M. Künzer Abgabe Mittwoch, 17.06.09

Topologie, SS 09

Blatt 7

Aufgabe 24 (6 Punkte)

Sei X eine Menge. Sei $S \subseteq \operatorname{Pot}(X)$. Bestimme $\langle S \rangle_X$.

(1) $X = \{1,2,3,4\}$, $S = \big\{\{1,2,3\},\ \{1,2,4\}\big\}$.

(2) $X = \{1,2,3,4,5,6\}$, $S = \big\{\{1,2,3,4\},\ \{1,2,3,5\},\ \{3,4,5,6\}\big\}$.

Aufgabe 25 (3+2+2 Punkte) Zeige.

Sei X ein topologischer Raum. Sei S eine Subbasis von X.

(1) Es ist S genau dann eine Basis von X, wenn für $k \geqslant 0$, $U_i \in S$ für $1 \leqslant i \leqslant k$ und $x \in \bigcap_{i=1}^k U_i$ ein $V \in S$ existiert mit $x \in V \subseteq \bigcap_{i=1}^k U_i$.

(2) Ist $U \cap V \in S$ für alle $U,\ V \in S$, so ist S eine Basis. (Hinweis: Teil (1).)

(3) Ist S eine Subbasis von X, so ist $S' := \{\bigcap_{i=1}^k U_i \,:\, k \in \mathbf{Z}_{\geqslant 0},\ U_i \in S \text{ für } 1 \leqslant i \leqslant k\}$ eine Basis von X. (Hinweis: Teil (2).)

Aufgabe 26 (3 Punkte)

Sei X eine Menge. Zeige, daß $\big\{\{x\} \,:\, x \in X\big\}$ eine Basis von $T_{X,\,\mathrm{diskret}}$ ist.

Aufgabe 27 (10 Punkte) (Abzählbarkeit)

Eine Menge X heiße *abzählbar,* wenn $X = \emptyset$ ist oder eine Surjektion $\mathbf{Z}_{\geqslant 1} \longrightarrow X$ existiert.

Zeige.

(1) Ist $X \xrightarrow{f} Y$ eine Abbildung, und ist X abzählbar, so auch $f(X)$.

(2) Eine Teilmenge einer abzählbaren Menge ist abzählbar.

(3) Für abzählbare Mengen X und Y ist auch $X \times Y$ abzählbar.

(4) Es ist $\mathbf{Q}$ abzählbar.

(5) Sei $n \geqslant 0$. Es besitzt $\mathbf{R}^n$ eine abzählbare Basis. (Hinweis: Beispiel (4) aus §3.2.)