M. Künzer — Abgabe Mittwoch, 15.07.09

Topologie, SS 09

Blatt 11

Aufgabe 41 (12 Punkte)

(1) Sei X ein topologischer Raum. Sei $Y \overset{\text{abg.}}{\subseteq} X$. Sei $(y_n)_n$ eine Folge in Y. Sei $x \in X$ ein Häufungspunkt der Folge $(y_n)_n$, gesehen als Folge in X. Zeige, daß $x \in Y$.

(2) Sei X ein metrischer Raum. Sei $Y \subseteq X$. Sei $x \in X$. Es ist $x \in \bar{Y}$ genau dann, wenn es eine Folge $(y_n)_n$ in Y gibt, die, gesehen als Folge in X, gegen x konvergiert.

(3) Sei X ein folgenkompakter topologischer Raum. Sei $f \in \mathrm{C}(X)$. Zeige, daß es ein $\hat{x} \in X$ gibt mit $f(x) \leqslant f(\hat{x})$ für alle $x \in X$. In anderen Worten, zeige, daß f auf X ein Maximum annimmt.

(4) Sei X ein metrischer Raum. Sei $K \subseteq U \overset{\text{off.}}{\subseteq} X$, und sei K folgenkompakt. Zeige, daß es ein $\varepsilon \in \mathbf{R}_{>0}$ so gibt, daß $d(k, x) \geqslant \varepsilon$ für alle $k \in K$ und alle $x \in X \setminus U$.

Aufgabe 42 (6 Punkte) Zeige oder widerlege.

(1) Sei X ein topologischer Raum. Sei $x \in X$. Sei $(x_n)_n$ die konstante Folge in X mit $x_n = x$ für alle $n \in \mathbf{Z}_{\geqslant 1}$. Dann ist x ein Konvergenzpunkt von $(x_n)_n$.

(2) Sei X ein topologischer Raum. Sei $(x_n)_n$ eine Folge in X mit Konvergenzpunkten x und x'. Dann ist $x = x'$.

(3) Sei X ein metrischer Raum. Sei $(x_n)_n$ eine Folge in X, für welche für alle $\varepsilon \in \mathbf{R}_{>0}$ ein $m \in \mathbf{Z}_{\geqslant 1}$ existiert mit $d(x_n, x_{n'}) < \varepsilon$ für $n,\, n' \in \mathbf{Z}_{\geqslant m}$. Dann konvergiert $(x_n)_n$.

Aufgabe 43 (6 Punkte)

(1) Seien X und Y topologische Räume. Sei $(x_n)_n$ eine Folge in X mit Konvergenzpunkt $x \in X$. Sei $(y_n)_n$ eine Folge in Y mit Konvergenzpunkt $y \in Y$. Zeige, daß die Folge $\big((x_n, y_n)\big)_n$ in $X \times Y$ den Konvergenzpunkt (x, y) hat.

(2) Sei X ein folgenkompakter topologischer Raum. Sei Y ein metrischer Raum. Sei Z ein metrischer Raum. Sei $f : X \times Y \longrightarrow Z,\ (x, y) \longmapsto f(x, y)$ eine stetige Abbildung. Sei $y_0 \in Y$.

Zeige, daß es für alle $\varepsilon \in \mathbf{R}_{>0}$ ein $\delta \in \mathbf{R}_{>0}$ gibt mit $|f(x, y) - f(x, y_0)| < \varepsilon$ für alle $y \in \mathrm{B}_\delta(y_0)$ und alle $x \in X$.