Topologie, SS 09

Blatt 3**Aufgabe 9 (5 Punkte)**Sei (X, d) ein metrischer Raum.Sei $\bar{B}_\varepsilon(x) := \{y \in X : d(y, x) \leq \varepsilon\}$ für $x \in X$ und $\varepsilon \in \mathbf{R}_{>0}$.Zeige, daß (bzgl. der Topologie $T^{(X,d)}$)

$$\bar{B}_\varepsilon(x) \stackrel{\text{abg.}}{\subseteq} X .$$

Aufgabe 10 (4 Punkte)Seien $a, b, c \in \mathbf{R}$. Zeige mittels Cauchy-Schwarz für $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, daß

$$ab + ac + bc \leq a^2 + b^2 + c^2 ,$$

und daß Gleichheit genau dann gilt, wenn $a = b = c$.**Aufgabe 11 (6+4 Punkte)**

- (1) Sei V ein $\mathbf{R}$ -Vektorraum, der den beiden normierten Räumen $(V, \|\cdot\|)$ und $(V, \|\cdot\|')$ zugrundeliege.

Gebe es $\alpha, \beta \in \mathbf{R}_{>0}$ mit $\alpha\|x\| \leq \|x\|' \leq \beta\|x\|$ für alle $x \in V$.Seien $d := d^{(V, \|\cdot\|)}$ und $d' := d^{(V, \|\cdot\|')}$ die zugehörigen Metriken auf V .Seien $T := T^{(V,d)}$ und $T' := T^{(V,d')}$ die zugehörigen Topologien.Zeige, daß $T = T'$.

- (2) Sei $n \geq 1$. Zeige mittels (1) erneut, daß $T^{(\mathbf{R}^n, d^{(2)})} = T^{(\mathbf{R}^n, d^{(\infty)})}$; cf. §1.3.5.4, §1.3.5.5.

Aufgabe 12 (4 Punkte)Sei (X, T) ein topologischer Raum. Sei $Y \subseteq X$. Zeige.

- (1) Sei $U \subseteq Y$ mit $U \stackrel{\text{off.}}{\subseteq} X$. Es ist $U \stackrel{\text{off.}}{\subseteq} Y$.

- (2) Sei $A \subseteq Y$ mit $A \stackrel{\text{abg.}}{\subseteq} X$. Es ist $A \stackrel{\text{abg.}}{\subseteq} Y$.