Vortrag 3 — Symmetriegruppe des Würfels

Für $n \geqslant 1$ sei $\mathrm{O}_n(\mathbf{R}) = \{A \in \mathbf{R}^{n\times n} \;:\; AA^{\mathrm{t}} = \mathrm{I}_n\}$, wobei t die Transposition und I_n die Einheitsmatrix bezeichne. Ist $A \in \mathrm{O}_n(\mathbf{R})$, so ist $\det A \in \{-1,+1\}$. Es ist $\mathrm{O}_n(\mathbf{R})$ eine Untergruppe der Gruppe $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ der invertierbaren $n \times n$-Matrizen, die *orthogonale Gruppe,* bestehend aus den *orthogonalen Matrizen* der Form $n \times n$.

Für $x,\, y \in \mathbf{R}^n$ schreiben wir $x \perp y$ falls $x^{\mathrm{t}}y = 0$, in Worten, x ist orthogonal zu y.

Bemerkung. *Seien $x,\, y \in \mathbf{R}^n$ und $A \in \mathrm{O}_n(\mathbf{R})$ gegeben. Ist $x \perp y$, dann ist auch $Ax \perp Ay$.*

Sei ferner $\mathrm{SO}_n(\mathbf{R}) = \{A \in \mathbf{R}^{n\times n} \;:\; AA^{\mathrm{t}} = \mathrm{I}_n,\; \det A = 1\}$. Dies ist eine Untergruppe der orthogonalen Gruppe, genannt *spezielle orthogonale Gruppe* oder *Rotationsgruppe,* bestehend aus *Rotationen.* Es enthält $\mathrm{SO}_n(\mathbf{R})$ im Gegensatz zu $\mathrm{O}_n(\mathbf{R})$ keine Spiegelungen.

Also $\mathrm{SO}_n(\mathbf{R}) \leqslant \mathrm{O}_n(\mathbf{R}) \leqslant \mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$.

Sei $E := \left\{ \left(\begin{smallmatrix} a \\ b \\ c \end{smallmatrix}\right) \;:\; a,\, b,\, c \in \{-1,+1\} \right\} \subseteq \mathbf{R}^3$ die *Eckenmenge des Würfels.*

Sei $W := \{A \in \mathbf{R}^{3\times 3} \;:\; AA^{\mathrm{t}} = \mathrm{I}_3,\; \det A = 1,\; AE \subseteq E\}$ die *Symmetriegruppe des Würfels.* Es ist W eine Untergruppe von $\mathrm{SO}_3(\mathbf{R})$. Sie besteht aus den Rotationen, die die Eckenmenge E und damit den ganzen Würfel in sich überführen.

Also $W \leqslant \mathrm{SO}_3(\mathbf{R}) \leqslant \mathrm{O}_3(\mathbf{R}) \leqslant \mathrm{GL}_3(\mathbf{R})$.

Sei nun

$$\begin{array}{rcl} R & := & \{\{x,-x\} \;:\; x \in E\} \\ & = & \left\{ D_1 := \{\pm \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)\},\; D_2 := \{\pm \left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)\},\; D_3 := \{\pm \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)\},\; D_4 := \{\pm \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)\}, \right\} \end{array}$$

die Menge der *Raumdiagonalen* des Würfels. Eine solche ist hier gegeben durch ihre beiden Endpunkte.

Es operiert W auf der Menge der Raumdiagonalen. Einem Element A kann so eine Permutation $\sigma_A \in \mathcal{S}_4$ zugeordnet werden, welche

$$AD_i \;=\; D_{\sigma_A(i)}$$

erfüllt. Es wird

$$\begin{array}{rcl} W & \xrightarrow{s} & \mathcal{S}_4 \\ A & \longmapsto & \sigma_A \end{array}$$

ein Gruppenmorphismus.

Behauptung. *Es ist s injektiv.*

Beweis. Wir haben zu zeigen, daß $\operatorname{Kern} s = \{\mathrm{I}_3\}$. Sei also $A \in W$ mit $\sigma_A = \mathrm{id}$ gegeben, d.h. mit $AD_i = D_i$ für alle $i \in [1,4]$. Schreibe

$$A \;=\; \left(\begin{smallmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{smallmatrix}\right) \;.$$

Da

$$\{x \in \mathbf{R}^3 \;:\; x \perp \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \text{ und } x \perp \left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)\} \;=\; \langle \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right) \rangle \;,$$

bildet A die Gerade $\langle\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\rangle$ in sich ab. Also ist $a_{1,2} = a_{1,3}$.

Analog sieht man, daß A die Gerade $\langle\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\rangle$ in sich abbildet, woraus man $a_{2,1} = a_{2,3}$ folgert.

Analog sieht man, daß A die Gerade $\langle\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\rangle$ in sich abbildet, woraus man $a_{3,1} = a_{3,2}$ folgert.

Da nun $A^{\mathrm{t}} = A^{-1}$ ebenfalls in $\operatorname{Kern} s$ liegt, folgt nun genauso, daß $a_{2,1} = a_{3,1}$, $a_{1,2} = a_{1,3}$ und $a_{1,3} = a_{2,3}$. Somit gibt es ein $x \in \mathbf{R}$ mit

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & x & x \\ x & a_{2,2} & x \\ x & x & a_{3,3} \end{pmatrix} .$$

Da $AD_1 = D_1$, folgt, daß $\begin{pmatrix} a_{1,1} \\ a_{2,2} \\ a_{3,3} \end{pmatrix} + 2x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \pm \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, also $y := a_{1,1} = a_{2,2} = a_{3,3}$ und mithin

$$A = \begin{pmatrix} y & x & x \\ x & y & x \\ x & x & y \end{pmatrix} .$$

Da $AD_2 = D_2$, folgt, daß $x = 0$ und $y = \pm 1$.

Da $\det A = 1$, folgt $A = \mathrm{I}_3$. $\square$

Behauptung. *Es ist s surjektiv.*

Beweis. Es wird $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in W$ auf $(1,4)$ abgebildet. Es wird $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in W$ auf $(1,3)$ abgebildet. Es wird $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in W$ auf $(1,2)$ abgebildet.

Da das Bild von s eine Untergruppe von $\mathcal{S}_4$ ist, die $(1,2)$, $(1,3)$ und $(1,4)$ enthält, ist das Bild von s gleich $\mathcal{S}_4$. $\square$

Konklusion. *Insgesamt ist s also bijektiv. D.h. die Symmetriegruppe des Würfels ist isomorph zu $\mathcal{S}_4$.*