text{off.}}{\subseteq} X$ für $i \in I$. Mit (Top 2) ist $\bigcup_{i\in I} U_i \overset{\text{off.}}{\subseteq} X$, und also

$$\bigcap_{i\in I} A_i \;=\; \bigcap_{i\in I} (X \smallsetminus U_i) \;=\; X \smallsetminus \big(\bigcup_{i\in I} U_i\big) \;\overset{\text{abg.}}{\subseteq}\; X\ .$$

(2) Ist $Z \overset{\text{abg.}}{\subseteq} Y$, so ist $Y \smallsetminus Z \overset{\text{off.}}{\subseteq} Y$. Also gibt es nach Definition der Spurtopologie in §1.2.2 ein $U' \subseteq X$ mit $Y \smallsetminus Z = Y \cap U'$. Setze $Z' := X \smallsetminus U' \overset{\text{abg.}}{\subseteq} X$. Es wird

$$Y \cap Z' \;=\; Y \cap (X \smallsetminus U') \;=\; Y \smallsetminus (Y \cap U') \;=\; Y \smallsetminus (Y \smallsetminus Z) \;=\; Z\ .$$

Sei umgekehrt $Z = Z' \cap Y$ für ein $Z' \overset{\text{abg.}}{\subseteq} X$. Dann ist $X \smallsetminus Z' \overset{\text{off.}}{\subseteq} X$, also

$$Y \smallsetminus Z \;=\; Y \smallsetminus (Z' \cap Y) \;=\; Y \cap (X \smallsetminus Z') \;\overset{\text{off.}}{\subseteq}\; Y\ ,$$

und somit $Z \overset{\text{abg.}}{\subseteq} Y$.

Aufgabe 6

(1) Die Aussage ist falsch. Sei etwa $X = \mathbf{R}$, $Y = \{0\}$ und $Z = Y$. Dann ist

$$Z \;=\; \{0\} \;\overset{\text{off.}}{\subseteq}\; \{0\} \;=\; Y\ ,$$

da die volle Teilmenge stets eine offene Teilmenge ist, aber

$$Z \;=\; \{0\} \;\overset{\text{nicht off.}}{\subseteq}\; \mathbf{R} \;=\; X\ ,$$

da es für $0 \in \{0\}$ kein $\varepsilon \in \mathbf{R}_{>0}$ mit $(0-\varepsilon,\, 0+\varepsilon) \subseteq \{0\}$ gibt.

(2) Die Aussage ist richtig. Wir haben hierzu zu zeigen, daß aus $U \overset{\text{off.}}{\subseteq} Y \overset{\text{off.}}{\subseteq} X$ folgt, daß $U \overset{\text{off.!}}{\subseteq} X$.

Da $U \overset{\text{off.}}{\subseteq} Y$, gibt es nach Definition der Spurtopologie in §1.2.2 ein $U' \overset{\text{off.}}{\subseteq} X$ mit $U = Y \cap U'$. Da $Y \overset{\text{off.}}{\subseteq} X$ und $U' \overset{\text{off.}}{\subseteq} X$, ist auch $U = Y \cap U' \overset{\text{off.}}{\subseteq} X$ dank (Top 3).

(3) Die Aussage ist richtig. Wir haben hierzu zu zeigen, daß aus $A \overset{\text{abg.}}{\subseteq} Y \overset{\text{abg.}}{\subseteq} X$ folgt, daß $A \overset{\text{abg.!}}{\subseteq} X$.

Da $A \overset{\text{abg.}}{\subseteq} Y$, gibt es ein $A' \overset{\text{abg.}}{\subseteq} X$ mit $A = A' \cap Y$; cf. Aufgabe 5.(2). Da $A' \overset{\text{abg.}}{\subseteq} X$ und $Y \overset{\text{abg.}}{\subseteq} X$, folgt mit Aufgabe 5.(1), daß $A = A' \cap Y \overset{\text{abg.}}{\subseteq} X$.

Aufgabe 7

(1) Wir haben die Axiome (Met 1, 2, 3) zu verifizieren.

Zu (Met 1). Für $y,\, y' \in Y$ ist $d|_{Y\times Y}(y,y') = d(y,y')$ in der Tat genau dann gleich 0, wenn $y = y'$, wie aus (Met 1) für X folgt.

Zu (Met 2). Für $y,\, y' \in Y$ ist $d|_{Y\times Y}(y,y') = d(y,y') = d(y',y) = d|_{Y\times Y}(y',y)$, wie aus (Met 2) für X folgt.

Zu (Met 3). Für $y,\, y',\, y'' \in Y$ ist

$$d|_{Y\times Y}(y,y') + d|_{Y\times Y}(y',y'') \;=\; d(y,y') + d(y',y'') \;\geqslant\; d(y,y'') \;=\; d|_{Y\times Y}(y,y'')\ ,$$

wie aus (Met 3) für X folgt.

Kurz, die in (Met 1, 2, 3) für $d|_{Y\times Y}(y,y')$ verlangten Eigenschaften vererben sich aus denjenigen für d.

(2) Beachte zunächst, daß für $y \in Y$ und $\varepsilon \in \mathbf{R}_{>0}$

$$\mathrm{B}_\varepsilon^{(Y,d|_{Y\times Y})}(y) \;=\; \{y' \in Y \;:\; d|_{Y\times Y}(y',y) < \varepsilon\} \;=\; \{y' \in Y \;:\; d(y',y) < \varepsilon\} \;=\; \mathrm{B}_\varepsilon^{(X,d)}(y) \cap Y\;.$$

Bezüglich $T^{(Y,\,d|_{Y\times Y})}$ ist eine Teilmenge $Z \subseteq Y$ also genau dann offen, wenn es für jedes $z \in Z$ ein $\varepsilon \in \mathbf{R}_{>0}$ gibt mit $\mathrm{B}_\varepsilon^{(X,d)}(z) \cap Y \subseteq Z$.

Bezüglich der Spurtopologie ist eine Teilmenge $Z \subseteq Y$ dagegen genau dann offen, wenn es ein $U \overset{\text{off.}}{\subseteq} X$ mit $Z = Y \cap U$ gibt.

Sei $Z \subseteq Y$ bezüglich der Spurtopologie offen. Gebe es also ein $U \overset{\text{off.}}{\subseteq} X$ mit $Z = Y \cap U$. Sei $z \in Z$. Sei $\varepsilon \in \mathbf{R}_{>0}$ so, daß $\mathrm{B}_\varepsilon^{(X,d)}(z) \subseteq U$. Dann ist

$$\mathrm{B}_\varepsilon^{(X,d)}(z) \cap Y \;\subseteq\; U \cap Y \;=\; Z\;.$$

Also ist $Z \subseteq Y$ bezüglich $T^{(Y,\,d|_{Y\times Y})}$ offen.

Sei $Z \subseteq Y$ bezüglich $T^{(Y,\,d|_{Y\times Y})}$ offen. Gebe es also für jedes $z \in Z$ ein $\varepsilon_z \in \mathbf{R}_{>0}$ mit $\mathrm{B}_{\varepsilon_z}^{(X,d)}(z) \cap Y \subseteq Z$. Sei

$$U \;:=\; \bigcup_{z\in Z} \mathrm{B}_{\varepsilon_z}^{(X,d)}(z)\;.$$

Mit dem Lemma aus §1.3.2 ist $\mathrm{B}_{\varepsilon_z}^{(X,d)}(z) \overset{\text{off.}}{\subseteq} X$. Dank (Top 3) ist also $U \overset{\text{off.}}{\subseteq} X$. Folglich genügt es zu zeigen, daß $Z \overset{!}{=} Y \cap U$.

Ist $z \in Z$, so ist $z \in Z \subseteq Y$ und $z \in \mathrm{B}_{\varepsilon_z}^{(X,d)}(z) \subseteq U$, also $z \in Y \cap U$. Somit ist $Z \subseteq Y \cap U$.

Andererseits ist

$$Y \cap U \;=\; Y \cap \bigcup_{z\in Z} \mathrm{B}_{\varepsilon_z}^{(X,d)}(z) \;=\; \bigcup_{z\in Z} (\mathrm{B}_{\varepsilon_z}^{(X,d)}(z) \cap Y) \;\subseteq\; Z$$

nach Wahl der ε_z.

Insgesamt ist also in der Tat $Z = Y \cap U$.

Aufgabe 8

Wir haben für $T^{(X,d)} = T_{X,\,\text{verklumpt}}$ zu zeigen, daß weder $\{1\}$ noch $\{2\}$ offene Teilmengen von X sind. Mit Ausnutzung von Symmetrie genügt es zu zeigen, daß $\{2\}$ keine offene Teilmenge von X ist.

Für $\varepsilon \in \mathbf{R}_{>0}$ ist $\mathrm{B}_\varepsilon(2) = \{1\}$, falls $\varepsilon \leqslant 1$, und $\mathrm{B}_\varepsilon(2) = \{1,2\}$, falls $\varepsilon > 1$. Für kein $\varepsilon \in \mathbf{R}_{>0}$ ist also $\mathrm{B}_\varepsilon(2) \subseteq \{2\}$. Somit ist $\{2\}$ keine offene Teilmenge von X.

Nun ist $\mathrm{B}_1(1) = \{2\}$. Wie schon festgestellt, ist dies keine offene Teilmenge von X.