M. Künzer Abgabe Mittwoch, 27.05.09

Topologie, SS 09

Blatt 5

Aufgabe 17 (2+4+4 Punkte)

Sei $X = (X, T_X) := (\{1,2,3\}, \big\{\emptyset, \{1\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{1,2,3\}\big\})$.
Sei $Y = (Y, T_Y) := (\{1,2\}, \big\{\emptyset, \{1\}, \{1,2\}\big\})$ der Sierpinski-Raum; cf. Aufgabe 2.

(1) Zeige, daß (X, T_X) ein topologischer Raum ist.

(2) Bestimme alle stetigen Abbildungen von X nach Y.

(3) Bestimme alle Homöomorphismen von X nach X.

Aufgabe 18 (8 Punkte) Zeige oder widerlege.

Seien X und Y topologische Räume. Sei $X \xrightarrow{f} Y$ eine Abbildung.

(1) Es ist f stetig genau dann, wenn $f^{-1}(B) \overset{\text{abg.}}{\subseteq} X$ für alle $B \overset{\text{abg.}}{\subseteq} Y$.

(2) Es ist f stetig genau dann, wenn $f(\overline{X'}) \subseteq \overline{f(X')}$ für alle $X' \subseteq X$.

(3) Falls f stetig ist, dann ist $f(X'^{\circ}) \supseteq f(X')^{\circ}$ für alle $X' \subseteq X$.

(4) Falls f stetig ist, dann ist $f(X'^{\circ}) \subseteq f(X')^{\circ}$ für alle $X' \subseteq X$.

Aufgabe 19 (6 Punkte) Zeige.

Seien X und Y topologische Räume. Sei $X \xrightarrow{f} Y$ eine Abbildung.

(1) Sei f ein Homöomorphismus. Sei $U \subseteq X$.
Es ist $U \overset{\text{off.}}{\subseteq} X$ genau dann, wenn $f(U) \overset{\text{off.}}{\subseteq} Y$.

(2) Es ist f genau dann ein Homöomorphismus, wenn f stetig ist und es eine stetige Abbildung $X \xleftarrow{g} Y$ gibt mit $g \circ f = \mathrm{id}_X$ und $f \circ g = \mathrm{id}_Y$.

Aufgabe 20 (4 Punkte) Zeige.

Sei X ein topologischer Raum. Seien $f,\ g \in \mathrm{C}(X)$.

(1) Sei $(f+g)(x) := f(x) + g(x)$ für $x \in X$. Zeige, daß $f + g \in \mathrm{C}(X)$.

(2) Sei $(f \cdot g)(x) := f(x) \cdot g(x)$ für $x \in X$. Zeige, daß $f \cdot g \in \mathrm{C}(X)$.