

Lösung 1**Aufgabe 1**

(1) Es ist

$$\text{Pot}(\{1, 2, 3\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}, \}.$$

(2) Für $Y \subseteq X$ sei die charakteristische Funktion

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\chi_Y} & \{0, 1\} \\ x & \mapsto & \begin{cases} 0 & \text{falls } x \notin Y \\ 1 & \text{falls } x \in Y \end{cases} \end{array}$$

definiert. Setze

$$\begin{array}{ccc} \text{Abb}(X, \{0, 1\}) & \longleftrightarrow & \text{Pot}(X) \\ f & \longmapsto & f^{-1}(\{1\}) \\ \chi_Y & \longleftarrow & Y \end{array}$$

Wir *behaupten*, daß sich diese beiden Abbildungen gegenseitig invertieren.Sei $f \in \text{Abb}(X, \{0, 1\})$. Wir haben $f \stackrel{!}{=} \chi_{f^{-1}(\{1\})}$ zu zeigen. Sei $x \in X$.Ist $f(x) = 0$, so ist $x \notin f^{-1}(\{1\})$, und also auch $\chi_{f^{-1}(\{1\})}(x) = 0$.Ist $f(x) = 1$, so ist $x \in f^{-1}(\{1\})$, und also auch $\chi_{f^{-1}(\{1\})}(x) = 1$.In beiden Fällen ist also $f(x) = \chi_{f^{-1}(\{1\})}(x)$. Es folgt $f = \chi_{f^{-1}(\{1\})}$.Sei $Y \subseteq X$. Wir haben $Y \stackrel{!}{=} \chi_Y^{-1}(\{1\})$ zu zeigen. Nun ist aber

$$\chi_Y^{-1}(\{1\}) = \{x \in X : \chi_Y(x) = 1\} = Y$$

nach Definition von Y .Dies zeigt die *Behauptung*, und damit insbesondere die Bijektivität der ersten Abbildung.(3) Dem Hinweis folgend, *nehmen wir an*, es gebe eine Surjektion $X \xrightarrow{f} \text{Pot}(X)$. Sei

$$Y := \{x \in X : x \notin f(x)\}.$$

Da f surjektiv ist, gibt es ein $y \in X$ mit $f(y) = U$.Falls $y \in Y$, ist $y \notin f(y) = Y$.Falls $y \notin Y$, ist nicht $y \notin f(y)$, also $y \in f(y) = Y$.In beiden Fällen landen wir bei einem *Widerspruch*. Also kann es keine solche Surjektion geben.**Aufgabe 2** (Sierpinski-Raum)Wir *behaupten*, daß $T := \{\emptyset, \{1\}, \{1, 2\}\}$ eine Topologie auf $\{1, 2\}$ ist.

1. Beweis. Am einfachsten geht der Nachweis mit einer geeigneten Prämetrik, vgl. §1.3.1.

Setze $d(1, 1) := 0$, $d(2, 2) := 0$, $d(1, 2) := 0$ und $d(2, 1) := 1$. Wir betrachten $T^{(\{1, 2\}, d)}$.Diesbezüglich wird $B_\varepsilon(2) = \{y \in \{1, 2\} : d(y, 2) < \varepsilon\} = \{1, 2\}$ für alle $\varepsilon \in \mathbf{R}_{>0}$. Insbesondere ist $\{2\} \notin T^{(\{1, 2\}, d)}$, da $B_\varepsilon(2) \not\subseteq \{2\}$ für alle $\varepsilon \in \mathbf{R}_{>0}$.Ferner wird $B_1(1) = \{y \in \{1, 2\} : d(y, 1) < 1\} = \{1\}$. Insbesondere ist $\{1\} \in T^{(\{1, 2\}, d)}$, da $B_1(1) \subseteq \{1\}$.Somit ist $T = T^{(\{1, 2\}, d)}$, und letzteres ist bekanntermaßen eine Topologie. Dies zeigt die *Behauptung*.

2. Beweis. Möchte man direkt argumentieren, so beobachte man, daß T bezüglich Inklusion zu einer Kette geordnet ist, also

$$\emptyset \subseteq \{1\} \subseteq \{1, 2\}.$$

Es folgt, daß die beliebige Vereinigung von Elementen aus T wieder in T liegt, denn diese Vereinigung ist das maximale Kettenglied ihrer Teilnehmer. Dies zeigt (Top 2).

Genauso folgt, daß der beliebige Schnitt von Elementen aus T wieder in T liegt, denn dieser Schnitt ist das minimale Kettenglied ihrer Teilnehmer. Von dieser Aussage brauchen wir allerdings nur, daß der Schnitt zweier Elemente von T wieder in T liegt, haben also etwas mehr gezeigt als für (Top 3) benötigt.

Ferner sind $\emptyset$ und $\{1, 2\}$ in der Tat in T enthalten. Dies zeigt (Top 1).

Insgesamt zeigt dies die *Behauptung* abermals.

Es ist T auch weder gleich $T_{\text{diskret}} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$ noch gleich $T_{\text{verklumpt}} = \{\emptyset, \{1, 2\}\}$, wie verlangt.

Der topologische Raum $(\{1, 2\}, T)$ heißt auch *Sierpinski-Raum*.

Er dient hauptsächlich als Lieferant von Gegenbeispielen.

Aufgabe 3

Sei X eine Menge.

- (1) Die Aussage ist falsch. Sei etwa $X = \mathbf{Z}$. Sei $I = \mathbf{Z}_{\geq 0}$. Sei $U_i = \{i\} \in T$. Es ist

$$\bigcup_{i \in I} U_i = \bigcup_{i \in \mathbf{Z}_{\geq 0}} \{i\} = \mathbf{Z}_{\geq 0} \notin T,$$

da $\mathbf{Z}_{\geq 0}$ weder eine endliche Teilmenge von $\mathbf{Z}$ noch gleich $\mathbf{Z}$ selbst ist.

- (2) Die Aussage ist richtig.

Zu (Top 1). Es ist $\emptyset \in T$. Es ist $X = X \setminus \emptyset \in T$, da $\emptyset$ eine endliche Menge ist.

Zu (Top 2). Sei I eine Indexmenge. Seien $U_i \in T$ für $i \in I$. Wir wollen zeigen, daß $\bigcup_{i \in I} U_i \overset{!}{\in} T$. Ohne Einschränkung ist $U_i \neq \emptyset$ für alle $i \in I$. Ohne Einschränkung ist $I \neq \emptyset$. Schreibe $U_i = X \setminus M_i$ mit $M_i \subseteq X$ endlich. Es wird

$$\bigcup_{i \in I} U_i = \bigcup_{i \in I} (X \setminus M_i) = X \setminus (\bigcap_{i \in I} M_i) \in T,$$

da $\bigcap_{i \in I} M_i$ eine endliche Menge ist.

Zu (Top 3). Seien $U, V \in T$. Wir wollen zeigen, daß $U \cap V \overset{!}{\in} T$. Ohne Einschränkung ist $U \neq \emptyset$ und $V \neq \emptyset$. Schreibe $U = X \setminus M$ und $V = X \setminus N$ mit endlichen Teilmengen $M, N \subseteq X$. Es wird

$$U \cap V = (X \setminus M) \cap (X \setminus N) = X \setminus (M \cup N) \in T,$$

da $M \cup N$ eine endliche Menge ist.

Aufgabe 4

- (1) Die Aussage ist falsch. Sei $X := \mathbf{R}$, mit der Topologie aus §1.2.1. Sei $Y = [0, 1) \subseteq \mathbf{R}$.

Es ist Y nicht offen. Denn obwohl $0 \in Y$, ist $B_\varepsilon(0) \not\subseteq Y$ für alle $\varepsilon > 0$. In der Tat ist $-\varepsilon/2 \in B_\varepsilon(0) \setminus Y$.

Es ist Y nicht abgeschlossen, i.e. $X \setminus Y$ nicht offen. Denn obwohl $1 \in X \setminus Y$, ist $B_\varepsilon(1) \not\subseteq X \setminus Y$ für alle $\varepsilon > 0$. In der Tat ist $\max\{1 - \varepsilon/2, 1/2\} \in B_\varepsilon(1) \setminus (X \setminus Y)$.

- (2) Die Aussage ist falsch. Sei etwa $X = \mathbf{R}$, sei $I = \mathbf{Z}_{\geq 1}$ und sei $U_i = (-1/i, 1/i)$ für $i \in \mathbf{Z}_{\geq 1}$, was nach Bemerkung (3) in §1.2.1 eine offene Teilmenge in $\mathbf{R}$ ist. Es ist $\bigcap_{i \in I} U_i = \bigcap_{i \in \mathbf{Z}_{\geq 1}} (-1/i, 1/i) = \{0\}$ nicht offen, da $(0 - \varepsilon, 0 + \varepsilon)$ für kein $\varepsilon > 0$ eine Teilmenge von $\{0\}$ ist.

Als ein weiteres Gegenbeispiel kann man die in Aufgabe 3.(2) eingeführte Topologie im Falle $X = \mathbf{Z}$ heranziehen. Sei $I = \mathbf{Z}_{\geq 1}$. Sei $U_i = \mathbf{Z} \setminus \{i\}$. Da $\{i\}$ endlich ist, ist $U_i \stackrel{\text{off.}}{\subseteq} \mathbf{Z}$. Dahingegen ist

$$\bigcap_{i \in I} U_i = \bigcap_{i \in \mathbf{Z}_{\geq 1}} (\mathbf{Z} \setminus \{i\}) = \mathbf{Z} \setminus (\bigcup_{i \in \mathbf{Z}_{\geq 1}} \{i\}) = \mathbf{Z}_{\leq 0}$$

nicht offen, da $\mathbf{Z} \setminus \mathbf{Z}_{\leq 0} = \mathbf{Z}_{\geq 1}$ keine endliche Menge ist.

- (3) Die Aussage ist richtig. Wir zeigen sie durch Induktion nach k . Für $k = 1$ trifft die Aussage zu. Sei $k \geq 2$ und sei die Aussage für $k - 1$ vorausgesetzt. Wir haben sie für k zu zeigen. Es wird

$$\bigcap_{i=1}^k U_i = (\bigcap_{i=1}^{k-1} U_i) \cap U_k .$$

Da nach Induktionsvoraussetzung $\bigcap_{i=1}^{k-1} U_i \stackrel{\text{off.}}{\subseteq} X$ und nach Voraussetzung $U_k \stackrel{\text{off.}}{\subseteq} X$, ist mit (Top 3) auch der Schnitt dieser beiden Teilmengen eine offene Teilmenge von X .

- (4) Die Aussage ist falsch. Da die Aussage (2) im allgemeinen falsch ist, können wir X , I und $U_i \stackrel{\text{off.}}{\subseteq} X$ so wählen, daß $\bigcap_{i \in I} U_i$ keine offene Teilmenge in X ist. Dann aber wird mit $A_i := X \setminus U_i \stackrel{\text{abg.}}{\subseteq} X$ auch

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \bigcup_{i \in I} (X \setminus U_i) = X \setminus (\bigcap_{i \in I} U_i)$$

keine abgeschlossene Teilmenge von X mehr.

- (5) Die Aussage ist richtig. Denn mit der richtigen Aussage (3) folgt, daß

$$X \setminus (\bigcup_{i=1}^k A_i) = \bigcap_{i=1}^k (X \setminus A_i) \stackrel{\text{off.}}{\subseteq} X .$$