Topologie, SS 09

Blatt 9

Aufgabe 32 (6 Punkte)

Sei (X, T_X) ein topologischer Raum. Sei $Y \subseteq X$.

(1) Ist S eine Subbasis von X, so ist $\{U \cap Y \ : \ U \in S\}$ eine Subbasis von Y.

(2) Ist B eine Basis von X, so ist $\{U \cap Y \ : \ U \in B\}$ eine Basis von Y.

Aufgabe 33 (4 Punkte)

Sei $n \geqslant 0$. Zeige, daß die Bijektion

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{R}^n & \xrightarrow{\varphi} & \mathbf{R}^{\times n} \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} & \longmapsto & (x_1, \ldots, x_n) \end{array}$$

ein Homöomorphismus ist.

Aufgabe 34 (10 Punkte)

(1) Sei (X, d) ein metrischer Raum. Seien $x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4 \in X$. Zeige, daß

$$-d(x_1, x_2) + d(x_2, x_3) - d(x_3, x_4) \ \leqslant \ d(x_1, x_4) \ \leqslant \ d(x_1, x_2) + d(x_2, x_3) + d(x_3, x_4)\ .$$

(2) Sei (X, d) ein metrischer Raum. Zeige, daß $d : X \times X \longrightarrow \mathbf{R}_{\geqslant 0}$ stetig ist. (Hinweis: (1).)

(3) Sei (X, d) ein metrischer Raum. Sei $\emptyset \neq Y \subseteq X$. Sei $d_Y(x) := \inf_{y \in Y} d(x, y)$ für $x \in X$.
Zeige, daß $d_Y : X \longrightarrow \mathbf{R}_{\geqslant 0}\,,\ x \longmapsto d_Y(x)$ stetig ist.
(Hinweis: Zeige $d_Y(x) - d(\xi, x) \leqslant d_Y(\xi) \leqslant d_Y(x) + d(\xi, x)$.)

(4) Sei $(V, \langle -, = \rangle)$ ein euklidscher Raum. Zeige, daß $\langle -, = \rangle : V \times V \longrightarrow \mathbf{R},\ (x, y) \longmapsto \langle x, y \rangle$ stetig ist.

(5) Zeige, daß $\mathbf{R} \times \mathbf{R} \xrightarrow{(+)} \mathbf{R},\ (x, y) \longmapsto x + y$ und $\mathbf{R} \times \mathbf{R} \xrightarrow{(\cdot)} \mathbf{R},\ (x, y) \longmapsto x \cdot y$ stetige Abbildungen sind. Folgere hiermit erneut die Aussage von Aufgabe 20.
(Hinweis: $X \longrightarrow \mathbf{R} \times \mathbf{R} \xrightarrow{(+)} \mathbf{R}$.)

Aufgabe 35 (6 Punkte)

(1) Seien X, Y, Z topologische Räume. Zeige, daß $(X \times Y) \times Z \simeq X \times Y \times Z$ und $X \times Y \simeq Y \times X$.

(2) Sei $k \geqslant 1$. Sei X_i ein topologischer Raum und sei $X_i' \subseteq X_i$ für $1 \leqslant i \leqslant k$. Zeige, daß auf $\prod_{i=1}^k X_i'$ die Produkttopologie der Spurtopologien mit der Spurtopologie bzgl. $\prod_{i=1}^k X_i' \subseteq \prod_{i=1}^k X_i$ übereinstimmt.