

Topologie, SS 09

Blatt 8**Aufgabe 28 (12 Punkte)**

Sei $X = \{1, 2, 3, 4\}$. Sei $(Y_1, T_{Y_1}) = (\{1, 2, 3\}, \{\emptyset, \{1\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 2, 3\}\})$.
 Sei $(Y_2, T_{Y_2}) = (\{1, 2\}, \{\emptyset, \{1\}, \{1, 2\}\})$. Cf. Aufgabe 17.

Seien $X \xrightarrow{f_1} Y_1$ und $X \xrightarrow{f_2} Y_2$ gegeben.

Bestimme die diesbezüglich initiale Topologie $T_{X, \text{initial}, (f_1, f_2)}$ auf X .

(1) Seien $f_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ und $f_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

(2) Seien $f_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ und $f_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 29 (5 Punkte)

Seien X , (Y_1, T_{Y_1}) und (Y_2, T_{Y_2}) wie in Aufgabe 28. Seien $f_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} : Y_1 \rightarrow X$ und $f_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} : Y_2 \rightarrow X$. Bestimme die diesbezüglich finale Topologie $T_{X, \text{final}, (f_1, f_2)}$ auf X .

Aufgabe 30 (3 Punkte)

Seien X und Y Mengen. Sei (Z, T_Z) ein topologischer Raum. Seien $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ Abbildungen.

Sei T_Y die initiale Topologie auf Y bezüglich g und (Z, T_Z) . Sei T_X die initiale Topologie auf X bezüglich f und (Y, T_Y) .

Sei T'_X die initiale Topologie auf X bezüglich $g \circ f$ und (Z, T_Z) .

Zeige, daß $T_X = T'_X$.

Aufgabe 31 (5 Punkte)

Sei auf $\mathbf{R}$ die Äquivalenzrelation $(\sim)$ dadurch erklärt, daß $x \sim y$ falls $x - y \in \mathbf{Z}$, wobei $x, y \in \mathbf{R}$. Dies liefert den topologischen Raum $\mathbf{R}/(\sim)$, ausgestattet mit der finalen Topologie bezüglich $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}/(\sim)$, $x \mapsto [x]_\sim$.

Sei $S^1 := \{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 = 1 \}$ die 1-Sphäre, eine Kreislinie, ausgestattet mit der Spurtopologie bzgl. $S^1 \subseteq \mathbf{R}^2$.

Zeige, daß $\mathbf{R}/(\sim)$ zu S^1 homöomorph ist.

Hierzu dürfen aus der Analysis bekannte Eigenschaften der Funktionen $\sin x$ und $\cos x$ ohne Beweis verwandt werden.