M. Künzer Abgabe Mittwoch, 13.05.09

Topologie, SS 09

Blatt 3

Aufgabe 9 (5 Punkte)

Sei (X, d) ein metrischer Raum.

Sei $\bar{\mathrm{B}}_\varepsilon(x) := \{y \in X \ : \ d(y,x) \leqslant \varepsilon\}$ für $x \in X$ und $\varepsilon \in \mathbf{R}_{>0}$.

Zeige, daß (bzgl. der Topologie $T^{(X,d)}$)

$$\bar{\mathrm{B}}_\varepsilon(x) \overset{\text{abg.}}{\subseteq} X .$$

Aufgabe 10 (4 Punkte)

Seien a, b, $c \in \mathbf{R}$. Zeige mittels Cauchy-Schwarz für $\left(\begin{smallmatrix} a \\ b \\ c \end{smallmatrix}\right)$ und $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$, daß

$$ab + ac + bc \ \leqslant \ a^2 + b^2 + c^2 ,$$

und daß Gleichheit genau dann gilt, wenn $a = b = c$.

Aufgabe 11 (6+4 Punkte)

(1) Sei V ein $\mathbf{R}$-Vektorraum, der den beiden normierten Räumen $(V, \|-\|)$ und $(V, \|-\|')$ zugrundeliege.

Gebe es α, $\beta \in \mathbf{R}_{>0}$ mit $\alpha\|x\| \leqslant \|x\|' \leqslant \beta\|x\|$ für alle $x \in V$.

Seien $d := d^{(V,\|-\|)}$ und $d' := d^{(V,\|-\|')}$ die zugehörigen Metriken auf V.

Seien $T := T^{(V,d)}$ und $T' := T^{(V,d')}$ die zugehörigen Topologien.

Zeige, daß $T = T'$.

(2) Sei $n \geqslant 1$. Zeige mittels (1) erneut, daß $T^{(\mathbf{R}^n,\, d^{(2)})} = T^{(\mathbf{R}^n,\, d^{(\infty)})}$; cf. §1.3.5.4, §1.3.5.5.

Aufgabe 12 (4 Punkte)

Sei (X, T) ein topologischer Raum. Sei $Y \subseteq X$. Zeige.

(1) Sei $U \subseteq Y$ mit $U \overset{\text{off.}}{\subseteq} X$. Es ist $U \overset{\text{off.}}{\subseteq} Y$.

(2) Sei $A \subseteq Y$ mit $A \overset{\text{abg.}}{\subseteq} X$. Es ist $A \overset{\text{abg.}}{\subseteq} Y$.