Topologie, SS 09

Blatt 12

Aufgabe 44 (4 Punkte) Zeige oder widerlege.

Sei X ein endlicher topologischer Raum.

(1) Es ist X zusammenhängend.

(2) Es ist X kompakt.

Aufgabe 45 (2+3+3 Punkte)

Sei $X := \{ \binom{x_1}{x_2} \in \mathbf{R}^2 \ : \ 0 \leqslant x_1 \leqslant 1 \text{ und } |x_2| \leqslant x_1 \}$.

(1) Skizziere X.

(2) Zeige, daß X zusammenhängend ist.

(3) Zeige, daß X kompakt ist.

Aufgabe 46 (10 Punkte)

Sei X ein kompakter topologischer Raum. Wir erinnern daran, daß $\mathrm{C}(X)$ ein normierter Raum ist; cf. Bemerkung in §5.2.

(1) Seien $u,\ v \in \mathrm{C}(X)$. Zeige, daß $\|u \cdot v\| \leqslant \|u\| \cdot \|v\|$.

(2) Sei $(V, \|-\|)$ ein normierter Raum. Zeige, daß die Abbildung $V \times V \xrightarrow{(+)} V$, $(x, y) \longmapsto x+y$ stetig ist. Folgere, daß die Abbildung $\mathrm{C}(X) \times \mathrm{C}(X) \longrightarrow \mathrm{C}(X)$, $(f, g) \longmapsto f + g$ stetig ist.

(3) Zeige, daß die Abbildung $\mathrm{C}(X) \times \mathrm{C}(X) \xrightarrow{(\cdot)} \mathrm{C}(X)$, $(f, g) \longmapsto f \cdot g$ stetig ist.

(4) Sei $\lambda \in \mathbf{R}$. Sei $(V, \|-\|)$ ein normierter Raum. Zeige, daß die Abbildung $V \xrightarrow{\lambda(-)} V$, $x \longmapsto \lambda x$ stetig ist. Folgere, daß die Abbildung $\mathrm{C}(X) \longrightarrow \mathrm{C}(X)$, $f \longmapsto \lambda f$ stetig ist.

(5) Sei $(f_n)_n$ eine Folge in $\mathrm{C}(X)$, die gegen $f \in \mathrm{C}(X)$ konvergiert. Sei $(g_n)_n$ eine Folge in $\mathrm{C}(X)$, die gegen $g \in \mathrm{C}(X)$ konvergiert. Sei $\lambda \in \mathbf{R}$. Zeige, daß $(f_n + g_n)_n$ gegen $f + g$ konvergiert, daß $(f_n \cdot g_n)_n$ gegen $f \cdot g$ konvergiert und daß $(\lambda f_n)_n$ gegen λf konvergiert.

Aufgabe 47 (6 Punkte)

Seien X und Y topologische Räume. Zeige.

(1) Sind X und Y zusammenhängend, so auch $X \times Y$. (Hinweis: i_y und j_x aus §3.4.)

(2) Sind X und Y wegzusammenhängend, so auch $X \times Y$.