M. Künzer

Topologie, SS 09

Lösung 12

Aufgabe 44

(1) Die Aussage ist falsch. Sei $X = \{1, 2\}$, ausgestattet mit der diskreten Topologie. Dann ist $\{1\} \overset{\text{off.}}{\subseteq} X$ und $\{1\} \overset{\text{abg.}}{\subseteq} X$, aber $\emptyset \subsetneq \{1\} \subsetneq X$.

(2) Die Aussage ist richtig. Sei $X = \bigcup_{i\in I} U_i$ eine offene Überdeckung, wobei I eine Indexmenge ist und $U_i \overset{\text{off.}}{\subseteq} X$ für $i \in I$.

Wir werden nun unter den in dieser offenen Überdeckung wiederholt auftretenden offenen Mengen je eine auswählen.

Sei

$$R \;:=\; \{U_i \;:\; i \in I\} \;\subseteq\; \mathrm{Pot}(X)\;.$$

Da X endlich ist, ist $\mathrm{Pot}(X)$ ebenfalls endlich, und somit auch R. Wähle für alle $U \in R$ ein $i_U \in I$ mit $U_{i_U} = U$. Sei $I_0 := \{i_U \;:\; U \in R\}$. Da R endlich ist, gilt das auch für I_0 . Ferner ist

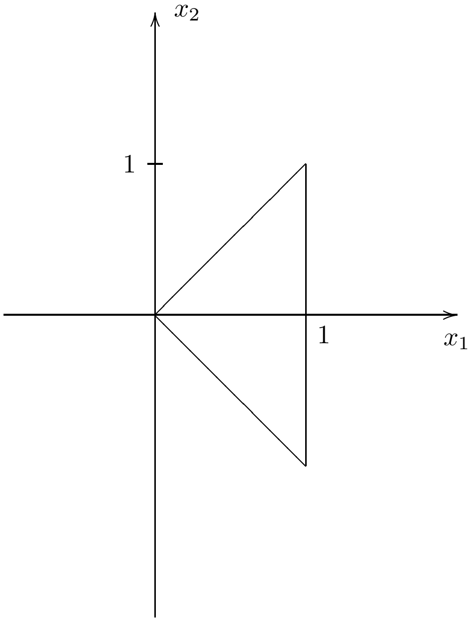
$$\{U_i \;:\; i \in I_0\} \;=\; \{U_{i_U} \;:\; U \in R\} \;=\; R \;=\; \{U_i \;:\; i \in I\}\;,$$

und also

$$\bigcup_{i\in I_0} U_i \;=\; \bigcup_{i\in I} U_i \;=\; X\;.$$

Aufgabe 45

(1) Es ist X das folgende Dreieck mit Rand und Innerem.



(2) Es genügt zu zeigen, daß X wegzusammenhängend ist; cf. erste Bemerkung in §4.3.3. Seien $\binom{x_1}{x_2}$, $\binom{x_1'}{x_2'} \in X$ gegeben, i.e. sei $0 \leqslant x_1 \leqslant 1$, $|x_2| \leqslant |x_1|$ und $0 \leqslant x_1' \leqslant 1$, $|x_2'| \leqslant |x_1'|$.

Es genügt zu zeigen, daß die Abbildung

$$\begin{array}{rcl} [0,1] & \xrightarrow{\gamma} & \mathbf{R}^2 \\ t & \longmapsto & (1-t)\binom{x_1}{x_2} + t\binom{x_1'}{x_2'} \end{array}$$

mit $\gamma(0) = \binom{x_1}{x_2}$ und $\gamma(1) = \binom{x_1'}{x_2'}$ stetig ist und im Bildbereich nach X einschränkt.

Zur Stetigkeit. Es genügt zu zeigen, daß die Abbildungen $\mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$, $t \longrightarrow (1-t)x_1 + tx_1'$ und $\mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$, $t \longrightarrow (1-t)x_2 + tx_2'$ stetig sind; cf. Aufgabe 33, Bemerkung aus §3.4 und zweite Bemerkung aus §2.1.1. Beide sind aber als (lineare) Polynome in der Tat stetig; cf. Aufgabe 21.(4).

Zur Möglichkeit der Einschränkung von γ nach X. Es ist zu zeigen, daß für alle $t \in [0,1]$ gilt, daß $(1-t)\binom{x_1}{x_2} + t\binom{x_1'}{x_2'} \in X$, i.e. daß $0 \leqslant (1-t)x_1 + tx_1' \overset{!}{\leqslant} 1$ und $|(1-t)x_2 + tx_2'| \overset{!}{\leqslant} (1-t)x_1 + tx_1'$.

Zu ersterem. Es wird

$$(1-t)x_1 + tx_1' \;\leqslant\; (1-t)\cdot 1 + t\cdot 1 \;=\; 1$$

und

$$(1-t)x_1 + tx_1' \;\geqslant\; (1-t)\cdot 0 + t\cdot 0 \;=\; 0\,.$$

Zu zweiterem. Es wird

$$(1-t)x_2 + tx_2' \;\leqslant\; (1-t)x_1 + tx_1'$$

und

$$(1-t)x_2 + tx_2' \;\geqslant\; (1-t)(-x_1) + t(-x_1') \;=\; -\big((1-t)x_1 + tx_1'\big)\,,$$

zusammen also

$$|(1-t)x_2 + tx_2'| \;\leqslant\; (1-t)x_1 + tx_1'\,.$$

(3) Nach Satz 5 aus §4.2.6 ist zu zeigen, daß X eine abgeschlossene und beschränkte Teilmenge von $\mathbf{R}^2$ ist.

Nun ist $X \subseteq \bar{\mathrm{B}}_1(0) = \{\binom{x_1}{x_2} \;:\; |x_1| \leqslant 1 \text{ und } |x_2| \leqslant 1\}$, da aus $0 \leqslant x_1 \leqslant 1$ insbesondere $|x_1| \leqslant 1$ und aus $|x_2| \leqslant |x_1|$ dann auch $|x_2| \leqslant 1$ folgt. Also ist X beschränkt.

Ferner sind die Abbildungen $\mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$, $\binom{x_1}{x_2} \xmapsto{f_1} x_1$, $\binom{x_1}{x_2} \xmapsto{f_2} x_1 + x_2$ und $\binom{x_1}{x_2} \xmapsto{f_3} x_1 - x_2$ als lineare Abbildungen stetig; cf. Aufgabe 21.(5).

Da $|x_2| \leqslant x_1$ für $x_1 \geqslant 0$ gerade bedeutet, daß $-x_1 \leqslant x_2 \leqslant x_1$, i.e. daß $x_1 + x_2 \geqslant 0$ und $x_1 - x_2 \geqslant 0$, wird

$$X \;=\; f_1^{-1}([0,1]) \cap f_2^{-1}(\mathbf{R}_{\geqslant 0}) \cap f_3^{-1}(\mathbf{R}_{\geqslant 0})\,.$$

Jeder Teilnehmer dieses Schnitts ist abgeschlossen in $\mathbf{R}^2$ als Urbild einer abgeschlossenen Teilmenge unter einer stetigen Abbildung. Also ist auch die Schnittmenge X eine abgeschlossene Teilmenge von $\mathbf{R}^2$; cf. Aufgabe 5.(1).

Aufgabe 46

(1) Es wird, ähnlich wie im Beweis zu (Nor 3) in §5.2,

$$\|f\cdot g\| \;=\; \max_{x\in X}|f(x)\cdot g(x)| \;=\; \max_{x\in X}(|f(x)|\cdot|g(x)|) \;=\; |f(x_0)|\cdot|g(x_0)|$$

für ein gewisses $x_0 \in X$. Wir setzen fort mit

$$|f(x_0)|\cdot|g(x_0)| \;\leqslant\; (\max_{x\in X}|f(x)|)\cdot(\max_{x\in X}|g(x)|) \;=\; \|f\|\cdot\|g\|\,.$$

(2) Zunächst bemerken wir, daß aus der Aussage für einen allgemeinen normierten Raum V die entsprechende Aussage im Spezialfall $V = \mathrm{C}(X)$ natürlich folgt; cf. Bemerkung in §5.2, welche u.a. auf Aufgabe 20.(1) basiert.

Sei $U \overset{\text{off.}}{\subseteq} V$. Wir haben zu zeigen, daß $(+)^{-1}(U)$ offen ist. Dazu genügt es, ein $\delta \in \mathbf{R}_{>0}$ so zu finden, daß für $(x, y) \in V \times V$ mit $x + y \in U$

$$(x, y) \;\in\; \mathrm{B}_\delta(x) \times \mathrm{B}_\delta(y) \;\overset{!}{\subseteq}\; (+)^{-1}(U)$$

ist; cf. Bemerkung in §1.1.3 und erstes Beispiel in §3.4.

Da $x + y \in U \overset{\text{off.}}{\subseteq} V$, gibt es ein $\varepsilon \in \mathbf{R}_{>0}$ mit $\mathrm{B}_\varepsilon(x + y) \subseteq U$. Es genügt also, $\delta \in \mathbf{R}_{>0}$ so zu finden, daß

$$\mathrm{B}_\delta(x) \times \mathrm{B}_\delta(y) \;\overset{!}{\subseteq}\; (+)^{-1}(\mathrm{B}_\varepsilon(x + y)) \;,$$

i.e. daß für $\tilde{x},\, \tilde{y} \in V$ mit $\|\tilde{x} - x\| < \delta$ und $\|\tilde{y} - y\| < \delta$ auch $\|(\tilde{x} + \tilde{y}) - (x + y)\| < \varepsilon$.

Wähle $\delta := \varepsilon/2$. Dann wird

$$\|(\tilde{x} + \tilde{y}) - (x + y)\| \;\leqslant\; \|\tilde{x} - x\| + \|\tilde{y} - y\| \;<\; \varepsilon/2 + \varepsilon/2 \;=\; \varepsilon \;.$$

(3) Nach Aufgabe 20.(2) ist diese Abbildung $(\cdot)$ wohldefiniert.

Sei $U \overset{\text{off.}}{\subseteq} \mathrm{C}(X)$. Wir haben zu zeigen, daß $(\cdot)^{-1}(U)$ offen ist. Dazu genügt es, ein $\delta \in \mathbf{R}_{>0}$ so zu finden, daß für $(f, g) \in \mathrm{C}(X) \times \mathrm{C}(X)$ mit $f \cdot g \in U$

$$(f, g) \;\in\; \mathrm{B}_\delta(f) \times \mathrm{B}_\delta(g) \;\overset{!}{\subseteq}\; (\cdot)^{-1}(U)$$

ist; cf. Bemerkung in §1.1.3 und erstes Beispiel in §3.4.

Da $f \cdot g \in U \overset{\text{off.}}{\subseteq} \mathrm{C}(X)$, gibt es ein $\varepsilon \in \mathbf{R}_{>0}$ mit $\mathrm{B}_\varepsilon(f \cdot g) \subseteq U$. Es genügt also, $\delta \in \mathbf{R}_{>0}$ so zu finden, daß

$$\mathrm{B}_\delta(f) \times \mathrm{B}_\delta(g) \;\overset{!}{\subseteq}\; (\cdot)^{-1}(\mathrm{B}_\varepsilon(f \cdot g)) \;,$$

i.e. daß für $\tilde{f},\, \tilde{g} \in \mathrm{C}(X)$ mit $\|\tilde{f} - f\| < \delta$ und $\|\tilde{g} - g\| < \delta$ auch $\|\tilde{f} \cdot \tilde{g} - f \cdot g\| < \varepsilon$.

Zunächst einmal halten wir fest, daß

$$\begin{array}{rcl}
\|\tilde{f} \cdot \tilde{g} - f \cdot g\| & = & \|\tilde{f} \cdot \tilde{g} - f \cdot \tilde{g} + f \cdot \tilde{g} - f \cdot g\| \\
& \leqslant & \|(\tilde{f} - f)\tilde{g}\| + \|f(\tilde{g} - g)\| \\
& \overset{(1)}{\leqslant} & \|\tilde{f} - f\|\|\tilde{g}\| + \|f\|\|\tilde{g} - g\| \\
& \leqslant & \delta\|\tilde{g}\| + \|f\|\delta \\
& = & \delta(\|g + \tilde{g} - g\| + \|f\|) \\
& \leqslant & \delta(\|g\| + \|\tilde{g} - g\| + \|f\|) \\
& < & \delta(\|g\| + \delta + \|f\|) \;.
\end{array}$$

Wähle $\delta \in \mathbf{R}_{>0}$ nun so, daß $\delta(\|g\| + \delta + \|f\|) \leqslant \varepsilon$. Hierzu kann man z.B.

$$\delta \;:=\; \varepsilon / \max\{1,\, \varepsilon + \|f\| + \|g\|\}$$

setzen, denn dann ist

$$\delta(\|g\| + \delta + \|f\|) \;=\; \frac{\varepsilon}{\max\{1,\, \varepsilon + \|f\| + \|g\|\}} \cdot (\|g\| + \delta + \|f\|) \;\leqslant\; \frac{\varepsilon(\|g\| + \varepsilon + \|f\|)}{\max\{1,\, \varepsilon + \|f\| + \|g\|\}} \;\leqslant\; \varepsilon \;.$$

Mit dieser Wahl von δ wird insgesamt also $\|\tilde{f} \cdot \tilde{g} - f \cdot g\| < \varepsilon$.

(4) Zunächst bemerken wir, daß aus der Aussage für einen allgemeinen normierten Raum V die entsprechende Aussage im Spezialfall $V = \mathrm{C}(X)$ natürlich folgt.

O.E. ist $\lambda \neq 0$, da wir für $\lambda = 0$ eine konstante und also stetige Abbildung erhalten; cf. Beispiel (2) aus §2.1.1.

Da Urbild- und Bildbereich metrische Räume sind, können wir die ε-δ-Charakterisierung der Stetigkeit verwenden; cf. Lemma aus §2.2.

Seien $\varepsilon \in \mathbf{R}_{>0}$ und $x \in V$ gegeben. Setze $\delta := \varepsilon/|\lambda|$. Ist $\tilde{x} \in V$ mit $\|\tilde{x} - x\| < \delta$, dann ist wegen $\lambda \neq 0$

$$\|\lambda\tilde{x} - \lambda x\| \;=\; |\lambda|\|\tilde{x} - x\| \;<\; |\lambda|\delta \;=\; \varepsilon \;.$$

(5) Wir wollen nun verwenden, daß das Bild eines Konvergenzpunktes einer Folge unter einer stetigen Abbildung zugleich ein Konvergenzpunkt der Bildfolge ist; cf. Bemerkung aus §4.2.7.

Nach Aufgabe 43.(1) konvergiert $\big((f_n\,,\,g_n)\big)_n$ gegen (f,g).

Darauf die stetige Abbildung $\mathrm{C}(X)\times\mathrm{C}(X)\longrightarrow\mathrm{C}(X)$, $(f,g)\longmapsto f+g$ aus (2) angewandt, liefert die Konvergenz von $(f_n+g_n)_n$ gegen $f+g$.

Darauf die stetige Abbildung $\mathrm{C}(X)\times\mathrm{C}(X)\longrightarrow\mathrm{C}(X)$, $(f,g)\longmapsto f\cdot g$ aus (3) angewandt, liefert die Konvergenz von $(f_n\cdot g_n)_n$ gegen $f\cdot g$.

Auf die gegen f konvergierende Folge $(f_n)_n$ die stetige Abbildung $\mathrm{C}(X)\longrightarrow\mathrm{C}(X)$, $f\longmapsto\lambda f$ angewandt, liefert die Konvergenz von $(\lambda f_n)_n$ gegen λf.

Aufgabe 47

(1) Sei $W\subseteq X\times Y$ eine offene und abgeschlossene Teilmenge. Sei $W\neq\emptyset$. Wir haben zu zeigen, daß $W\overset{!}{=}X\times Y$.

Wir verwenden die stetigen Abbildungen $i_y : X\longrightarrow X\times Y$, $\xi\longmapsto(\xi,y)$ und $j_x : Y\longrightarrow X\times Y$, $\eta\longmapsto(x,\eta)$ aus dem ersten Beispiel in §3.4, wobei $x\in X$ und $y\in Y$.

Sei $(x,y)\in W$.

Es ist $x\in i_y^{-1}(W)$, also $i_y^{-1}(W)\neq\emptyset$. Es ist $i_y^{-1}(W)$ eine offene und abgeschlossene Teilmenge von X; vgl. Aufgabe 18.(1). Da X zusammenhängend ist, folgt $i_y^{-1}(W)=X$. In anderen Worten, es ist $(x',y)\in W$ für alle $x'\in X$.

Sei $x'\in X$ vorgegeben. Es ist $y\in j_{x'}^{-1}(W)$, also $j_{x'}^{-1}(W)\neq\emptyset$. Es ist $j_{x'}^{-1}(W)$ eine offene und abgeschlossene Teilmenge von Y; vgl. Aufgabe 18.(1). Da Y zusammenhängend ist, folgt $j_{x'}^{-1}(W)=Y$. In anderen Worten, es ist $(x',y')\in W$ für alle $y'\in Y$.

Insgesamt folgt also $(x',y')\in W$ für alle $x'\in X$ und alle $y'\in Y$, i.e. $X\times Y=W$.

(2) Seien (x',y'), $(x'',y'')\in X\times Y$.

Da X wegzusammenhängend ist, gibt es ein stetiges $\gamma : [0,1]\longrightarrow X$ mit $\gamma(0)=x'$ und $\gamma(1)=x''$.

Da Y wegzusammenhängend ist, gibt es ein stetiges $\vartheta : [0,1]\longrightarrow Y$ mit $\vartheta(0)=y'$ und $\vartheta(1)=y''$.

Sei

$$\begin{array}{ccccc}[0,1/2] & \xrightarrow{\chi_1} & X & \times & Y\\ t & \longmapsto & (\gamma(2t) & , & y')\end{array}$$

Es ist χ_1 stetig, da sowohl $t\longmapsto\gamma(2t)$ als Kompositum stetiger Abbildungen stetig ist, als auch die konstante Abbildung $t\longmapsto y'$ stetig ist; cf. Bemerkung aus §3.4.

Sei

$$\begin{array}{ccccc}[1/2,1] & \xrightarrow{\chi_2} & X & \times & Y\\ t & \longmapsto & (x'' & , & \vartheta(2t-1))\end{array}$$

Es ist χ_1 stetig, da sowohl die konstante Abbildung $t\longmapsto x''$ stetig ist, als auch $t\longmapsto\vartheta(2t-1)$ als Kompositum stetiger Abbildungen stetig ist; cf. Bemerkung aus §3.4.

Beachte, daß $[0,1]=[0,1/2]\cup[1/2,1]$ eine lokalendliche (da endliche) abgeschlossene Überdeckung ist. Beachte, daß $\chi_1(1/2)=\chi_2(1/2)=(x'',y')$, und also $\chi_1|_{[0,1/2]\cap[1/2,1]}=\chi_2|_{[0,1/2]\cap[1/2,1]}$ ist.

Die Abbildung

$$\begin{array}{ccl}[0,1] & \xrightarrow{\chi} & X\times Y\\ t & \longmapsto & \begin{cases}(\gamma(2t),y') & \text{für } t\in[0,1/2]\\ (x'',\vartheta(2t-1)) & \text{für } t\in[1/2,1]\end{cases}\end{array}$$

erfüllt $\chi|_{[0,1/2]}=\chi_1$ und $\chi|_{[1/2,1]}=\chi_2$. Nach Satz 1b aus §2.3.3 ist χ also stetig.

Damit ist eine stetige Abbildung χ von $[0,1]$ nach $X\times Y$ mit dem vorgegebenen Anfangspunkt $\chi(0)=(\gamma(0),y')=(x',y')$ und dem vorgegebenen Endpunkt $\chi(1)=(x'',\vartheta(1))=(x'',y'')$. Somit ist $X\times Y$ als wegzusammenhängend nachgewiesen.