M. Künzer 21.07.09

Topologie, SS 09

Klausur

Bearbeitungszeit 120 Minuten. Zum Bestehen sind 13 Punkte erforderlich.

Es dürfen (und sollen) aus der Vorlesung und der Übung bekannte Tatsachen verwandt werden. Solche Tatsachen sollten dann ausdrücklich erwähnt werden, eine Quellenangabe ist hingegen nicht erforderlich.

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Sei $Y := \{1, 2\}$, ausgestattet mit der Sierpinski-Topologie $\big\{\emptyset,\, \{1\},\, \{1, 2\}\big\}$.

Bestimme alle stetigen Abbildungen von Y nach Y.

Aufgabe 2 (6 Punkte)

Sei $X := \{1, 2, 3, 4\}$.

Seien $Y_1 = Y_2 := \{1, 2\}$, ausgestattet mit der Sierpinski-Topologie $\big\{\emptyset,\, \{1\},\, \{1, 2\}\big\}$.

Sei $f_1 := \left(\begin{smallmatrix} 1&2&3&4 \\ 1&2&1&2 \end{smallmatrix}\right) : X \longrightarrow Y_1$. Sei $f_2 := \left(\begin{smallmatrix} 1&2&3&4 \\ 1&2&2&1 \end{smallmatrix}\right) : X \longrightarrow Y_2$.

Bestimme die diesbezüglich initiale Topologie $T_{X,\,\mathrm{initial},(f_1,f_2)}$ auf X.

Aufgabe 3 (6 Punkte)

(1) Zeige, daß die Abbildung

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{R} & \xrightarrow{f} & \mathbf{R} & \times & \mathbf{R} \\ t & \longmapsto & (t^2 & , & 2t) \end{array}$$

stetig ist.

(2) Zeige, daß $f([0, 1])$ kompakt ist.

(3) Zeige, daß $f([0, 1])$ eine abgeschlossene Teilmenge von $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ ist.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Zeige, daß die Menge

$$M := \big\{[a, b] \subseteq \mathbf{R} \;:\; a \in \mathbf{Z},\, b \in \mathbf{Q} \text{ und } a < b\big\}$$

abzählbar ist.

Aufgabe 5 (6 Punkte)

Sei $X := \{\left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbf{R}^2 \;:\; |x_1| < 1 \text{ und } |x_2| \leqslant 1\} \subseteq \mathbf{R}^2$.

(1) Ist X kompakt? Begründe.

(2) Ist X zusammenhängend? Begründe.