Topologie, SS 09

Blatt 4**Aufgabe 13 (6 Punkte)**Sei $n \geq 0$.

- (1) Sei $\|x\|_1 := \sum_{i=1}^n |x_i|$ für $x \in \mathbf{R}^n$. Zeige, daß $(\mathbf{R}^n, \|\cdot\|_1)$ ein normierter Raum ist.
- (2) Sei $d^{(1)}(x, y) := \|x - y\|_1$ für $x, y \in \mathbf{R}^n$. Sei $B_\varepsilon^{(1)}(x) := \{y \in \mathbf{R}^n : d^{(1)}(y, x) < \varepsilon\}$ für $x \in \mathbf{R}^n$ und $\varepsilon \in \mathbf{R}_{>0}$. Skizziere $B_1^{(1)}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$, wobei $n = 2$.
- (3) Zeige, daß $T^{(\mathbf{R}^n, d^{(1)})} = T^{(\mathbf{R}^n, d^{(2)})}$. (Hinweis: Aufgabe 11.)

Aufgabe 14 (12 Punkte)

- (1) Bestimme $\overline{\{2^{-n} : n \in \mathbf{Z}_{\geq 0}\}} \subseteq \mathbf{R}$. Begründung!
- (2) Bestimme $\overline{\left\{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : x \in [-1, +1], y \in (-1, +1)\right\}} \subseteq \mathbf{R}^2$. Begründung!
- (3) Bestimme Y° für alle $Y \subseteq \{1, 2\}$ bezüglich der Sierpinski-Topologie $\{\emptyset, \{1\}, \{1, 2\}\}$; cf. Aufgabe 2. Begründung!
- (4) Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum. Schreibe $d := d^{(V, \|\cdot\|)}$. Es ist also $d(x, y) = \|x - y\|$ für $x, y \in V$.

Sei $x \in V$. Sei $\varepsilon \in \mathbf{R}_{>0}$. Zeige, daß (bzgl. $T^{(V, d)}$)

$$\overline{B_\varepsilon(x)} = \bar{B}_\varepsilon(x) \stackrel{\text{def.}}{=} \{y \in V : d(y, x) \leq \varepsilon\};$$

cf. Aufgabe 9.

Aufgabe 15 (6 Punkte) Zeige oder widerlege.Sei X ein topologischer Raum. Seien $Y, Z \subseteq X$.

- (1) Es ist $\overline{X \setminus Y} = X \setminus Y^\circ$.
- (2) Es ist $\overline{Y \cap Z} = \bar{Y} \cap \bar{Z}$.
- (3) Es ist $\overline{Y \cup Z} = \bar{Y} \cup \bar{Z}$.

Aufgabe 16 (3 Punkte)Sei $(V, \langle -, = \rangle)$ ein euklidischer Raum. Seien $x, y \in V \setminus \{0\}$. Schreibe $\|-\| := \|-\|_{\langle -, = \rangle}$, i.e. $\|x\| = \langle x, x \rangle^{1/2}$.Zeige, daß $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$ genau dann zutrifft, wenn $y = \lambda x$ für ein $\lambda \in \mathbf{R}_{>0}$.