

## Topologie, SS 09

**Blatt 1****Aufgabe 1 (6 Punkte)**

- (1) Bestimme  $\text{Pot}(\{1, 2, 3\})$ .
- (2) Sei  $X$  eine Menge. Zeige, daß die Abbildung

$$\begin{aligned} \text{Abb}(X, \{0, 1\}) &\longrightarrow \text{Pot}(X) \\ f &\longmapsto f^{-1}(\{1\}) \end{aligned}$$

eine Bijektion ist.

- (3) Sei  $X$  eine (nicht notwendig endliche) Menge. Zeige, daß es keine Surjektion von  $X$  nach  $\text{Pot}(X)$  gibt. (Hinweis: Angenommen, es sei  $X \xrightarrow{f} \text{Pot}(X)$  surjektiv. Betrachte  $Y = \{x \in X : x \notin f(x)\} \subseteq X$ . Sei  $y \in X$  mit  $f(y) = Y$ . Ist  $y \in Y$ ? Ist  $y \notin Y$ ?)

**Aufgabe 2 (6 Punkte)** (Sierpinski-Raum)

Bestimme eine weder verklumpte noch diskrete Topologie auf der Menge  $\{1, 2\}$ .

**Aufgabe 3 (6 Punkte)** Zeige (durch Beweis) oder widerlege (durch Gegenbeispiel).

Sei  $X$  eine Menge.

- (1) Sei  $T := \{U \subseteq X : U \text{ ist endlich}\} \cup \{X\}$ . Es ist  $(X, T)$  ein topologischer Raum.
- (2) Sei  $T := \{U \subseteq X : X \setminus U \text{ ist endlich}\} \cup \{\emptyset\}$ . Es ist  $(X, T)$  ein topologischer Raum.

**Aufgabe 4 (10 Punkte)** Zeige oder widerlege.

Sei  $X$  ein topologischer Raum. Sei  $I$  eine Indexmenge. Sei  $k \in \mathbf{Z}_{\geq 1}$ .

- (1) Ist  $Y \subseteq X$ , so ist  $Y$  offen oder abgeschlossen.
- (2) Ist  $U_i \overset{\text{off.}}{\subseteq} X$  für alle  $i \in I$ , so ist  $\bigcap_{i \in I} U_i \overset{\text{off.}}{\subseteq} X$ .
- (3) Ist  $U_i \overset{\text{off.}}{\subseteq} X$  für alle  $i \in \{1, \dots, k\}$ , so ist  $\bigcap_{i=1}^k U_i \overset{\text{off.}}{\subseteq} X$ .
- (4) Ist  $A_i \overset{\text{abg.}}{\subseteq} X$  für alle  $i \in I$ , so ist  $\bigcup_{i \in I} A_i \overset{\text{abg.}}{\subseteq} X$ .
- (5) Ist  $A_i \overset{\text{abg.}}{\subseteq} X$  für alle  $i \in \{1, \dots, k\}$ , so ist  $\bigcup_{i=1}^k A_i \overset{\text{abg.}}{\subseteq} X$ .