M. Künzer

Topologie, SS 09

Lösung 10

Aufgabe 36

(1) Wir haben zu zeigen, daß $X \smallsetminus \{x\} \overset{\text{off.}}{\subseteq} X$. Es genügt, für $x' \in X \smallsetminus \{x\}$ ein $x' \in U' \subseteq X \smallsetminus \{x'\}$ mit $U' \overset{\text{off.}}{\subseteq} X$ zu finden; vgl. Bemerkung aus §1.1.3.

Sei $x' \in X \smallsetminus \{x\}$. Da X hausdorffsch ist, gibt es $x \in U \overset{\text{off.}}{\subseteq} X$ und $x' \in U' \overset{\text{off.}}{\subseteq} X$ mit $U \cap U' = \emptyset$. Insbesondere ist $x \notin U'$, und somit $U' \subseteq X \smallsetminus \{x\}$.

(2) Seien (x, y), $(x', y') \in X \times Y$ mit $(x, y) \neq (x', y')$. Dann ist $x \neq x'$ oder $y \neq y'$.

O.E. sei $x \neq x'$. Da X hausdorffsch ist, gibt es $x \in U \overset{\text{off.}}{\subseteq} X$ und $x' \in U' \overset{\text{off.}}{\subseteq} X$ mit $U \cap U' = \emptyset$. Dann ist $(x, y) \in U \times Y \overset{\text{off.}}{\subseteq} X \times Y$ und $(x', y) \in U' \times Y \overset{\text{off.}}{\subseteq} X \times Y$; cf. erstes Beispiel in §3.4. Es folgt $(U \times Y) \cap (U' \times Y) = (U \cap U') \times Y = \emptyset \times Y = \emptyset$.

Dies zeigt, daß $X \times Y$ hausdorffsch ist.

(3) Sei $x \in X$. Wir wollen zeigen, daß $\{x\} \overset{\text{off.}}{\subseteq} X$. Denn dann folgt mit (Top 2), daß jede Teilmenge von X offen ist, da ich sie schreiben kann als Vereinigung von einelementigen und also offenen Teilmengen.

Sei $V \subseteq X$ eine (bzgl. Teilmengenrelation) minimale x enthaltende offene Teilmenge von X. In anderen Worten, es ist $x \in V \overset{\text{off.}}{\subseteq} X$, und es gibt kein $\tilde{V} \overset{\text{off.}}{\subseteq} X$ mit $x \in \tilde{V} \subsetneq V$. Ein solches V existiert, da wegen der Endlichkeit von X jede nichtleere Teilmenge in $\mathrm{Pot}(X)$ wenigstens ein minimales Element enthält, und da wegen $x \in X \overset{\text{off.}}{\subseteq} X$ die fragliche Teilmenge $\{V \subseteq X \ : \ x \in V \overset{\text{off.}}{\subseteq} X\}$ auch nichtleer ist.

Es genügt zu zeigen, daß $\{x\} = V$. *Annahme,* nicht. Dann ist $\{x\} \subsetneq V \overset{\text{off.}}{\subseteq} X$. Sei $x' \in V \smallsetminus \{x\}$. Da X hausdorffsch ist, gibt es ein $x \in U \overset{\text{off.}}{\subseteq} X$ und ein $x' \in U' \overset{\text{off.}}{\subseteq} X$ mit $U \cap U' = \emptyset$. Dann aber ist $x \in U \cap V \overset{\text{off.}}{\subseteq} X$. Ferner ist $U \cap V \subsetneq V$, da $x' \in V$, aber $x' \notin U$. Somit gibt $U \cap V$ einen *Widerspruch* zur Minimalität von V.

Aufgabe 37

Beachte zunächst, daß auch $Y \xrightarrow{f^{-1}} X$ ein Homöomorphismus ist; cf. zweite Bemerkung aus §2.1.3. Vgl. auch Aufgabe 19. Die Situation ist also symmetrisch in X und Y.

(1) Wegen der Symmetrie der Situation genügt es, aus X hausdorffsch zu folgern, daß Y hausdorffsch ist.

Seien y, $y' \in Y$ mit $y \neq y'$ gegeben. Dann ist wegen f^{-1} injektiv auch $f^{-1}(y) \neq f^{-1}(y')$ in X. Da X hausdorffsch ist, gibt es $f^{-1}(y) \in U \overset{\text{off.}}{\subseteq} X$ und $f^{-1}(y') \in U' \overset{\text{off.}}{\subseteq} X$ mit $U \cap U' = \emptyset$. Wegen f injektiv und offen folgt $y \in f(U) \overset{\text{off.}}{\subseteq} X$ und $y' \in f(U') \overset{\text{off.}}{\subseteq} X$ und $f(U) \cap f(U') = f(U \cap U') = f(\emptyset) = \emptyset$. Somit ist Y als hausdorffsch nachgewiesen.

(2) Wegen der Symmetrie der Situation genügt es, aus X kompakt zu folgern, daß Y kompakt ist.

Wegen f surjektiv ist aber $f(X) = Y$, und $f(X)$ ist als Bild eines kompakten topologischen Raumes unter einer stetigen Abbildung wieder kompakt; vgl. Lemma (3) aus §4.2.1.

Aufgabe 38

Sei $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ eine offene Überdeckung, wobei I eine Indexmenge ist und $U_i \overset{\text{off.}}{\subseteq} X$ für $i \in I$.

Sei $1 \leqslant j \leqslant k$. Dann ist $Y_j = \bigcup_{i \in I} U_i \cap Y_j$ eine offene Überdeckung von Y_j. Da Y_j als kompakt vorausgesetzt wurde, gibt es eine endliche Teilmenge $I_j \subseteq I$ mit

$$Y_j \;=\; \bigcup_{i \in I_j} U_i \cap Y_j \;,$$

also mit $Y_j \subseteq \bigcup_{i \in I_j} U_i$.

Sei $I' := \bigcup_{j=1}^{k} I_j$. Es ist I' eine endliche Teilmenge von I. Somit genügt es zu zeigen, daß $\bigcup_{i \in I'} U_i \overset{!}{=} X$.

Sei $x \in X$. Dann gibt es ein $1 \leqslant j \leqslant k$ mit $x \in Y_j$. Also ist

$$x \;\in\; Y_j \;\subseteq\; \bigcup_{i \in I_j} U_i \;\subseteq\; \bigcup_{i \in I'} U_i \;.$$

Aufgabe 39

Wir *behaupten,* daß

$$B \;:=\; \{\mathrm{B}_\varepsilon(x) \;:\; x \in D,\; \varepsilon \in \mathbf{Q}_{>0}\}$$

abzählbar ist. Wir haben eine Surjektion $D \times \mathbf{Q}_{>0} \longrightarrow B$, $(x, \varepsilon) \longmapsto \mathrm{B}_\varepsilon(x)$.

Da D als abzählbar vorausgesetzt ist, und $\mathbf{Q}_{>0}$ nach Aufgabe 27 (4, 2) abzählbar ist, ist auch $D \times \mathbf{Q}_{>0}$ abzählbar; vgl. Aufgabe 27.(3). Somit ist B abzählbar; vgl. Aufgabe 27.(1). Dies zeigt die *Behauptung.*

Bleibt zu zeigen, daß B eine Basis von X ist. Zunächst halten wir fest, daß B aus offenen Teilmengen von X besteht; vgl. Lemma aus §1.3.2.

Sei $\xi \in U \overset{\text{off.}}{\subseteq} X$. Wir haben ein $\varepsilon \in \mathbf{Q}_{>0}$ und ein $x \in D$ mit $\xi \in \mathrm{B}_\varepsilon(x) \subseteq U$ zu finden.

Sei $\eta \in \mathbf{R}_{>0}$ mit $\xi \in \mathrm{B}_\eta(\xi) \subseteq U \overset{\text{off.}}{\subseteq} X$.

Sei $\varepsilon \in \mathbf{Q}_{>0} \cap (0, \eta/2]$; cf. Beispiel (4) aus §3.2.

Es ist $D \cap \mathrm{B}_\varepsilon(\xi) \neq \emptyset$; cf. Bemerkung aus §4.1.2. Wähle $x \in D \cap \mathrm{B}_\varepsilon(\xi)$. Dann ist $\xi \in \mathrm{B}_\varepsilon(x)$.

Bleibt zu zeigen, daß $\mathrm{B}_\varepsilon(x) \subseteq U$. Es genügt zu zeigen, daß $\mathrm{B}_\varepsilon(x) \overset{!}{\subseteq} \mathrm{B}_\eta(\xi) \subseteq U$.

Sei $y \in \mathrm{B}_\varepsilon(x)$. Dann ist

$$d(y, \xi) \;\leqslant\; d(y, x) + d(x, \xi) \;<\; \varepsilon + \varepsilon \;\leqslant\; \eta \;,$$

und also $y \in \mathrm{B}_\eta(\xi)$, wie wir zu zeigen hatten.

Aufgabe 40

Zu $\supseteq$. Es ist $A^\circ \times B^\circ \overset{\text{off.}}{\subseteq} X \times Y$; vgl. das erste Beispiel aus §3.4. Dazuhin ist $A^\circ \times B^\circ \subseteq A \times B$. Also ist $A^\circ \times B^\circ \subseteq (A \times B)^\circ$; cf. Bemerkung (3) aus §1.4.

Zu $\subseteq$. Sei $(x, y) \in (A \times B)^\circ$. Die Basis aus dem ersten Beispiel aus §3.4 gibt $U \overset{\text{off.}}{\subseteq} X$ und $V \overset{\text{off.}}{\subseteq} Y$ mit

$$(x, y) \;\in\; U \times V \;\subseteq\; (A \times B)^\circ \;.$$

Da $U \times V \subseteq (A \times B)^\circ \subseteq A \times B$, folgt $U \subseteq A$ und $V \subseteq B$. Also ist $U \subseteq A^\circ$ und $V \subseteq B^\circ$; cf. Bemerkung (3) aus §1.4. Es wird

$$(x, y) \;\in\; U \times V \;\subseteq\; A^\circ \times B^\circ \;.$$

Somit haben wir $(A \times B)^\circ \subseteq A^\circ \times B^\circ$ gezeigt, wie gewünscht.