Topologie, SS 09

Blatt 7**Aufgabe 24 (6 Punkte)**Sei X eine Menge. Sei $S \subseteq \text{Pot}(X)$. Bestimme $\langle S \rangle_X$.

- (1) $X = \{1, 2, 3, 4\}$, $S = \{\{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}\}$.
- (2) $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $S = \{\{1, 2, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 5\}, \{3, 4, 5, 6\}\}$.

Aufgabe 25 (3+2+2 Punkte) Zeige.Sei X ein topologischer Raum. Sei S eine Subbasis von X .

- (1) Es ist S genau dann eine Basis von X , wenn für $k \geq 0$, $U_i \in S$ für $1 \leq i \leq k$ und $x \in \bigcap_{i=1}^k U_i$ ein $V \in S$ existiert mit $x \in V \subseteq \bigcap_{i=1}^k U_i$.
- (2) Ist $U \cap V \in S$ für alle $U, V \in S$, so ist S eine Basis. (Hinweis: Teil (1).)
- (3) Ist S eine Subbasis von X , so ist $S' := \{\bigcap_{i=1}^k U_i : k \in \mathbf{Z}_{\geq 0}, U_i \in S \text{ für } 1 \leq i \leq k\}$ eine Basis von X . (Hinweis: Teil (2).)

Aufgabe 26 (3 Punkte)Sei X eine Menge. Zeige, daß $\{\{x\} : x \in X\}$ eine Basis von $T_{X, \text{diskret}}$ ist.**Aufgabe 27 (10 Punkte)** (Abzählbarkeit)Eine Menge X heiße *abzählbar*, wenn $X = \emptyset$ ist oder eine Surjektion $\mathbf{Z}_{\geq 1} \rightarrow X$ existiert.

Zeige.

- (1) Ist $X \xrightarrow{f} Y$ eine Abbildung, und ist X abzählbar, so auch $f(X)$.
- (2) Eine Teilmenge einer abzählbaren Menge ist abzählbar.
- (3) Für abzählbare Mengen X und Y ist auch $X \times Y$ abzählbar.
- (4) Es ist $\mathbf{Q}$ abzählbar.
- (5) Sei $n \geq 0$. Es besitzt $\mathbf{R}^n$ eine abzählbare Basis. (Hinweis: Beispiel (4) aus §3.2.)