M. Künzer Abgabe Mittwoch, 08.07.09

Topologie, SS 09

Blatt 10

Aufgabe 36 (9 Punkte)

Seien X und Y Hausdorffräume.

(1) Sei $x \in X$. Zeige, daß $\{x\} \overset{\text{abg.}}{\subseteq} X$.

(2) Zeige, daß $X \times Y$ hausdorffsch ist.

(3) Sei X endlich. Zeige, daß X die diskrete Topologie trägt.

Aufgabe 37 (3+1 Punkte)

Seien X und Y topologische Räume. Sei $X \xrightarrow[\sim]{f} Y$ ein Homöomorphismus.

(1) Zeige, daß X genau dann hausdorffsch ist, wenn Y hausdorffsch ist.

(2) Zeige, daß X genau dann kompakt ist, wenn Y kompakt ist.
(Hinweis: Lemma (3) aus §4.2.1.)

Aufgabe 38 (4 Punkte)

Sei X ein topologischer Raum. Sei $k \geqslant 1$. Sei $Y_j \subseteq X$ kompakt für $1 \leqslant j \leqslant k$. Sei $X = \bigcup_{j=1}^{k} Y_j$. Zeige, daß X kompakt ist.

Aufgabe 39 (4 Punkte)

Sei (X, d) ein metrischer Raum. Sei $D \subseteq X$ eine abzählbare dichte Teilmenge. Zeige, daß X eine abzählbare Basis besitzt. (Hinweis: Vgl. Beispiel (4) aus §3.2 und Aufgabe 27.(5).)

Aufgabe 40 (4 Punkte)

Seien X und Y topologische Räume. Sei $A \subseteq X$ und $B \subseteq Y$. Zeige, daß $(A \times B)^\circ = A^\circ \times B^\circ$.