M. Künzer Abgabe Mittwoch, 10.06.09

Topologie, SS 09

Blatt 6

Aufgabe 21 (18 Punkte)

Seien X, Y topologische Räume. Sei $X \xrightarrow{f} Y$ eine Abbildung. Entscheide, ob f stetig ist.

(1) Sei $X = Y = \mathbf{R}$. Sei $f(x) := |x|$ für $x \in \mathbf{R}$. (Hinweis: Satz 1b.)

(2) Sei $X = Y = \mathbf{R}$. Sei $f(x) := \sin(1/x)$ für $x \in \mathbf{R} \smallsetminus \{0\}$. Sei $f(0) := 0$.

(3) Sei $X = \mathbf{R}_{>0}$. Sei $Y = \mathbf{R}$. Sei $f(x) := 1/x$ für $x \in \mathbf{R}_{>0}$.

(4) Sei $X = Y = \mathbf{R}$. Sei $n \geqslant 0$. Seien $a_0, \ldots, a_n \in \mathbf{R}$. Sei $f(x) := a_n x^n + \cdots + a_0 x^0$ für $x \in \mathbf{R}$. (Hinweis: Aufgabe 20.)

(5) Sei $n \geqslant 0$, sei $X = \mathbf{R}^n$, normiert mit $\|-\|_2$. Sei Y ein normierter Raum. Sei $X \xrightarrow{f} Y$ eine lineare Abbildung. (Hinweis: Bilder der Standardbasisvektoren betrachten.)

(6) Sei $X = (X, \|-\|)$ ein normierter Raum. Sei $Y = \mathbf{R}$. Sei $f(x) := \|x\|$ für $x \in X$.

Aufgabe 22 (6 Punkte)

Seien X und Y topologische Räume. Sei $X \xrightarrow{f} Y$ eine stetige Abbildung.

(1) Sei $Y' \subseteq Y$. Zeige, daß $\overline{f^{-1}(Y')} \subseteq f^{-1}(\bar{Y}')$. Gilt stets die Gleichheit?

(2) Sei $X' \subseteq X$. Zeige, daß genau dann $\partial X' = \emptyset$ ist, wenn X' eine offene und abgeschlossene Teilmenge von X ist.

(3) Sei $X' \subseteq X$. Zeige, daß $\partial \bar{X}' \subseteq \partial X'$. Gilt stets die Gleichheit?

Aufgabe 23 (4 Punkte) Zeige oder widerlege.

(1) Seien X, Y topologische Räume. Sei $X \xrightarrow{f} Y$ eine surjektive offene Abbildung. Sei $X' \subseteq X$. Schreibe $Y' := f(X') \subseteq Y$. Dann ist $X' \xrightarrow{f|_{X'}^{Y'}} Y'$ offen (jeweils bezüglich der Spurtopologie).

(2) Es ist das Intervall $(0, 1)$ homöomorph zu $\mathbf{R}_{>1}$. (Hinweis: Aufgabe 21.(3).)