M. Künzer Abgabe Mittwoch, 06.05.09

Topologie, SS 09

Blatt 2

Aufgabe 5 (3+4 Punkte)

Sei (X, T) ein topologischer Raum.

(1) Sei I eine Indexmenge. Seien $A_i \overset{\text{abg.}}{\subseteq} X$ für $i \in I$. Zeige, daß $\bigcap_{i\in I} A_i \overset{\text{abg.}}{\subseteq} X$.

(2) Sei $Y \subseteq X$. Zeige, daß $Z \subseteq Y$ genau dann eine (bzgl. Spurtopologie) abgeschlossene Teilmenge ist, wenn es eine abgeschlossene Teilmenge $Z' \subseteq X$ mit $Z = Z' \cap Y$ gibt.

Aufgabe 6 (6 Punkte) Zeige oder widerlege.

Sei (X, T) ein topologischer Raum. Sei $Y \subseteq X$.

(1) Ist U eine offene Teilmenge von Y, so ist U auch eine offene Teilmenge von X.

(2) Ist U eine offene Teilmenge von Y, und ist Y eine offene Teilmenge von X, so ist U auch eine offene Teilmenge von X.

(3) Ist A eine abgeschlossene Teilmenge von Y, und ist Y eine abgeschlossene Teilmenge von X, so ist A auch eine abgeschlossene Teilmenge von X.

Aufgabe 7 (3+4 Punkte)

Sei (X, d) ein metrischer Raum. Sei $Y \subseteq X$ eine Teilmenge.

(1) Zeige, daß $(Y, d|_{Y\times Y})$ ein metrischer Raum ist.

(2) Zeige, daß die von der Metrik $d|_{Y\times Y}$ auf Y induzierte Topologie $T^{(Y,\, d|_{Y\times Y})}$ gleich der Spurtopologie ist.

Aufgabe 8 (3 Punkte)

Sei $X := \{1, 2\}$. Sei eine Prämetrik d auf X definiert durch

$$d(1,1) \ := \ 1\ ,\ \ d(2,2) \ := \ 1\ ,\ \ d(1,2) \ := \ d(2,1) \ := 0\ .$$

Zeige, daß $T^{(X,d)} = T_{X,\,\text{verklumpt}}$. Zeige, daß $\mathrm{B}_1(1)$ keine offene Teilmenge von X ist.