

Topologie, SS 09

Lösung zur Klausur

Aufgabe 1

Es gibt die 4 Abbildungen $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ von Y nach Y .

Darunter sind $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ als konstante Abbildungen stetig. Die Abbildung $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ ist als Identität stetig.

Die Abbildung $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ ist hingegen nicht stetig, da das Urbild der offenen Teilmenge $\{1\}$ unter dieser Abbildung gleich $\{2\}$ ist, und somit keine offene Teilmenge.

Somit ist

$$C(X, Y) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \right\}.$$

Aufgabe 2

Es erzeugt

$$\{f_1^{-1}(V_1) : V_1 \overset{\text{off.}}{\subseteq} Y_1\} \cup \{f_2^{-1}(V_2) : V_2 \overset{\text{off.}}{\subseteq} Y_2\} = \{\emptyset, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{1, 2, 3, 4\}\}$$

die Topologie

$$T_{X, \text{initial}, (f_1, f_2)} = \{\emptyset, \{1\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 4\}\}.$$

Aufgabe 3

- (1) Eine Abbildung in ein Produkt ist genau dann stetig, wenn es die beiden Komponenten sind. Es genügt also, $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $t \mapsto t^2$ und $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $t \mapsto 2t$ als stetig nachzuweisen. Beides sind aber Polynome, und als solche stetig.
- (2) Es ist das Intervall $[0, 1]$ kompakt. Ferner ist f stetig. Da das Bild kompakter Teilmengen unter stetigen Abbildungen wiederum kompakt ist, folgt, daß $f([0, 1])$ kompakt ist.
- (3) Kompakte Teilmengen von Hausdorffräumen sind abgeschlossen. Nun ist $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ als Produkt zweier Hausdorffräume wieder hausdorffsch. (Oder aber, $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ ist homöomorph zum metrischen Raum $\mathbf{R}^2$, der als solcher hausdorffsch ist, und folglich ist auch $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ hausdorffsch.) Also ist die kompakte Teilmenge $f([0, 1])$ in $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ abgeschlossen.

Aufgabe 4

Wir haben die Surjektion

$$\begin{array}{ccc} \{(a, b) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{Q} : a < b\} & \longrightarrow & M \\ (a, b) & \longmapsto & [a, b] \end{array}$$

Somit genügt es zu zeigen, daß $\{(a, b) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{Q} : a < b\}$ abzählbar ist. Da dies eine Teilmenge von $\mathbf{Z} \times \mathbf{Q}$ ist, genügt es zu zeigen, daß $\mathbf{Z} \times \mathbf{Q}$ abzählbar ist. Das Produkt zweier abzählbarer Mengen ist aber abzählbar. Und $\mathbf{Z}$ und $\mathbf{Q}$ sind beide abzählbar. Dies zeigt die Behauptung.

Aufgabe 5

- (1) Nein, X ist nicht kompakt. Die kompakten Teilmengen von $\mathbf{R}^2$ sind gerade die abgeschlossenen und beschränkten Teilmengen.

Aber X ist keine abgeschlossene Teilmenge. Denn z.B. ist $y = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2 \setminus X$, aber $B_\varepsilon^{(2)}(y) \cap X \neq \emptyset$ für alle $\varepsilon \in \mathbf{R}_{>0}$; hierfür genügt es, ε mit $\varepsilon \in (0, 1]$ zu betrachten; für solche ε liegt in der Tat z.B. $\begin{pmatrix} 1-\varepsilon/2 \\ 0 \end{pmatrix}$ in diesem Schnitt. Also ist $y \in \bar{X}$, aber $y \notin X$. Folglich ist $X \subsetneq \bar{X}$, d.h. X ist keine abgeschlossene Teilmenge von $\mathbf{R}^2$.

Alternativ kann man auch wie folgt argumentieren. Es ist $B_1^{(\infty)}(0) \subseteq X \subseteq \bar{B}_1^{(\infty)}(0) = \overline{B_1^{(\infty)}(0)}$, und also $\bar{X} = \bar{B}_1^{(\infty)}(0)$. Da aber z.B. $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \bar{B}_1^{(\infty)}(0) \setminus X$ liegt, muß $X \subsetneq \bar{X}$ sein. Mithin kann X keine abgeschlossene Teilmenge sein. Vgl. Aufgabe 14.(4).

- (2) Ja, X ist zusammenhängend. Dazu genügt es zu zeigen, daß X wegzusammenhängend ist.

Seien $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{pmatrix} \in X$. Wir wollen eine stetige Abbildung γ von $[0, 1]$ nach X finden, die $\gamma(0) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ und $\gamma(1) = \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{pmatrix}$ hat. Sei hierzu $\gamma(t) := \begin{pmatrix} (1-t)x_1 + t\tilde{x}_1 \\ (1-t)x_2 + t\tilde{x}_2 \end{pmatrix}$ gesetzt für $t \in [0, 1]$. In der Tat ist $|(1-t)x_1 + t\tilde{x}_1| \leq (1-t)|x_1| + t|\tilde{x}_1| < (1-t) + t = 1$, wobei der vorletzte Schritt zutrifft, da $((1-t) > 0 \text{ oder } t > 0)$ und $|x_1|, |\tilde{x}_1| < 1$. Ferner ist $|(1-t)x_2 + t\tilde{x}_2| \leq (1-t)|x_2| + t|\tilde{x}_2| \leq (1-t) + t = 1$.

Schließlich ist die Abbildung stetig, da ihre Komponenten (lineare) Polynome in t sind, und da $\mathbf{R}^2 \simeq \mathbf{R} \times \mathbf{R}$, so daß aus der Stetigkeit der Komponenten auf die Stetigkeit der Abbildung geschlossen werden kann.

Alternativ kann man argumentieren, daß wir auf diese Weise gezeigt haben, daß X konvex ist, und daß konvexe Teilmengen von $\mathbf{R}^2$ bekanntermaßen wegzusammenhängend sind.