M. Künzer Abgabe Mittwoch, 20.05.09

Topologie, SS 09

Blatt 4

Aufgabe 13 (6 Punkte)

Sei $n \geqslant 0$.

(1) Sei $\|x\|_1 := \sum_{i=1}^{n} |x_i|$ für $x \in \mathbf{R}^n$. Zeige, daß $(\mathbf{R}^n, \|-\|_1)$ ein normierter Raum ist.

(2) Sei $d^{(1)}(x,y) := \|x-y\|_1$ für $x,\, y \in \mathbf{R}^n$. Sei $\mathrm{B}_\varepsilon^{(1)}(x) := \{y \in \mathbf{R}^n \ :\ d^{(1)}(y,x) < \varepsilon\}$ für $x \in \mathbf{R}^n$ und $\varepsilon \in \mathbf{R}_{>0}$. Skizziere $\mathrm{B}_1^{(1)}(\binom{0}{0})$, wobei $n = 2$.

(3) Zeige, daß $T^{(\mathbf{R}^n, d^{(1)})} = T^{(\mathbf{R}^n, d^{(2)})}$. (Hinweis: Aufgabe 11.)

Aufgabe 14 (12 Punkte)

(1) Bestimme $\overline{\{2^{-n} \ :\ n \in \mathbf{Z}_{\geqslant 0}\}} \subseteq \mathbf{R}$. Begründung!

(2) Bestimme $\overline{\{\binom{x}{y} \ :\ x \in [-1,+1],\, y \in (-1,+1)\}} \subseteq \mathbf{R}^2$. Begründung!

(3) Bestimme Y° für alle $Y \subseteq \{1,2\}$ bezüglich der Sierpinski-Topologie $\{\emptyset,\, \{1\},\, \{1,2\}\}$; cf. Aufgabe 2. Begründung!

(4) Sei $(V, \|-\|)$ ein normierter Raum. Schreibe $d := d^{(V,\|-\|)}$. Es ist also $d(x,y) = \|x-y\|$ für $x,\, y \in V$.

Sei $x \in V$. Sei $\varepsilon \in \mathbf{R}_{>0}$. Zeige, daß (bzgl. $T^{(V,d)}$)

$$\overline{\mathrm{B}_\varepsilon(x)} \;=\; \bar{\mathrm{B}}_\varepsilon(x) \;\stackrel{\text{def.}}{=}\; \{y \in V \ :\ d(y,x) \leqslant \varepsilon\}\ ;$$

cf. Aufgabe 9.

Aufgabe 15 (6 Punkte) Zeige oder widerlege.

Sei X ein topologischer Raum. Seien $Y,\, Z \subseteq X$.

(1) Es ist $\overline{X \smallsetminus Y} = X \smallsetminus Y^\circ$.

(2) Es ist $\overline{Y \cap Z} = \overline{Y} \cap \overline{Z}$.

(3) Es ist $\overline{Y \cup Z} = \overline{Y} \cup \overline{Z}$.

Aufgabe 16 (3 Punkte)

Sei $(V, \langle -, = \rangle)$ ein euklidscher Raum. Seien $x,\, y \in V \smallsetminus \{0\}$. Schreibe $\|-\| := \|-\|_{\langle -,=\rangle}$, i.e. $\|x\| = \langle x,x\rangle^{1/2}$.

Zeige, daß $\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$ genau dann zutrifft, wenn $y = \lambda x$ für ein $\lambda \in \mathbf{R}_{>0}$.