M. Künzer

Topologie, SS 09

Lösung 11

Aufgabe 41

(1) *Annahme,* nicht. Sei also $x \in X \smallsetminus Y$. Es ist $X \smallsetminus Y \overset{\text{off.}}{\subseteq} X$. Da x ein Häufungspunkt von (y_n) ist, ist

$$\{n \in \mathbf{Z}_{\geqslant 1} \ : \ y_n \in X \smallsetminus Y\}$$

unendlich. Da aber $y_n \in Y$ für alle $n \in \mathbf{Z}_{\geqslant 1}$, ist diese Menge leer, und wir haben einen *Widerspruch.*

(2) Gibt es zum einen eine Folge $(y_n)_n$ in Y, die gegen x konvergiert, dann ist dies auch eine Folge in $\bar{Y} \overset{\text{abg.}}{\subseteq} X$, und nach (1) können wir $x \in \bar{Y}$ folgern.

Sei umgekehrt $x \in \bar{Y}$. Nach Lemma (2) in §1.4 ist $\mathrm{B}_{1/n}(x) \cap Y \neq \emptyset$ für $n \in \mathbf{Z}_{\geqslant 1}$, so daß wir darin ein y_n wählen können. Bleibt zu zeigen, daß die so entstandene Folge $(y_n)_n$ gegen x konvergiert. Sei $\varepsilon \in \mathbf{R}_{>0}$. Dann ist $d(y_n, x) < 1/n \leqslant \varepsilon$ für alle $n \in \mathbf{Z}_{\geqslant 1}$ mit $n \geqslant 1/\varepsilon$.

(3) Zeigen wir zunächst, daß es ein $C \in \mathbf{R}$ so gibt, daß $f(x) \leqslant C$ für alle $x \in X$.

Annahme, nicht. Dann gibt es für alle $n \in \mathbf{Z}_{\geqslant 1}$ ein $x_n \in X$ mit $f(x_n) \geqslant n$. Sei $(y_n)_n$ eine konvergente Teilfolge von $(x_n)_n$, existent, da X als folgenkompakt vorausgesetzt ist. Dann ist immer noch $f(y_n) \geqslant n$ für $n \in \mathbf{Z}_{\geqslant 1}$. Sei y ein Konvergenzpunkt von $(y_n)_n$. Dann ist $f(y)$ ein Konvergenzpunkt von $\big(f(y_n)\big)_n$; cf. Bemerkung in §4.2.7. Also gibt es ein $m \in \mathbf{Z}_{\geqslant 1}$ mit $|f(y_n) - f(y)| < 1$ für alle $n \in \mathbf{Z}_{\geqslant m}$. Insbesondere ist $n \leqslant f(y_n) \leqslant f(y) + 1$ für alle $n \in \mathbf{Z}_{\geqslant m}$, und wir haben einen *Widerspruch.*

Insbesondere können wir $s := \sup_{x \in X} f(x)$ bilden.

Zeigen wir nun, daß es ein $\hat{x} \in X$ gibt mit $f(x) \leqslant f(\hat{x})$ für alle $x \in X$.

Wir finden für alle $n \in \mathbf{Z}_{\geqslant 1}$ ein $x_n \in X$ mit $f(x_n) \in (s - 1/n, s]$. Sei $(y_n)_n$ eine konvergente Teilfolge von $(x_n)_n$, existent, da X als folgenkompakt vorausgesetzt ist. Dann ist immer noch $f(y_n) \in (s - 1/n, s]$ für $n \in \mathbf{Z}_{\geqslant 1}$. Sei $\hat{x}$ ein Konvergenzpunkt von $(y_n)_n$. Dann ist $f(\hat{x})$ ein Konvergenzpunkt von $\big(f(y_n)\big)_n$; cf. Bemerkung in §4.2.7.

Nun ist aber auch s ein Konvergenzpunkt von $\big(f(y_n)\big)_n$. Denn sei $\varepsilon \in \mathbf{R}_{>0}$ vorgegeben. Dann ist $f(x_n) \in (s - 1/n, s] \subseteq (s - \varepsilon, s + \varepsilon)$ für alle $n \geqslant 1/\varepsilon$.

Da $\mathbf{R}$ hausdorffsch ist, folgt $s = \lim_n f(x_n) = f(\hat{x})$; cf. erste Bemerkung in §4.2.4. Insbesondere ist $f(\hat{x}) = s = \sup_{x \in X} f(x)$ eine obere Schranke für $f(x)$ mit $x \in X$, wie in der Aufgabenstellung verlangt.

Cf. §4.2.3 für die analoge Aussage über kompakte Räume.

(4) *Annahme,* nicht. Dann gibt es für alle $n \in \mathbf{Z}_{\geqslant 1}$ ein $k_n \in K$ und ein $x_n \in X$ mit $d(k_n, x_n) < 1/n$. Sei $(k_{\varphi(m)})_m$ eine konvergente Teilfolge von $(k_n)_n$, existent, da K als folgenkompakt vorausgesetzt war. Sei $k := \lim_m k_{\varphi(m)}$. Dann ist $d(k_{\varphi(m)}, x_{\varphi(m)}) < 1/\varphi(m) \leqslant 1/m$ für $m \in \mathbf{Z}_{\geqslant 1}$.

Wir *behaupten,* daß $(x_{\varphi(m)})_m$ gegen k konvergiert. Sei $\eta \in \mathbf{R}_{>0}$ vorgegeben. Sei $\ell \in \mathbf{Z}_{\geqslant 1}$ so, daß zum einen $d(k_{\varphi(m)}, x_{\varphi(m)}) < \eta/2$ und zum anderen $d(k_{\varphi(m)}, k) < \eta/2$ für $m \in \mathbf{Z}_{\geqslant \ell}$ ist. Für ersteres reicht es, $\ell \geqslant 2/\eta$ zu wählen. Zweiteres entstammt der Konvergenz von $(k_{\varphi(m)})_m$ gegen k. Dann wird

$$d(x_{\varphi(m)}, k) \ \leqslant \ d(x_{\varphi(m)}, k_{\varphi(m)}) + d(k_{\varphi(m)}, k) \ < \ \eta/2 + \eta/2 \ = \ \eta$$

für $m \in \mathbf{Z}_{\geqslant \ell}$. Dies zeigt die *Behauptung.*

Da aber $X \smallsetminus U \overset{\text{abg.}}{\subseteq} X$ und $x_{\varphi(m)} \in X \smallsetminus U$ für $m \in \mathbf{Z}_{\geqslant 1}$, ist auch $k = \lim_m x_{\varphi(m)} \in X \smallsetminus U$; cf. (1). Dies steht aber im *Widerspruch* zu $k \in K \subseteq U$.

Aufgabe 42

(1) Die Aussage ist richtig. Denn sei $x \in U \overset{\text{off.}}{\subseteq} X$ gegeben. Dann ist $\{n \in \mathbf{Z}_{\geqslant 1} \; : \; x_n \notin U\}$ leer, da $x_n = x \in U$ für alle $n \in \mathbf{Z}_{\geqslant 1}$. Insbesondere ist diese Menge endlich.

(2) Die Aussage ist falsch. Sei $X = \{1, 2\}$, ausgestattet mit der verklumpten Topologie $\big\{\emptyset, \{1, 2\}\big\}$; vgl. §1.2.3.1. Sei

$$(x_n)_n \; := \; (1, 2, 1, 2, \ldots)$$

Es ist 1 ein Konvergenzpunkt dieser Folge, da die einzige $\{1\}$ umfassende offene Teilmenge von X gleich der vollen Teilmenge X ist. Und für diese ist $\{n \in \mathbf{Z}_{\geqslant 1} \; : \; x_n \notin X\}$ leer, und damit endlich.

Genauso ist 2 ein Konvergenzpunkt dieser Folge.

Aber $1 \neq 2$.

(3) Die Aussage ist falsch. Sei $X = \mathbf{Q}$, sei $d(x, y) := |x - y|$ für $x,\, y \, \in \, \mathbf{Q}$. Es ist X also ein metrischer Teilraum von $\mathbf{R}$; vgl. Aufgabe 7.(1).

Sei $\xi \in \mathbf{R} \smallsetminus \mathbf{Q}$. So z.B. können wir $\xi = \sqrt{2}$ nehmen. Sei $x_n := 10^{-n} \lfloor 10^n \xi \rfloor \in \mathbf{Q}$ für $n \in \mathbf{Z}_{\geqslant 1}$. Dann ist $\xi - x_n \in [0, 10^{-n})$; cf. Beispiel (4) aus §3.2.

Es ist $(x_n)_n$, betrachtet als Folge in $\mathbf{R}$, eine gegen ξ konvergierende Folge, da für $\varepsilon \in \mathbf{R}_{>0}$ bereits $d(x_n, \xi) < 10^{-n} \leqslant \varepsilon$ gilt, sobald $n \geqslant -\log_{10} \varepsilon$.

Würde nun $(x_n)_n$ in $\mathbf{Q}$ gegen $\xi' \in \mathbf{Q}$ konvergieren, so hätte man diesen Konvergenzpunkt auch, wenn man $(x_n)_n$ als Folge in $\mathbf{R}$ betrachtet. Da aber $\mathbf{R}$ hausdorffsch ist, folgte $\xi = \xi'$, was wegen $\xi \in \mathbf{R} \smallsetminus \mathbf{Q}$ und $\xi' \in \mathbf{Q}$ nicht geht; cf. erste Bemerkung in §4.2.4. Also ist $(x_n)_n$ keine konvergente Folge in $\mathbf{Q}$.

Zeigen wir, daß die Folge $(x_n)_n$ die in der Aufgabenstellung beschriebene Eigenschaft hat. Sei $\varepsilon \in \mathbf{R}_{>0}$ vorgegeben. Da $(x_n)_n$, gesehen als Folge in $\mathbf{R}$, gegen ξ konvergiert, gibt es ein $m \in \mathbf{Z}_{\geqslant 1}$ mit $|x_n - \xi| < \varepsilon/2$ für $n \in \mathbf{Z}_{\geqslant m}$. Dann wird in der Tat

$$d(x_n, x_{n'}) \; = \; |x_n - x_{n'}| \; = \; |x_n - \xi + \xi - x_{n'}| \; \leqslant \; |x_n - \xi| + |\xi - x_{n'}| \; < \; \varepsilon/2 + \varepsilon/2 \; = \; \varepsilon$$

für $n,\, n' \, \in \, \mathbf{Z}_{\geqslant m}$.

Eine Folge wie in der Aufgabenstellung beschrieben heißt auch *Cauchyfolge.* Ein metrischer Raum, in welchem jede Cauchyfolge konvergiert, heißt *vollständig.* Wir haben also in (3) gesehen, daß $\mathbf{Q}$ nicht vollständig ist.

Aufgabe 43

(1) Sei $(x, y) \subseteq W \overset{\text{off.}}{\subseteq} X \times Y$. Wir haben zu zeigen, daß $\{n \in \mathbf{Z}_{\geqslant 1} \; : \; (x_n, y_n) \notin W\}$ endlich ist. Unter Verwendung der Basis von $X \times Y$ aus dem ersten Beispiel aus §3.4 gibt es ein $x \in U \overset{\text{off.}}{\subseteq} X$ und ein $y \in V \overset{\text{off.}}{\subseteq} X$ mit $(x, y) \in U \times V \subseteq W \overset{\text{off.}}{\subseteq} X \times Y$. Es wird

$$\begin{array}{rl} & \{n \in \mathbf{Z}_{\geqslant 1} \; : \; (x_n, y_n) \notin W\} \\ \subseteq & \{n \in \mathbf{Z}_{\geqslant 1} \; : \; (x_n, y_n) \notin U \times V\} \\ = & \{n \in \mathbf{Z}_{\geqslant 1} \; : \; x_n \notin U\} \cup \{n \in \mathbf{Z}_{\geqslant 1} \; : \; y_n \notin V\} \; , \end{array}$$

und die Teilnehmer letzterer Vereinigung sind beides endliche Mengen, da x ein Konvergenzpunkt für $(x_n)_n$ und y ein Konvergenzpunkt für $(y_n)_n$ ist.

(2) *Annahme,* nicht. Dann gibt es ein $\varepsilon \in \mathbf{R}_{>0}$ so, daß unter anderem für alle $n \in \mathbf{Z}_{\geqslant 1}$ es ein $y_n \in \mathrm{B}_{1/n}(y_0)$ und ein $x_n \in X$ gibt mit

$$d\big(f(x_n, y_n),\, f(x_n, y_0)\big) \; \geqslant \; \varepsilon \; .$$

Dann ist y_0 der Konvergenzpunkt der Folge $(y_n)_n$. Ferner können wir nach Übergang zu Teilfolgen annehmen, daß $(x_n)_n$ einen Konvergenzpunkt x_0 hat. Also ist (x_0, y_0) ein Konvergenzpunkt der Folge $\big((x_n, y_n)\big)_n$; cf. (1). Da f stetig ist, ist also $f(x_0, y_0)$ ein Konvergenzpunkt der Folge $\big(f(x_n, y_n)\big)_n$; cf. Bemerkung in §4.2.7. Also gibt es ein $m' \in \mathbf{Z}_{\geqslant 1}$ mit

$$d\big(f(x_0, y_0),\ f(x_n, y_n)\big) \ < \ \varepsilon/2$$

für $n \in \mathbf{Z}_{\geqslant m'}$.

Ferner ist (x_0, y_0) ein Konvergenzpunkt der Folge $\big((x_n, y_0)\big)_n$, wie ebenfalls aus (1) folgt, da x_0 Konvergenzpunkt von $(x_n)_n$ und y_0 Konvergenzpunkt der konstanten Folge $(y_0)_n$ ist. Also gibt es ein $m'' \in \mathbf{Z}_{\geqslant 1}$ mit

$$d\big(f(x_0, y_0),\ f(x_n, y_0)\big) \ < \ \varepsilon/2$$

für $n \in \mathbf{Z}_{\geqslant m''}$.

Es folgt

$$\varepsilon \ \leqslant \ d\big(f(x_n, y_n),\ f(x_n, y_0)\big) \ \leqslant \ d\big(f(x_n, y_n),\ f(x_0, y_0)\big) + d\big(f(x_0, y_0),\ f(x_n, y_0)\big) \ < \ \varepsilon/2 + \varepsilon/2 \ = \ \varepsilon$$

für $n \in \mathbf{Z}_{\geqslant \max\{m', m''\}}$, und wir haben einen *Widerspruch.*